Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бородин, Д. Р. Вудал, Вес граней в плоских картах,
Матем. заметки, 1998, том 64, выпуск 5, 648–657

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1441>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:01:28

УДК 519.17

ВЕС ГРАНЕЙ В ПЛОСКИХ КАРТАХ

О. В. Бородин, Д. Р. Вудал

Найдены точные верхние оценки для минимального веса младшей грани в плоских нормальных картах и 3-мерных выпуклых многогранниках с заданной максимальной степенью вершины.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Работа посвящена исследованию комбинаторного строения плоских графов. Как доказано Штейницом [1], 3-связные плоские графы взаимно однозначно соответствуют выпуклым 3-мерным многогранникам, именуемым далее *3-многогранниками*.

В развитии этой области большую роль сыграла теория эйлеровых вкладов, предложенная Лебегом [2] для получения структурной информации о плоском графе. Одним из стимулов для этой и последующих работ являлась проблема четырех красок. При всей своей универсальности и идейной простоте подход Лебега не обладает достаточной разрешающей способностью, чтобы ответить на многие естественные вопросы о строении и раскрасках плоских графов.

В последние десять лет в данной области наблюдается значительный прогресс. Так, Бородиным (см. [3]) получен ряд результатов о строении окрестностей ребер и граней в различных классах плоских графов, имеющих приложения к задачам цикловой, совместной и предписанной раскрасок. На основе единого метода в [3] решены некоторые задачи, поставленные в 60–70 гг. Рингелем, Кошигом, Грюнбаумом, Юцовичем, Пламмером, Кронком и др.

Подробное описание окрестности ребра можно найти в [4]; в настоящей работе мы рассматриваем окрестности другого базисного элемента плоских граней – граней. (В силу вершинно-граневой двойственности результаты о строении граней легко переводятся на язык вершин и обратно.) Точнее, завершая цикл исследований, восходящий к Лебегу [2], мы получаем точную верхнюю оценку для суммы степеней граничных вершин грани в 3-многогранниках через максимальную степень вершины.

Перейдем к определениям. Те из них, которые касаются правильных и полуправильных многогранников (платоновых и архимедовых тел), можно найти в [5].

Степенью $d(v)$ вершины v (степенью $r(f)$ грани f) в графе G называется число инцидентных ей ребер; *k -вершиной (k -гранью)* называется вершина (грань) степени k , а *$\geq k$ -вершина* имеет степень не меньше k , и т.д.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Британского Совета по физико-техническим наукам, грант GR/K00561, и Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01614 и № 97-01-01075.

Как известно, каждая *нормальная* плоская карта, т.е. такая, в которой каждая вершина и каждая грань имеет степень не меньше 3, содержит *младшую* грань, т.е. грань степени не больше 5. В дальнейшем M всегда обозначает плоскую нормальную карту с максимальной степенью $\Delta = \Delta(M)$. Мы ограничиваемся рассмотрением нормальных карт, поскольку иначе может вообще не быть младших граней, как показывает пример цикла C_n . *Вес грани* в M есть сумма степеней окружающих вершин, а $w(M)$ (или просто w) обозначает *минимальный вес младшей грани* в M .

Лебег [2] получил теорему о строении младших граней в M , из которой, в частности, следует, что $w \leq \max\{51, \Delta + 9\}$. При $\Delta \geq 42$ эта оценка точна, как следует из Δ -угольной антипризмы (см. ниже). Кроме того, результат Лебега влечет точные верхние оценки для w при $\Delta \leq 10$, включенные нами в следующую ниже теорему 1.

Для триангулированных 3-многогранников без 4-вершин Коциг [6] доказал оценку $w \leq 39$, а Бородин [7] установил, что $w \leq 29$, и эта оценка является наилучшаемой ввиду дважды усеченного додекаэдра. Нетриангулированный 3-многогранник может иметь сколь угодно большой вес w , как показывает n -пирамида. С другой стороны, при наличии 4-вершин даже триангулированный многогранник может иметь неограниченный вес w , как показывает двойная n -пирамида. Бородин [8] далее установил, что если в триангулированном 3-многограннике никакая 4-вершина не смежна с 3- или 4-вершинами, то по-прежнему $w \leq 29$, а если запретить лишь 4, 4-ребра, то имеет место точная оценка $w \leq 37$. Поскольку наличие $\leq 4, \leq 4$ -ребра сразу дает $w \leq \Delta + 8$, отсюда следует, что каждый триангулированный 3-многогранник имеет вес $w \leq \max\{29, \Delta + 8\}$. Заметим, что в двойной Δ -пирамиде каждая грань имеет вес $\Delta + 8$, так что обе компоненты в последней оценке наилучшаемы.

Для произвольных M оценка $w \leq \Delta + 9$ является наилучшаемой всюду, где она верна: возьмем двойное (2Δ) -колесо (пирамиду) и удалим верхние спицы с четными номерами и нижние с нечетными с получением Δ -угольной антипризмы, в которой каждая грань имеет тип $(3, 3, 3, \Delta)$. Бородин доказал [3], [9], что если в M нет граней типа $(3, 3, 3, \leq \Delta)$, то $w \leq \max\{32, \Delta + 8\}$. Хорнак и Ендроль [10] доказали с помощью компьютерных вычислений, что если M не содержит $(3, 3, 3, \leq \Delta)$ -, $(\leq 4, \leq 4, \leq \Delta)$ - и $(3, 5, \leq 39)$ -граней, то $w \leq 32$. В настоящей статье мы доказываем (следствие 3), что $w \leq \max\{29, \Delta + 8\}$ либо в M есть $(3, 3, 3, \leq \Delta)$ -грань.

Бородин и Вудал [11] доказали, что M имеет вес $w \leq 25$ либо содержит грань одного из следующих типов: $(3, 3, \leq 4, \leq \Delta)$, $(\leq 4, \leq 4, \leq \Delta)$, $(3, 5, \leq \Delta)$, $(3, 6, \leq 20)$, $(4, 5, \leq 19)$ или $(3, 3, 5, \leq 19)$.

Хорнак и Ендроль [10] изучали минимум w^* веса граней по всем граням в M , а не только по младшим, как делалось всеми, начиная с Лебега [2]. Очевидно, $w^* \leq w$. Они показали [10], что любая карта M имеет $w^* \leq \max\{32, \Delta + 9\}$, а любая карта M без $(3, 3, 3, \leq \Delta)$ - и $(\leq 4, \leq 4, \leq \Delta)$ -граней имеет $w^* \leq 32$.

При $3 \leq k \leq 10$ и $k \geq 42$ следующая теорема 1 вытекает из результата Лебега [2]; при $11 \leq k \leq 12$ из работ Бородина [12] и Хорнака, Ендроль [10], а при $19 \leq k \leq 20$ и $24 \leq k \leq 41$ из работ Бородина [3], [9] и Хорнака, Ендроль [10].

Цель данной статьи состоит в завершении этих исследований получением точной верхней оценки для минимального веса младшей грани в нормальных картах через максимальную степень вершины.

ТЕОРЕМА 1. *Если $k \geq 3$, а M – нормальная плоская карта максимальной степени $\Delta(G) \leq k$, то M содержит младшую грань f веса не более $W(k)$, где $W(k)$ наилучшаема и задается табл. 1.*

Метод, использованный Бородиным [3], [9] и Хорнаком, Ендролем [10], непригоден

ТАБЛИЦА 1

k	$W(k)$	грани	двойственный многогранник
3	15	$12(3^5)$	к икосаэдру (т.е. додекаэдр)
4	16	$24(3^4.4)$	к плосконосому кубу
5	17	$60(3^4.5)$	к плосконосому додекаэдру
6	17	$60(5.6^2)$	к усеченному икосаэдру
7	18	$64(4.7^2), 8(7^3)$	к конструкции 1 (см. текст)
8	19	$24(3.8^2)$	к усеченному кубу
9	21	$48(3.9^2), 6(3^29^2)$	к конструкции 2
10	23	$60(3.10^2)$	к усеченному додекаэдру
11	24	$120(3.10.11), 40(3.11^2), 10(3^211^2)$	к конструкции 3
12–16	25	$120(3.10.12), 60(3.12^2)$	к дважды усеченному икосаэдру
≥ 17	$k + 9$	$2k(3^3k)$	к конструкции 4

для разрешения оставшихся в теореме 1 случаев. Фактически мы даем единое доказательство для всех $k \geq 11$, основанное на нашем подходе в [11], и используем результат Лебега [2] при $k \leq 10$.

В табл. 1 приведены многогранники, подтверждающие неухудшаемость оценок теоремы 1. Здесь $24(3^4.4)$, например, означает наличие в многограннике 24 граней, каждая из которых граничит с одной 4-вершиной и четырьмя 3-вершинами, так что каждая грань имеет вес 16.

Табл. 1 дополняется следующими конструкциями.

Конструкция 1. Усекаем все 4-вершины в двойственном многограннике к ромбокубооктаэдру и берем двойственный многогранник.

Конструкция 2. Стягиваем шесть ребер в усеченном додекаэдре, которые совместно инцидентны всем двенадцати 10-граням.

Конструкция 3. Стягиваем десять ребер в дважды усеченном икосаэдре, которые совместно инцидентны всем двадцати 12-граням, и берем двойственный многогранник.

Конструкция 4. Приводим двойственный многогранник к k -угольной антипризме.

Вместо теоремы 1 нам будет удобнее доказать следующую ниже более сильную теорему 2, в которой параметры 25 и 24 являются неухудшаемыми. Будем говорить, что грань имеет *тип* $(a, \leq b, \geq c)$ или является $(a, \leq b, \geq c)$ -гранью, если инцидентные ей вершины имеют степени (вне какого-либо определенного порядка) $d_1 = a$, $d_2 \leq b$ и $d_3 \geq c$; остальные типы определяются аналогично.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – нормальная плоская карта с $\Delta(M) = \Delta$, не содержащая граней типа $(\leq 4, \leq 4, \leq \Delta)$, $(3, 5, \leq \Delta)$, $(3, 3, 3, \leq \Delta)$ и $(3, 6, \leq 20)$. Тогда M содержит младшую грань, отличную от $(3, 11, 11)$ -грани, вес которой не более 25 при $\Delta \geq 12$ и не более 24 при $\Delta = 11$.

Ни один из четырех запрещенных типов граней не может быть опущен в формулировке теоремы 2, благодаря соответственно Δ -угольной антипризме, построенному Хорнаком и Эндролем [10] 3-многограннику с $w = 26$ без граней типов $(\leq 4, \leq 4, \leq \Delta)$, $(3, 3, 3, \leq \Delta)$ и $(3, 6, \leq 20)$, Δ -угольной антипризме и многограннику, двойственному к дважды усеченному додекаэдру.

Весы граней четырех запрещенных в теореме 2 типов не превосходят $\Delta + 8$, $\Delta + 8$, $\Delta + 9$ и $\min\{29, \Delta + 9\}$ соответственно. Поэтому (с учетом результатов Лебега [2] при

$k \leq 10$ и конструкций из табл. 1) теорема 1 легко следует из теоремы 2.

Теорема 2 влечет следующий результат, в котором все параметры, как уже отмечалось, являются неулучшаемыми.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Каждая нормальная карта без $(3, 3, 3, \leq \Delta)$ -граней имеет вес $w \leq \max\{29, \Delta + 8\}$.*

2. Доказательство теоремы 2. Предположим, что $M = (V, E, F)$ – контрпример к теореме 2, имеющий минимально возможное число вершин степени больше 3 и (с выполнением этого ограничения) максимизирующий число ребер, соединяющих такие вершины, плюс число 3-граней, инцидентных по меньшей мере двум таким вершинам. Мы будем часто пользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 1. а) *Пусть uvw – три последовательные вершины вдоль границы нетреугольной грани f в M . Тогда*

$$d(w) \leq \begin{cases} 19 & \text{при } d(u) = 5, \\ 9 & \text{при } d(u) \geq 10, \end{cases}$$

а если $6 \leq d(u) \leq 9$, то $d(u) + d(w) \leq 20$.

б) *В M нет 3-граней f типа $(5, \geq 20, \geq 20)$, $(6, \geq 15, \geq 15)$, $(7, \geq 14, \geq 14)$, $(8, \geq 13, \geq 13)$, $(9, \geq 12, \geq 12)$ и $(\geq 10, \geq 10, \geq 10)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f нарушает утверждение а), то добавим ребро uw внутрь f с получением карты M^* , в которой либо $d(u) = 6$ и $d(w) \geq 21$, либо $d(u) \geq 11$ и $d(w) \geq 11$, либо $d(u) \geq 7$, $d(w) \geq 7$ и $d(u) + d(w) \geq 23$. При этом не возникает граней ни одного из четырех запрещенных типов. Веса старых граней не уменьшились, в то время как всякая новая грань имеет либо тип $(3, 11, 11)$, либо вес не менее $23 + 3 = 26$. Отсюда M^* является контрпримером к теореме 2, и в ней больше чем в M ребер, соединяющих вершины степени больше 3, что противоречит выбору M .

Если f нарушает утверждение б), то вставим внутрь f 3-вершину, смежную с u , v и w . Новые треугольники имеют типы $(3, \geq 6, \geq 21)$, $(3, \geq 7, \geq 16)$, $(3, \geq 8, \geq 15)$, $(3, \geq 9, \geq 14)$, $(3, \geq 10, \geq 13)$ или $(3, \geq 11, \geq 11)$. Поэтому мы снова имеем контрпример, противоречащий выбору M .

Теперь предположим, что мы приписываем заряд $M(x)$ каждому элементу $x \in V \cup F$, где

$$M(x) := \begin{cases} 2d(x) - 6, & \text{если } x \in V, \\ r(x) - 6, & \text{если } x \in F. \end{cases}$$

Формула Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ может быть переписана в виде $(4|E| - 6|V|) + (2|E| - 6|F|) = -12$, откуда следует, что

$$\sum_{x \in V \cup F} M(x) = \sum_{v \in V} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (r(f) - 6) = -12. \quad (1)$$

Теперь мы перераспределим заряды, не меняя их суммы, таким образом, что их сумма станет доказуемо неотрицательной, и это противоречие завершит доказательство теоремы. Правила перераспределения зарядов следующие.

Правило R1. Каждая 4-вершина дает $\frac{1}{2}$ каждой инцидентной грани.

Правило R2. Каждая 5-вершина v дает $\frac{1}{2}$ каждой инцидентной грани за тем исключением, что дает

а) 0 нетреугольной грани $\dots uvw \dots$, если $d(u) = d(w) = 4$;

- б) $\frac{1}{4}$ нетреугольной грани $\dots uvw \dots$, если $d(u) = 5, d(w) = 4$;
- в) $\frac{3}{4}$ грани типа $(5, 5, \leq \Delta)$;
- г) 1 грани типа $(4, 5, \leq \Delta)$;
- д) 0 ($\geq 16, 5, \geq 16$)-грани.

Правило R3. Каждая ≥ 6 -вершина v дает 1 каждой инцидентной нетреугольной грани за тем исключением, что дает

- а) $\frac{3}{2}$ грани uvw , если $d(v) \geq 11$, и грани uvw , если $d(v) \geq 12$, где в обоих случаях $4 \leq d(u) \leq 9$ и $d(w) = d(x) = 3$;
- б) $\frac{1}{2} \geq 4$ -грани $\dots uvw \dots$, если $d(u) \leq 5, d(v) = 7$ и $d(w) \leq 5$;
- в) $\frac{3}{4} \geq 4$ -грани $\dots uvw \dots$, если $d(u) \leq 5, d(v) = 7$ и $6 \leq d(w) \leq 13$;
- г) $\frac{7}{5}$, если $d(v) = 10$.

Правило R4. Каждая ≥ 6 -вершина v дает 1 каждой инцидентной 3-грани uvw , если $d(u) \geq 6$ и $d(w) \geq 6$. Если $d(u) \leq 5$ или $d(w) \leq 5$, то для $d(v) = 6, d(v) = 7, d(v) = 8, d(v) = 9, d(v) = 10$ и $d(v) \geq 11$ вершина v дает

$$\begin{cases} 1, 1, 1, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, & \text{если } \Delta = 11, \\ 1, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, & \text{если } \Delta \geq 12, \end{cases}$$

соответственно за следующим исключением: если $d(u) = 3$ и вторая грань $f^* = w^*uv \dots$, инцидентная ребру uv , есть треугольник и $d(w^*) \geq 11$, то вершина v дает 3-грани uvw заряд

$$\begin{cases} 2, & \text{если } d(w) = 6, \\ \frac{7}{4}, & \text{если } d(w) = 7 \text{ или } 8, \\ \frac{5}{3}, & \text{если } d(w) = 9, \\ \frac{8}{5}, & \text{если } d(w) = 10. \end{cases}$$

Правило R5. Если нетреугольная грань $f^* = z^*xy \dots$ имеет общее ребро xy с треугольником f , где $d(x) = 3, d(z^*) \leq 10$ и $6 \leq d(y) \leq 10$, то f^* передает через xy на f заряд

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } d(y) = 6, \\ \frac{1}{4} & \text{при } 7 \leq d(y) \leq 8, \\ \frac{1}{6} & \text{при } d(y) = 9, \\ \frac{1}{10} & \text{при } d(y) = 10. \end{cases}$$

Заметим, что правило R5 не может возникать при $\Delta = 11$, поскольку иначе f имела бы запрещенный тип $(3, \leq 10, \leq 11)$.

Обозначив получившийся на каждом ребре $x \in V \cup F$ новый заряд через $M^*(x)$, имеем

$$\sum_{x \in V \cup F} M^*(x) = -12$$

по (1). Остаток доказательства состоит в проверке того, что $M^*(x) \geq 0$ для каждого x , с получением очевидного противоречия, завершающего доказательство теоремы. Доказательство удобно разбить на случаи.

1) x есть вершина, $x = v \in V$. Положим $d := d(v)$.

1а) $d \geq 13$. Для краткости грани, инцидентные v и получающие от v ровно $\frac{3}{2}$ и меньше $\frac{3}{2}$, будут называться N -гранями и L -гранями соответственно (или N -треугольниками и т.п.). Грани же, получающие больше $\frac{3}{2}$, с необходимостью являются треугольниками, возникающими в исключении к правилу R4, и называются U -треугольниками.

Рис. 1. Степени вершин при NU -парах

Также по правилу R4 грань, соседствующая с U -треугольником по ребру uv , является N -треугольником. Такая пара треугольников будет называться NU -парой и обозначаться $\langle N|U \rangle$ или ${}^w\langle N|U \rangle^w$, если нам нужно указать их “граничные” вершины. Заметим, что тогда $d(w^*) \geq 11$, а $6 \leq d(w) \leq 10$ по правилу R4 (см. рис. 1).

ЛЕММА 2. *Следующие последовательности типов граней не могут возникать в циклическом порядке вокруг v :*

- i) $\langle N|U \rangle^y \langle N|U \rangle$;
- ii) $\langle N|U \rangle^y N^z \langle U|N \rangle$;
- iii) $\langle U|N \rangle^y N^z \langle N|U \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что последовательность i) невозможна из-за степеней на рис. 1, так как давала бы сразу $d(y) \leq 10$ и $d(y) \geq 11$. Из последовательности ii) вытекало бы $d(y) \geq 6$ и $d(z) \geq 6$; но тогда грань между ними не может быть N -гранью либо по правилу R3 а), либо по правилу R4. Наконец, последовательность iii) влекла бы $d(y) \geq 11$ и $d(z) \geq 11$, что противоречит лемме 1, поскольку несомненно $d(v) \geq 10$.

Пусть l и u – количество L -граней и U -треугольников, инцидентных v . Тот факт, что U -треугольники входят в NU -пары, означает, что

$$d \geq 2u + l. \quad (2)$$

Лемма 2i) с оценкой (2) при $l > 0$ влечет, что

$$d \geq 2u + 1, \quad \text{если } u \text{ нечетно}, \quad (3)$$

а все части леммы 2 в совокупности при $l = 0$ влекут, что

$$d \neq 2u + 1, \quad \text{если } u \text{ четно}. \quad (4)$$

Ввиду правила R4 оценка (2) доказывает утверждение в следующих случаях:

- а) при $d = 14$, когда $d(w) = 9$ или 10 , поскольку нет $(3, \leq 8, 14)$ -граней, так как тогда из (2) и (3) следует, что $u \leq 6$, а это влечет $M^*(v) \geq 0$ ввиду $6 \cdot \frac{5}{3} + 8 \cdot \frac{3}{2} = 22 = M(v) = 2 \cdot 14 - 6$;
- б) при $16 \leq d \leq 20$, поскольку тогда $d(w) \geq 7$ ввиду отсутствия $(3, 6, \leq 20)$ -граней и $\frac{1}{2}d \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{2}d \cdot \frac{3}{2} \leq 2d - 6$;
- в) при $d \geq 24$, поскольку тогда $\frac{1}{2}d \cdot 2 + \frac{1}{2}d \cdot \frac{3}{2} \leq 2d - 6$;
- г) при $d = 23$, поскольку $11 \cdot 2 + 12 \cdot \frac{3}{2} = 40 = 2 \cdot 23 - 6$.

Если $d = 22$, то из (2) и (3) следует $u \leq 10$, а этого достаточно, так как $10 \cdot 2 + 12 \cdot \frac{3}{2} = 38 = 2 \cdot 22 - 6$. Если $d = 21$, то либо $l \geq 1$ и $u \leq 10$ по (2), либо $l = 0$ и $u \leq 9$ по (4), чего также достаточно, поскольку v дает не более 1 каждой L -границе и $10 \cdot 2 + 10 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 9 \cdot 2 + 12 \cdot \frac{3}{2} = 36 = 2 \cdot 21 - 6$. Аналогично, если $d = 13$, то либо $l \geq 1$ и $u \leq 6$ по (2), либо $l = 0$ и $u \leq 5$ по (4), что является достаточным, поскольку $6 \cdot \frac{8}{5} + 6 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 19.6 < 5 \cdot \frac{8}{5} + 8 \cdot \frac{3}{2} = 20 = 2 \cdot 13 - 6$. Наконец, если $d = 15$, то $u \leq 7$ по (2). Этого достаточно при $l > 0$, поскольку $7 \cdot \frac{7}{4} + 7 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 23.75 < 24 = 2 \cdot 15 - 6$. Также не возникает осложнений, если $l = 0$ и $u \leq 6$, так как $6 \cdot \frac{7}{4} + 9 \cdot \frac{3}{2} = 24$. Но если $l = 0$ и $u = 7$, то по лемме 2 последовательность типов граней в циклическом порядке вокруг v должна включать три последовательные $NUUN$ -четверки, соединенные через NUN , как в $\dots \langle N|U \rangle \langle U|N \rangle \langle N|U \rangle^u Nw' \langle N|U \rangle^w \langle U|N \rangle \dots$. Здесь $d(y) \geq 8$ ввиду отсутствия $(3, \leq 7, 15)$ -граней и $d(w') \geq 11$ по правилу R4 (см. рис. 1), так что N -грань между y и w' противоречит правилам R3 и R4. Этим завершается рассмотрение подслучая 1а).

1б) $d = 12$ или 11. В этом случае v дает каждой инцидентной грани $\frac{3}{2}$ или ≤ 1 . Если $d = 12$, то $M(v) = 2 \cdot 12 - 6 = 18$ и v дает не более $12 \cdot \frac{3}{2} = 18$, поэтому $M^*(v) \geq 0$. Если $d = 11$, то $M(v) = 2 \cdot 11 - 6 = 16$. Поскольку $10 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 16$, осложнение может возникать лишь когда v дает $\frac{3}{2}$ каждой инцидентной грани. Но v может давать $\frac{3}{2}$ инцидентной грани f двумя различными способами: по правилу R3а) и по правилу R4. Ввиду отсутствия $(3, 3, \leq 5, 11)$ - и $(\leq 5, \leq 5, 11)$ -граней соответственно в каждом из случаев одно из ребер при v , граничащее с f , ведет в вершину степени ≤ 5 , а другое в вершину степени ≥ 6 . Очевидно, что такое невозможно, поскольку $d = 11$ нечетно.

1в) $6 \leq d \leq 10$. В этом случае v дает каждой инцидентной грани не больше максимума, описанного в правиле R4, или 1 в противном случае. Для любого четного d этот максимум равен $2 - 6/d$. Остается доказать утверждение при $d = 9$ и 7.

Если $d = 9$, то $M(v) = 2 \cdot 9 - 6 = 12$. Поскольку v дает $\frac{4}{3}$ не больше чем восьми граням по правилу R4 (все они – треугольники типа $(\leq 5, 9, \geq 11)$), v дает в общей сложности не более $8 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot 1 < 12$.

Если $d = 7$, то $M(v) = 2 \cdot 7 - 6 = 8$, а $M^*(v) \geq 0$, если v дает по $\frac{5}{4}$ не более чем четырем граням, поскольку $4 \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot 1 = 8$. Поэтому предположим, что v дает по $\frac{5}{4}$ пяти или более граням. Каждая из таких граней есть треугольник типа $(\leq 5, 7, \geq 14)$ согласно отсутствию $(\leq 5, 7, \leq 13)$ -граней и правилу R4. Если при v имеется шесть таких треугольников, то седьмая грань содержит три последовательные вершины uvw со степенями $(\geq 14, 7, \geq 14)$ или $(\leq 5, 7, \leq 5)$. Первое невозможно по лемме 1. Поэтому ввиду правила R3б) v дает этой грани только $\frac{1}{2}$, что дает в сумме $6 \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = 8$. Те же рассуждения верны, если v дает $\frac{5}{4}$ пяти граням, а две оставшиеся грани не соседствуют, поскольку тогда эти пять граней разбиваются как $4 + 1$ или $3 + 2$, и v должна давать $\frac{1}{2}$ одной из оставшихся граней. Поэтому предположим, что v дает $\frac{5}{4}$ пяти последовательным граням, и пусть vx, vy, vz будут (в этом порядке) тремя ребрами при v , не разделяющими пары этих ребер. Тогда $d(x) \leq 5$ и $d(z) \geq 14$, или наоборот. Поэтому $d(y) \leq 13$ по лемме 1 и имеется грань, с необходимостью нетреугольная ввиду отсутствия $(\leq 5, 7, \leq 13)$ -граней, которая получает не более $\frac{3}{4}$ от v по правилу R3б) или R3в). Таким образом, v раздает в сумме не более $5 \cdot \frac{5}{4} + \frac{3}{4} + 1 = 8$.

1г) $3 \leq d \leq 5$. Если $d = 3$, то $M^*(v) = M(v) = 0$, и если $d = 4$, то $M^*(v) = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$ по правилу R1. Поэтому предположим, что $d = 5$. Тогда $M(v) = 2 \cdot 5 - 6 = 4$ и никакое ребро не получает от v больше 1.

Очевидно $M^*(v) \geq 0$, если только v не дает по $\frac{3}{4}$ или 1 четырем или более треугольникам согласно правилам R2в) и R2г). Каждый из таких треугольников имеет тип $(4, 5, \geq 17)$ или $(5, 5, \geq 16)$ ввиду отсутствия $(4, 5, \leq 16)$ - и $(5, 5, \leq 15)$ -граней. Если реб-

ра пятой грани при v суть uv, vw , то степени uvw должны быть $(4, 5, 4), (4, 5, 5), (5, 5, 5)$ или $(\geq 16, 5, \geq 16)$, и в последнем случае эта пятая грань является треугольником по лемме 1а). В этих четырех случаях согласно правилу R2 v раздает в сумме не более $4 \cdot 1 + 0 = 4, 3 \cdot 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 4, 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 4$ и $4 \cdot 1 + 0 = 4$. Этим завершается рассмотрение случая 1).

2) x есть грань; $x = f \in F$.

2а) $r(f) \geq 6$. Теперь $M(f) = r(f) - 6 \geq 0$ и f может терять заряд только по правилу R5. Инцидентная 6-вершина $v = y$ вносит 1 в $M^*(f)$ согласно правилу R3, а два инцидентных ей ребра могут выносить не более $2 \cdot \frac{1}{2}$ согласно правилу R5. Инцидентная ≥ 7 -вершина вносит в $M^*(f)$ не менее $\frac{1}{2}$ согласно правилу R3, а два инцидентные ей ребра могут выносить не более $2 \cdot \frac{1}{4}$ по правилу R5. Отсюда $M^*(f) \geq 0$.

2б) $r(f) = 5$. Теперь $M(f) = -1$. Для любой вершины v в границе f определим $n(v)$ как чистый вклад v в $M^*(f)$, т.е. заряд, получаемый f непосредственно от v , минус заряд, потерянный f через ребра, соединяющие v с вершинами степени 3. Рассуждения из подслучая 2а) показывают, что $n(v) \geq 0$ для любой v . Если $d(v) \geq 10$ для некоторой v , то $n(v) \geq 1$ по правилам R3 и R5, и поэтому $M^*(f) \geq 0$. Следовательно, мы можем предположить, что $d(v) \leq 9$ для любой v .

ТАБЛИЦА 2

$d(u)$	$d(v)$	$d(w)$	$n(v)$
3	6	3	$\geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$
3	7	3	$\geq \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 0$
3	8	3	$\geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
3	9	3	$\geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
3	10	3	$\geq \frac{7}{5} - 2 \cdot \frac{1}{10} > 1$
3	≥ 11	≥ 3	$\geq 1 - 0 = 1$

$d(u)$	$d(v)$	$d(w)$	$n(v)$
3	6	≥ 4	$\geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
3	7	4,5	$\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
3	7	≥ 6	$\geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
3	8	≥ 4	$\geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
3	9	≥ 4	$\geq 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
3	10	≥ 4	$\geq \frac{7}{5} - \frac{1}{10} > 1$

Пусть uvw – три последовательные вершины в f . Если они имеют степени $(4, 5, 4)$ или $(5, 5, 4)$, как в правиле R2а) или R2б), то вместе дают f не меньше $\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$, и поэтому $M^*(f) \geq 0$. Итак, мы можем предположить, что правила R2а) и R2б) не возникают. Поэтому $n(v) \geq \frac{1}{2}$, если $d(v) = 4$ или 5. Если $d(v) \geq 6$, то снова очевидно, что $n(v) \geq \frac{1}{2}$, если ни один из соседей v в f не имеет степени 3, или если $\Delta = 11$ (тогда правило R5 не возникает). Если $\Delta \geq 12$ и u и v есть сосед со степенью 3, то нижняя оценка для $n(v)$ приводится в табл. 2. Следовательно, если ни одна из вершин u, v, w не имеет степени 3, то $n(u) + n(v) + n(w) \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ и $M^*(f) \geq 0$. Поэтому мы можем предположить, что в f имеются две несмежные по циклу 3-вершины, если $\Delta \geq 12$, и не меньше четырех 3-вершин, если $\Delta = 11$.

С другой стороны, ввиду отсутствия $(3, 3, 3, 3, \leq 9)$ -граней f имеет не более трех 3-соседей, поэтому $\Delta \geq 12$. Если в точности три, то ввиду отсутствия $(3, 3, 3, \leq 7, \leq 9)$ -граней она имеет двух ≥ 8 -соседей, для каждого из которых $n(v) \geq \frac{1}{2}$ из табл. 2, так что $M^*(f) \geq 0$. Итак, мы можем предположить, что f имеет ровно двух несмежных друг с другом 3-соседей. Пусть f имеет вид $uvwxy$, где $d(u) = d(x) = 3$. Из табл. 2 имеем $n(v) \geq \frac{1}{2}$ и $n(w) \geq \frac{1}{2}$ за исключением случая $d(v) = 7$, а $d(w) \leq 5$ (или наоборот). Но тогда $d(y) \geq 8$ из-за отсутствия $(3, 3, \leq 5, \leq 7, 7)$ -граней, так что $n(y) \geq \frac{1}{2}$ и $n(w) \geq \frac{1}{2}$. Итак, $M^*(f) \geq 0$ во всех случаях.

2в) $r(f) = 4$. Теперь $M(f) = -2$. Определим $n(v)$ так же, как в подслучае 2в).

Если в f имеются три последовательные вершины со степенями $(4, 5, 4)$ или $(5, 5, 4)$, то, как в подслучае 2в), они вместе приносят f по меньшей мере 1; более того, ввиду отсутствия $(4, \leq 5, 5, \leq 10)$ -граней оставшаяся вершина имеет степень не меньше 11 и поэтому также вносит вклад 1 по правилу R3, так что $M^*(f) \geq 0$. Итак, мы можем предположить, что правила R2 а) и R2 б) не возникают и $n(v) \geq \frac{1}{2}$ для любой вершины v на f , имеющей $d(v) = 5$. Следовательно, если на f нет 3-вершин, то $n(v) \geq \frac{1}{2}$ для любой вершины v на f , откуда $M^*(f) \geq 0$.

Если $\Delta = 11$, так что правило R5 не возникает, то

$$n(v) \geq \begin{cases} 1, & \text{если } d(v) \geq 8, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } 4 \leq d(v) \leq 7. \end{cases}$$

Поскольку $(3, 3, \leq 7, \leq 11)$ - и $(3, \leq 7, \leq 7, \leq 7)$ -границ отсутствуют, вершины из f дают f не менее $1 + 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$ или $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. В каждом случае $M^*(f) \geq 0$. Так что можно предположить, что $\Delta \geq 12$.

Поскольку $(3, 3, 3, \leq \Delta)$ -границ отсутствуют, на f не более двух 3-вершин. Предположим сначала, что их ровно две, скажем w, x , и что другие две вершины u, v имеют $d(u) \leq d(v)$. Тогда $d(u) + d(v) \geq 20$ (так как $\Delta \geq 12$). Поэтому если $d(u) = 4$ или 5, то $d(v) \geq 15$ и v вносит $\frac{3}{2}$ по правилу R3 а), тогда как u вносит $\geq \frac{1}{2}$ по правилам R1 и R2. Если $d(u) \geq 10$, то каждая из u и v вносит ≥ 1 согласно табл. 2. Поэтому можно считать, что $6 \leq d(u) \leq 9$ и $d(v) \geq 11$. Если u, v последовательны, то $n(v) \geq \frac{3}{2}$ по правилу R3 а) и $n(u) \geq \frac{1}{2}$ по правилам R3 и R5. Допустим, что это не так, т.е. $f = xuvw$. Тогда u не передает ничего через ux и uw по правилу R5, так что $n(u) \geq 1$ при $d(u) \neq 7$ по правилу R3. Так как $n(v) \geq 1$, остается рассмотреть случай $d(u) = 7$, в котором имеем $n(u) \geq \frac{1}{2}$ по правилу R3, а $n(v) = \frac{3}{2}$ по правилу R3 а), поскольку $d(v) \geq 12$ ввиду отсутствия $(3, 7, 3, \leq 11)$ -граней. Во всех вариантах имеем $M^*(f) \geq 0$. Итак, можно считать, что f инцидентна ровно одной 3-вершине.

Допустим $f = xuvw$, где $d(x) = 3$, и $d(u) \leq d(w)$. Тогда

$$d(u) + d(v) + d(w) \geq 23, \quad (5)$$

поскольку $\Delta \geq 12$. Будем писать $n(uvw)$ вместо $n(u) + n(v) + n(w)$. Если $d(v) \geq 6$, то $n(u) \geq \frac{1}{2}$ и $n(w) \geq \frac{1}{2}$ по правилам R1, R2 и табл. 2, а $n(v) \geq 1$ по правилу R3, если только степени u, v, w не $(\leq 5, 7, \leq 13)$. Но в последнем случае $d(w) \geq 11$ согласно (5) и $n(uvw) \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 > 2$ по правилам R2, R3в) и табл. 2, так что по-прежнему $M^*(f) \geq 0$. Итак, можно считать, что $4 \leq d(v) \leq 5$. Ясно, что $d(u) \leq 9$ по лемме 1 а). Если $d(w) \leq 9$, то $d(u) = d(w) = 9$ и $d(v) = 5$ согласно (5), а $n(uvw) \geq \frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} > 2$ по табл. 2 и правилу R2. Допустим, что $d(w) \geq 10$. Тогда $n(uvw) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$ по правилам R1, R2 и табл. 2, кроме случая $d(u) = 7$. Но $d(u) = 7$ влечет $d(w) \geq 11$ согласно (5), так что ничего не передается через ребро xu по правилу R5, и поэтому мы снова имеем $n(uvw) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$ по правилам R1, R2 и табл. 2. Во всех вариантах $M^*(f) \geq 0$.

ТАБЛИЦА 3

$d(x)$	$d(y)$	$d(z)$	$M^*(f) - M(f)$	по правилу
5	10	≥ 10	$\frac{1}{2} + \frac{7}{5} + \frac{7}{5}$	R2, R4, R4
5	6–9	≥ 11	$\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2}$	R2, R4, R4
5	5	≥ 11	$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}$	R2в), R2в), R4
4	6–10	≥ 11	$\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2}$	R1, R4, R4
4	5	≥ 11	$\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2}$	R1, R2г), R4

2г) $r(f) = 3$. Теперь $M(f) = -3$. Пусть $f = xyz$, где $d(x) \leq d(y) \leq d(z)$. Если $d(x) \geq 6$, то каждая вершина дает 1 на f по правилу R4, а если $d(x) \leq 5$ и $d(y) \geq 11$, то и y и z дают не менее $\frac{3}{2}$ по правилу R4. Итак, можно считать, что $d(x) \leq 5$ и $d(y) \leq 10$. Ввиду отсутствия $(5, \leq 9, \leq 10)$ -, $(4, \leq 10, \leq 10)$ - и $(4, 4, \leq \Delta)$ -граней варианты с $d(x) = 4$ или 5 даны в табл. 3; в каждом из них $M^*(f) - M(f) \geq 3$.

ТАБЛИЦА 4

$d(y)$	$d(z^*) \geq 11$	$d(z^*) \leq 10$
6	$1 + 2$	$1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$
7 или 8	$\frac{5}{4} + \frac{7}{4}$	$\frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$
9	$\frac{4}{3} + \frac{5}{3}$	$\frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6}$
10	$\frac{7}{5} + \frac{8}{5}$	$\frac{7}{5} + \frac{3}{2} + \frac{1}{10}$

Остается рассмотреть случай $d(x) = 3$. Вспомним, что $d(y) \leq 10$. Поскольку $(3, \leq 5, \leq \Delta)$ - и $(3, \leq 10, \leq 12)$ -границ отсутствуют, должно быть $6 \leq d(y) \leq 10$ и $\Delta \geq d(z) \geq 13$, так что $\Delta \geq 12$. Если грань $f^* = z^*xy \dots$, смежная с f по ребру xy , имеет $d(z^*) \geq 11$, то грань z^*xz по лемме 1 является треугольником и по правилу R4 y и z дают f суммы, указанные во втором столбце табл. 4. Если $d(z^*) \leq 10$, то f^* – нетреугольник, поскольку $(3, \leq 10, \leq 10)$ -границ отсутствуют, и y, z по правилу R5 дают f суммы из третьего столбца табл. 4. Каждая из этих сумм равна 3 и, тем самым, теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Steinitz E. Polyhedron and Raumteilungen // Enzykl. Math. Wiss. 3 (Geometrie). Part 3AB. 1922. V. 12. P. 1–139.
- [2] Lebesgue H. Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 9. P. 27–43.
- [3] Бородин О. В. Строение и раскраска плоских графов. Дисс. ... д.ф.-м.н. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994.
- [4] Бородин О. В. Строение окрестности ребра в плоском графе и совместная раскраска вершин, ребер и граней // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 5. С. 35–47.
- [5] Иванов А. Б. Подуправильные многогранники // Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984. С. 463.
- [6] Kotzig A. Extremal polyhedral graphs // Proc. 2nd Intern. Conference on Combinatorial Math. New York, 1978. P. 569–570.
- [7] Бородин О. В. Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 1. С. 16–19.
- [8] Borodin O. V. Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. (to appear).
- [9] Borodin O. V. Cyclic degree and cyclic coloring of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1996. V. 23. № 3. P. 225–231.
- [10] Hornák M., Jendrol' S. Unavoidable sets of face types for planar maps // Discuss. Math. (to appear).
- [11] Borodin O. V., Woodall D. R. Cyclic degrees of 3-polytopes // SIAM J. Discrete Math. (to appear).
- [12] Бородин О. В. Совместное обобщение теорем Лебега и Кошига о комбинаторике плоских карт // Дискретная матем. 1991. Т. 3. № 4. С. 24–28.