Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Глуцук, Предельные множества на бесконечности поднятий на плоскость несамопересекающихся кривых на торе, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 667–679

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 04:12:27

УДК 517.91

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОДНЯТИЙ НА ПЛОСКОСТЬ НЕСАМОПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КРИВЫХ НА ТОРЕ

А. А. Глуцук

В статье доводится до конца описание множеств, фигурирующих в ее названии, начатое Д. В. Аносовым. Доказывается, что эти множества бывают четырех типов, и все эти типы реализуются.

Библиография: 6 названий.

В статье дается описание множеств направлений, по которым поднятие на плоскость несамопересекающейся кривой на торе может накапливаться к бесконечности.

Уточним терминологию.

Всюду, где не оговорено противное, кривая на поверхности – это образ непрерывного отображения полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ в поверхность. *Поднятием кривой Γ на торе $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$* называется кривая $\tilde{\Gamma}$ в $\mathbb{R}^2$, проектирующаяся на Γ при естественной проекции $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$. Любые два поднятия кривой на торе переводятся друг в друга параллельным переносом на вектор целочисленной решетки.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если поднятие несамопересекающейся кривой на торе уходит на бесконечность с ростом параметра кривой, то уход на бесконечность происходит вдоль определенного направления. Эта теорема была сформулирована А. Вейлем [1] и доказана Н. Маркли [2]. Ее аналог для других двумерных замкнутых ориентированных поверхностей был сформулирован в виде гипотезы Д. В. Аносовым и доказан В. И. Пупко [3]. Если поднятие осциллирует, т.е. неограничено и не уходит на бесконечность, то это, вообще говоря, не так (см. теорему 1).

Задача описания таких множеств направлений и ее обобщение для кривых на произвольной замкнутой поверхности были поставлены и частично исследованы Д. В. Аносовым (см. [4], [5]). Они возникли как обобщение аналогичного вопроса о поведении поднятий листов слоений с особенностями на поверхностях. Здесь завершено описание таких множеств направлений для кривых на торе.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для кривых на замкнутых поверхностях рода больше 1 полное описание аналогичных множеств не известно. В частности, не известно, какими могут быть направления ухода на бесконечность неосциллирующих (т.е. уходящих на бесконечность с ростом параметра) поднятий несамопересекающихся кривых на этих поверхностях.

Чтобы сформулировать основной результат, введем следующее

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00229а, фонда INTAS, грант № 93-0570, фонда “Pro-Mathematica” Французского математического общества и фонда CRDF.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Γ – кривая в $\mathbb{R}^2$. Точка $\alpha \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ называется ее *бесконечной предельной точкой*, если существует последовательность точек кривой Γ , уходящих на бесконечность и имеющих радиус-векторы с углами наклона, сходящимися к α . *Предельным множеством на бесконечности кривой Γ* называется множество ее бесконечных предельных точек. *Предельным множеством на бесконечности кривой на торе* называется предельное множество на бесконечности ее поднятия.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предельное множество на бесконечности кривой на торе замкнуто и не зависит от выбора ее поднятия.

Основным результатом статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Предельное множество на бесконечности несамопересекающейся кривой на торе может иметь только один из следующих типов:*

- 1) точка;
- 2) пара диаметрально противоположных точек;
- 3) дуга окружности длины не больше π ;
- 4) вся окружность.

Обратно, всякое подмножество окружности, имеющее один из типов 1)–4), является предельным множеством на бесконечности некоторой несамопересекающейся кривой на торе.

Ранее Д. В. Аносов [6] указал, что предельное множество на бесконечности несамопересекающейся кривой на торе либо имеет один из типов 1), 2), 4), либо является дугой окружности, либо парой диаметрально противоположных дуг (доказательство не опубликовано). В [5] он доказал, что всякое подмножество окружности каждого из типов 1), 2), 4) реализуется как предельное множество на бесконечности несамопересекающейся кривой на торе. Там же он сформулировал аналогичное утверждение о подмножествах типа 3) без доказательства.

1. Схема доказательства теоремы 1. Справедливость первой части теоремы 1 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $S \subset \mathbb{S}^1$ – замкнутое подмножество такое, что среди связных компонент множества $\mathbb{S}^1 \setminus S$ имеется дуга длины меньше π . Тогда множество S не может быть предельным множеством на бесконечности никакой несамопересекающейся кривой на торе.*

Лемма 1 доказывается в пунктах 1–3.

Для доказательства первой части теоремы 1 осталось заметить, что в силу леммы 1 дополнение к предельному множеству на бесконечности несамопересекающейся кривой на торе может быть либо пустым (тип 4)), либо дугой длины не меньше π (типы 1), 3)), либо парой диаметрально противоположных дуг длины π (тип 2)).

Справедливость второй части теоремы 1 вытекает из результата Д. В. Аносова [5] о реализации окружности как предельного множества и следующей леммы.

ЛЕММА 2. *Всякая дуга окружности длины не больше π реализуется как предельное множество на бесконечности некоторой несамопересекающейся кривой на торе.*

Лемма 2 доказывается в п. 4.

2. Схема доказательства леммы 1. Предположим, что точки $\alpha, \beta \in \mathbb{S}^1$ являются бесконечными предельными точками некоторой кривой Γ на торе и что они ограничивают дугу длины меньше π , не содержащую других бесконечных предельных точек. Мы покажем, что тогда кривая Γ пересекает себя. Это докажет лемму 1.

При доказательстве леммы 1 будем использовать следующее очевидное

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть Γ – кривая на торе, $\tilde{\Gamma}$ – ее поднятие. Кривая Γ является несамопересекающейся, если и только если таковой является $\tilde{\Gamma}$ и ни для какого сдвига g плоскости на ненулевой вектор целочисленной решетки кривые $\tilde{\Gamma}$ и $g\tilde{\Gamma}$ не пересекаются.

Справедливость леммы 1 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3. Пусть Γ – несамопересекающаяся неограниченная кривая в $\mathbb{R}^2$. Пусть α и β – ее бесконечные предельные точки, ограничивающие дугу L окружности длины меньше π , не содержащую других бесконечных предельных точек. Тогда существует сдвиг g на ненулевой вектор целочисленной решетки такой, что кривые Γ и $g\Gamma$ пересекаются.

3. Доказательство леммы 3. Пусть Γ, α, β, L – такие, как в лемме 3. Для доказательства последней будет построен отрезок $[A, B]$ с вершинами на Γ , параллельный и равный по длине вектору целочисленной решетки. Тогда сдвиг g плоскости на этот вектор является искомым.

Пусть a и b – лучи с началом в точке O и углами наклона α, β соответственно. В силу условия леммы 3 лучи a и b не лежат на одной прямой. Существует прямая l , проходящая через пару различных узлов A', B' целочисленной решетки и пересекающая оба луча. Фиксируем такую прямую l . Покажем, что отрезок $[A, B]$ из предыдущего абзаца можно выбрать параллельным и равным по длине отрезку $[A', B']$. Для этого мы вначале докажем, что существует прямая (достаточно удаленная от точки O), параллельная l и отсекающая от кривой Γ дугу с вершинами C и D так, что длина отрезка $[C, D]$ не меньше длины отрезка $[A', B']$ (предложение 1 и рис. 1). Затем покажем, что на дуге $CD \subset \Gamma$ существует искомая пара точек A и B (лемма 4).

Таким образом, справедливость леммы 3 вытекает из следующих двух утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\Gamma, \alpha, \beta, a, b$ – такие, как в первом абзаце доказательства леммы 3, l – прямая, пересекающая лучи a и b . Для любого $M > 0$ существует пара точек C и D кривой Γ такая, что

- 1) прямые l и CD параллельны;
- 2) дуга CD кривой Γ лежит в одной (замкнутой) полуплоскости относительно прямой CD ;
- 3) длина отрезка $[C, D]$ не меньше M (рис. 1).

Предложение 1 доказывается ниже.

ЛЕММА 4. Пусть связанная кривая в $\mathbb{R}^2$ с концами C и D лежит в одной (замкнутой) полуплоскости относительно прямой CD . Тогда для любого положительного d , не превосходящего длины отрезка $[C, D]$, существует отрезок $[A, B]$ длины d с вершинами на кривой, параллельный прямой CD (рис. 2).

Лемма 4 в неявном виде содержится в [5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть d – длина отрезка $[A', B']$, $M > d$. Кривая Γ , прямая l и лучи a, b удовлетворяют условию предложения 1. Пусть C, D – соответствующая пара точек из предложения 1. Длина отрезка $[C, D]$ не меньше M . Дуга CD

Рис. 1

Рис. 2

кривой Γ и число d удовлетворяют условию леммы 4. Соответствующий отрезок $[A, B]$ из последней является искомым. Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $\Gamma, \alpha, \beta, a, b, l, M$ — такие, как в предложении 1. Докажем существование точек C и D , удовлетворяющих утверждению предложения 1. По условию кривая Γ не имеет бесконечных предельных точек, отвечающих лучам, лежащим между a и b . (Такие точки принадлежат дуге L из леммы 3.) Пусть q и f — лучи с началом в точке O , лежащие между a и b так, что луч q лежит между a и f (рис. 3). Пусть W — сектор, ограниченный лучами q и f (с углом, меньшим π). Существует круг $U \subset \mathbb{R}^2$ такой, что область $W \setminus U$ не содержит точек кривой Γ . Действительно, в противном случае кривая Γ имела бы бесконечную предельную точку, отвечающую лучу, лежащему в замыкании сектора W . Это противоречило бы сказанному в начале абзаца. Фиксируем такой круг U .

Рис. 3

Пусть l' — прямая, параллельная l , пересекающая лучи a и b и не пересекающая круг U ; C' и D' — точки ее пересечения с лучами q и f соответственно. Выберем l' , достаточно удаленную от точки O , так, чтобы длина отрезка $[C', D']$ была больше M . Покажем, что существуют точки C и D кривой Γ , лежащие на l' по разные стороны от отрезка $[C', D']$, так, что дуга CD кривой лежит в одной полуплоскости относительно прямой l' . Тогда точки C и D искомые.

Прямая l' и кривая Γ не пересекаются в точках отрезка $[C', D']$ по построению. Пусть Σ — множество точек пересечения $l' \cap \Gamma$, отделенных от точки D' точкой C' на прямой l' , Δ — множество точек из $l' \cap \Gamma$, отделенных от точки C' точкой D' на l' . По построению

$l' \cap \Gamma = \Sigma \cup \Delta$. Множество Σ непусто. Действительно, в противном случае Γ лежала бы в области, содержащей точку O и ограниченной лучами $D'C'$ и f . Тогда точка α , отвечающая лучу a , не могла бы быть бесконечной предельной точкой для Γ . Это противоречило бы условию предложения 1. Аналогично, Δ непусто. Пусть $C \in \Sigma$, $D \in \Delta$ таковы, что дуга CD кривой Γ не содержит других точек из $l' \cap \Gamma$. Точки C и D искомые. Предложение 1 доказано.

4. Реализация дуги окружности. Для кривой Γ через $\sigma(\Gamma)$ будем обозначать ее предельное множество на бесконечности.

Изложим схему и мотивировку доказательства леммы 2.

Пусть L – дуга окружности длины не больше π . Построим несамопересекающуюся кривую Γ на торе с $\sigma(\Gamma) = L$.

Введем вначале следующие обозначения.

Пусть α, β – граничные точки дуги L . Будем их отождествлять с точками полуинтервала $[0, 2\pi)$ и при этом считать, что $\alpha < \beta$. Тогда дуга L отождествляется с отрезком $[\alpha, \beta]$. Пусть a, b – лучи, выходящие из начала координат, с углами наклона α и β соответственно. Пусть S – сектор, ограниченный ими (заполненный лучами, отвечающими точкам дуги L).

Вначале дадим мотивировку построения кривой Γ . Легко построить самопересекающуюся кривую на торе с любым наперед заданным (замкнутым) предельным множеством на бесконечности. Для этого достаточно взять произвольную кривую на плоскости с тем же свойством и спроектировать ее на тор.

Пусть Γ' – некоторая кривая на торе с началом $A_0 = O$ и заданным предельным множеством на бесконечности. Модифицируем ее так, чтобы получить несамопересекающуюся кривую. Без ограничения общности будем считать, что Γ' имеет только двойные точки трансверсального самопересечения. Этого можно добиться ее малым шевелением. Разобьем кривую на несамопересекающиеся дуги. Пусть A_0A_1 – первая из них, а A_1A_2 – соседняя с ней. Вообще говоря, A_0A_1 и A_1A_2 пересекаются.

Покажем, как продеформировать дугу A_0A_2 в дугу без самопересечений.

Искомая деформация будет сохранять начальную дугу A_0A_1 и точку A_2 . Она состоит из шагов, описанных в следующем абзаце, устраняющих последовательно точки пересечения (описание этой деформации содержится в [5] с тем различием, что мы последовательно устраняем самопересечения по одному, а в [5] устраняются сразу все самопересечения дуги A_0A_2).

Пусть $C \in A_0A_1$ – та из точек пересечения, которая отвечает минимально возможному значению параметра дуги A_0A_1 , Ω_ε есть ε -окрестность дуги A_0C . Выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым так, чтобы Ω_ε не пересекала себя (т.е. была односвязной) и пересекала A_1A_2 по дуге, содержащей C . Обозначим эту дугу через B_1B_2 (рис. 4). Пусть $\Omega'_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ – подобласть, ограниченная дугой B_1B_2 и содержащая точку A_0 . Произоформируем дугу B_1B_2 (сохраняя ее концы) по множеству Ω'_ε так, чтобы получить дугу, не пересекающую A_0A_1 (рис. 4). Новая дуга A_1A_2 получается из исходной в результате замены старой дуги B_1B_2 на новую. Число ее точек пересечения с A_0A_1 на 1 меньше, чем у старой дуги A_1A_2 .

Повторяя этот шаг последовательно для всех точек пересечения $A_0A_1 \cap A_1A_2$, получим дугу A_1A_2 , изотопную исходной и не пересекающуюся с A_0A_1 .

Проведем эту процедуру последовательно для всех дуг разбиения кривой Γ' . Получим новую кривую (обозначим ее через Γ). Кривая Γ не имеет самопересечений. Если на каждом шагу ε выбиралось достаточно малым, то $\sigma(\Gamma) \subset \sigma(\Gamma')$. В [5] описанная

процедура применялась к кривой Γ' с $\sigma(\Gamma') = \mathbb{S}^1$; значит, в этом случае и $\sigma(\Gamma) = \mathbb{S}^1$. Вообще говоря, предельные множества на бесконечности старой и новой кривых не будут совпадать.

Нам нужно построение, которое позволило бы контролировать $\sigma(\Gamma)$ не только сверху, но и снизу.

Рис. 4

Рис. 5

Для доказательства леммы 2 будет построена ломаная $\Gamma' \subset S$ с $\sigma(\Gamma') = L$, для которой будет доказано, что из ее проекции $p(\Gamma')$ похожей последовательностью модификаций, не уменьшающих предельное множество на бесконечности и не выводящих поднятие за пределы сектора S , можно получить несамопересекающуюся кривую на торе. Это будет искомая кривая: ее предельное множество на бесконечности будет совпадать с L . Каждая из модификаций либо является шагом процедуры, описанной выше (см. рис. 4), устраняющим одну точку самопересечения, либо устраняет, как минимум, пару точек самопересечения, ограничивающих изотопные дуги (см. рис. 5). На рисунке это точки C_1 и C_2 пересечения дуг A_0A_1 и A_1A_2 ; дуга $B_1B_2 \subset A_1A_2$ содержит дугу $C_1C_2 \subset A_1A_2$; модификация состоит в замене дуги B_1B_2 на кривую (выделенную пунктиром), “обходящую” дугу $C_1C_2 \subset A_0A_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть дуги $A_0A_1, A_1A_2 \subset \mathbb{T}^2$ и точка C их пересечения такие, как в начале п. 4, $\widetilde{A_0A_1}, \widetilde{A_1A_2}$ – их поднятия, пересекающиеся в точке $\tilde{C}$, проектирующейся в C . Применение к A_1A_2 шага изотопии, описанного выше, устраняющего точку C пересечения $A_0A_1 \cap A_1A_2$, означает применение аналогичной модификации к ее поднятию $\widetilde{A_1A_2}$, устраняющей точку $\tilde{C}$ пересечения последнего с $\widetilde{A_0A_1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть L, α, β, S такие, как в начале п. 4, $\Gamma \subset S$ – кривая с несамопересекающейся проекцией такая, что $\alpha, \beta \in \sigma(\Gamma)$. Тогда $\sigma(\Gamma) = L$. Это следует из уже доказанной первой части теоремы 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямая называется *иррациональной*, если она не проектируется в замкнутую кривую на торе. Отрезок (луч) называется *иррациональным*, если таковой является соответствующая прямая.

Справедливость леммы 2 вытекает из замечания 6 и следующей леммы.

ЛЕММА 5. Пусть $L, \alpha, \beta, a, b, S$ такие, как в начале п. 4. Существуют ломаная $\Gamma' \subset S$ с началом $A_0 = 0$ и последовательными вершинами $A_1, A_2, \dots$ и кривая $\tilde{\Gamma} \subset S$ с тем же началом, содержащая все вершины ломаной Γ' , со следующими свойствами:

- 1) последовательность вершин A_i уходит на бесконечность, причем лучи A_0A_{2i+1} стремятся к a , а лучи A_0A_{2i} – к b ;

- 2) лучи $A_i A_{i+1}$ иррациональны и содержатся в S ;
- 3) ломаная $A_0 \dots A_i$ и дуга $A_0 A_i \subset \tilde{\Gamma}$ содержатся в секторе с вершиной A_i , ограниченном прямыми $A_{i-1} A_i, A_i A_{i+1}$;
- 4) кривая $\Gamma = p(\tilde{\Gamma})$ несамопересекающаяся (рис. 6).

Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Кривая Γ из леммы 5 является искомой. Действительно, она не имеет самопересечений. В силу свойства 1) ломаной Γ' $\alpha, \beta \in \sigma(\tilde{\Gamma})$. Тем самым, $\sigma(\Gamma) = \sigma(\tilde{\Gamma}) = L$ (замечание 6). Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Будем последовательно строить вершины A_j ломаной Γ' вместе с дугами $A_{j-1} A_j$ кривой $\tilde{\Gamma}$. Выберем произвольную точку $A_1 \in \text{Int } S$ так, чтобы прямая $A_0 A_1$ была иррациональной. В качестве дуги $A_0 A_1$ кривой $\tilde{\Gamma}$ выберем отрезок $[A_0, A_1]$ (ориентированный от A_0 к A_1). Выберем точку A_2 произвольно так, чтобы луч $A_1 A_2$ был иррациональным, содержался в S и не был параллельным граничным лучам a, b и $p(A_2) \notin p[A_0, A_1]$. Построим дугу $A_1 A_2$ кривой $\tilde{\Gamma}$. Для этого рассмотрим кривую, составленную из проекций отрезков $[A_0, A_1], [A_1, A_2]$ (ориентированную от $p(A_0)$ к $p(A_2)$). Вообще говоря, она имеет точки самопересечения. Последние суть точки пересечения $p[A_0, A_1] \cap p[A_1, A_2]$. Проекция $p(A_1 A_2)$ искомой дуги $A_1 A_2$ получается из дуги $p[A_1, A_2]$ последовательностью изотопий, описанной в начале п. 4 (устраняющей эти точки пересечения): вместо точек A_i из начала п. 4 подставляются точки $p(A_i)$ (искомая дуга $A_1 A_2$ есть поднятие кривой $p(A_1 A_2)$ с началом A_1). Рассмотрим кривую $A_0 A_2$, составленную из отрезка $[A_0, A_1]$ и построенной дуги $A_1 A_2$. Она имеет несамопересекающуюся проекцию по построению. Эта кривая лежит в S , если только при изотопиях все ε выбирались достаточно малыми. Действительно, рассмотрим параллелограмм Π_2 , тремя последовательными вершинами которого являются A_0, A_1, A_2 (рис. 6). По построению $\Pi_2 \in S$. Покажем, что рассматриваемая кривая $A_0 A_2$ лежит в Π_2 .

Каждый шаг последовательности изотопий дуги $p[A_1, A_2]$ не выводит ее поднятие с началом A_1 из параллелограмма Π_2 , если только ε выбирается достаточно малым. Докажем это с использованием замечания 5. С учетом последнего достаточно показать, что всякое поднятие отрезка $p[A_0, A_1]$ (отличное от $[A_0, A_1]$), пересекающее $[A_1, A_2]$,

обладает следующими свойствами:

- 1) его точка пересечения с $[A_1, A_2]$ лежит в интервале (A_1, A_2) ;
- 2) эта точка делит поднятие на две части;
- 3) начальная из этих частей (в смысле ориентации поднятия, индуцированной выбранной ориентацией отрезка $[A_0, A_1]$) лежит в Π_2 и не пересекает его границы вне своего конца.

Это следует из того, что всякое поднятие отрезка $p[A_0, A_1]$ получается сдвигом отрезка $[A_0, A_1]$ на целочисленный вектор, из иррациональности отрезков $[A_0, A_1]$, $[A_1, A_2]$ и из условия $p(A_2) \notin p[A_0, A_1]$. Это доказывает утверждение, сформулированное в начале абзаца.

Итак, мы построили вершины A_0, A_1, A_2 и дугу $A_0A_2 \subset \Pi_2$. При этом точку A_2 можно было изначально выбрать сколь угодно удаленной от A_0 , а угол наклона луча A_1A_2 сколь угодно близким к β .

Построим теперь точку A_3 и дугу A_2A_3 . Пусть $r \subset S$ — иррациональный луч с началом A_2 такой, что соответствующая прямая пересекает Π_2 только в точке A_2 , а ее проекция пересекает проекцию $p(A_0A_2)$ дуги A_0A_2 трансверсально. Выберем вначале точку $A_3 \in r \setminus A_2$ произвольно так, чтобы $p(A_3)$ не лежала в $p(A_0A_2)$. Обозначим через Π_3 параллелограмм с противоположными вершинами A_0, A_3 и сторонами, параллельными прямым A_1A_2, A_2A_3 (рис. 6). Очевидно, $\Pi_2 \subset \Pi_3 \subset S$.

Как показывается ниже (лемма 6), для любого луча r такого, как в предыдущем абзаце, произвольно заданная дуга $A_0A_2 \subset \Pi_2$ с несамопересекающейся проекцией продолжается до дуги $A_0A_3 \subset \Pi_3$ с тем же свойством, если только точка A_3 выбрана подходящим образом; при этом последняя может быть выбрана сколь угодно удаленной от A_0 (а угол наклона луча $r = A_2A_3$ сколь угодно близким к α). Далее аналогично строим точку A_4 , параллелограмм Π_4 и аналогично продолжаем дугу A_0A_3 , и т.д. При этом точку A_j на каждом шагу будем выбирать удаленной от A_0 на расстояние больше, чем j , так, что угол наклона луча $A_{j-1}A_j$ отличается от α при нечетном j (соответственно от β при четном j) меньше, чем на $1/j$. В результате получим искомые ломаную Γ' и кривую $\tilde{\Gamma}$, составленную из построенных дуг $A_{j-1}A_j$.

Тем самым, справедливость леммы 5 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 6. Пусть Π_2 — параллелограмм с противоположными вершинами A_0, A_2 , $\Gamma_0 \subset \Pi_2$ — кривая с началом A_0 , концом A_2 и несамопересекающейся проекцией. Пусть r — иррациональный луч с началом A_2 , R — содержащая его прямая. Пусть R не пересекает Π_2 в точках, отличных от A_2 , а ее проекция $p(R)$ пересекает кривую $p(\Gamma_0)$ трансверсально. Существует точка $A_3 \in r$, сколь угодно удаленная от A_0 , со следующим свойством. Обозначим через Π_3 параллелограмм, содержащий Π_2 , с противоположными вершинами A_0, A_3 и сторонами, параллельными r и одной из сторон параллелограмма Π_2 (рис. 7). Существует кривая $\Gamma_1 \subset \Pi_3$ с началом A_2 и концом A_3 такая, что кривая, составленная из Γ_0 и Γ_1 , имеет несамопересекающуюся проекцию.

На самом деле, утверждение леммы справедливо без предположения трансверсальности пересечения проекции $p(R)$ с кривой $p(\Gamma_0)$. Доказательство леммы, приведенное здесь, переносится на этот случай с очевидными изменениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Pi_2, A_0, A_2, \Gamma_0, r$ такие, как в лемме 6. Построим кривую Γ_1 , удовлетворяющую утверждению этой леммы.

Рис. 7

Мы ищем кривую Γ_1 с началом A_2 и концом $A_3 \in r \setminus A_2$ такую, что кривая, составленная из Γ_0 и Γ_1 , имеет несамопересекающуюся проекцию. Это справедливо, если и только если проекция кривой Γ_1 не имеет самопересечений и не пересекается с $p(\Gamma_0)$ (кривая $p(\Gamma_0)$ несамопересекающаяся по условию). Это означает, что кривая Γ_1 не пересекает Γ_0 вне своего начала и не пересекает поднятий кривой $p(\Gamma_0)$, отличных от Γ_0 . Обозначим объединение этих поднятий через V .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Множество V есть несвязное объединение кривых, получаемых из Γ_0 сдвигами на ненулевые целочисленные векторы.

Искомая кривая Γ_1 не пересекает множество V и лежит в параллелограмме P_3 . Это означает, что точка A_3 должна обладать следующим свойством:

- (*) точки A_2 и A_3 лежат в одной связной компоненте множества $P_3 \setminus V$, т.е. могут быть соединены кривой в $P_3 \setminus V$.

(Вообще говоря, произвольная кривая в $P_3 \setminus V$, соединяющая такие A_2 и A_3 , может иметь самопересекающуюся проекцию.)

Для доказательства леммы 6 мы покажем (в конце статьи), что точку $A_3 \in r \setminus A_2$ со свойством (*) можно выбрать сколь угодно удаленной от A_0 . Ниже для произвольной такой точки A_3 мы построим кривую $\Gamma_1 \subset P_3 \setminus V$ с несамопересекающейся проекцией, соединяющую ее с точкой A_2 . Это докажет лемму 6: построенная кривая будет искомой.

Прежде чем строить кривую Γ_1 , приведем более удобную формулировку свойства (*). Для этого введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В условиях леммы 6 пусть $A_3 \in r \setminus A_2$, P_3 – соответствующий параллелограмм. Обозначим через W объединение связных компонент множества $P_3 \cap V$, содержащих точки отрезка $[A_2, A_3]$ (рис. 7).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В условиях определения свойство (*) эквивалентно тому, что множество W не пересекает границы параллелограмма P_3 вне интервала (A_2, A_3) .

Построение кривой Γ_1 в условии (*). В условиях леммы 6 пусть точка $A_3 \in r \setminus A_2$ обладает свойством (*). Опишем построение кривой Γ_1 , удовлетворяющей утверждению леммы 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. В условиях леммы 6 для всякой точки $A_3 \in r \setminus A_2$ соответствующее множество W из предыдущего определения есть несвязное объединение конечного числа кривых $\tilde{\varphi}_i \subset \Pi_3$, проектирующихся на дуги φ_i кривой $p(\Gamma_0)$. В случае, если A_3 обладает свойством (*), каждая из кривых $\tilde{\varphi}_i$ не пересекает границы параллелограмма Π_3 вне своих граничных точек и имеет один из следующих двух типов:

- а) кривая имеет начало внутри параллелограмма Π_3 , а конец – на интервале (A_2, A_3) ;
- б) кривая имеет и начало, и конец на интервале (A_2, A_3) .

Заметим, что если образ $g\Gamma_0$ кривой Γ_0 при параллельном переносе g кончается внутри Π_3 , то весь параллелограмм $g\Pi_2$, а тем более $g\Gamma_0$, не пересекается с r .

Пусть $A_3 \in r \setminus A_2$ обладает свойством (*). Построим кривую Γ_1 . Для этого рассмотрим отрезок $[A_2, A_3]$. По построению он имеет несамопересекающуюся проекцию (луч r иррационален). Вообще говоря, его проекция пересекает кривую $p(\Gamma_0)$. Точки пересечения отвечают граничным точкам кривых $\tilde{\varphi}_i$ из замечания 9, лежащим на (A_2, A_3) . Положим вначале $\Gamma_1 = [A_2, A_3]$. Сейчас мы опишем такую модификацию кривой Γ_1 , что проекция модифицированной кривой не будет пересекать ни себя, ни $p(\Gamma_0) \setminus p(A_2)$. Новая кривая Γ_1 будет искомой.

Рассмотрим вначале случай, когда все кривые $\tilde{\varphi}_i$ из замечания 9 имеют тип а). Это означает, что исходная кривая $\Gamma_1 = [A_2, A_3]$ пересекает каждое из поднятий кривой Γ_0 (отличное от Γ_0) не более чем в одной точке. Последняя разбивает поднятие на две дуги. Начальная из этих дуг есть некоторая из кривых $\tilde{\varphi}_i$; она лежит в Π_3 и не пересекает его границы в точке, отличной от своего конца. Искомая кривая Γ_1 получается из исходной изотопиями в окрестностях кривых $\tilde{\varphi}_i$. А именно, к $p(\Gamma_1)$ применяется последовательность изотопий, описанная в начале п. 4 (с подстановкой кривой $p(\Gamma_0)$ вместо дуги A_0A_1 и $p(\Gamma_1)$ вместо A_1A_2). Выбирая ϵ на каждом шагу достаточно малым, можно добиться того, что поднятие Γ_1 новой кривой $p(\Gamma_1)$ с началом A_2 не выйдет за пределы параллелограмма Π_3 . Это следует из замечания 5 и свойств исходной кривой Γ_1 и кривых $\tilde{\varphi}_i$ из начала абзаца.

Рассмотрим теперь общий случай, когда некоторые из кривых $\tilde{\varphi}_i$ в замечании 9 имеют тип б). Тогда искомая кривая Γ_1 получается из исходной последовательными изотопиями в окрестностях кривых $\tilde{\varphi}_i$ типа а) и областей, отсекаемых от параллелограмма Π_3 кривыми $\tilde{\varphi}_i$ типа б). Эта последовательность изотопий описана ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Пусть $A_3 \in r \setminus A_2$ обладает свойством (*), $\tilde{\varphi}_i$ – соответствующие кривые из замечания 9. Проекции $\varphi_i \subset p(\Gamma_0)$ кривых $\tilde{\varphi}_i$ попарно не перекрываются. Это означает, что для любых $\varphi_i \neq \varphi_j$ либо $\varphi_i \cap \varphi_j = \emptyset$, либо одна из этих дуг содержится в другой (в последнем случае либо одна содержится внутри другой, либо дуги имеют общее начало $p(A_0)$). Действительно, покажем, что это справедливо для соответствующих дуг кривой Γ_0 , проектирующихся на φ_i (обозначим эти дуги через β_i). Пусть $h \neq 0$ – линейная функция на плоскости, обращающаяся в нуль на луче r . Дуги β_i суть связные компоненты множеств $h \leq c$. Последние вложены друг в друга. Отсюда и из трансверсальности пересечения луча r с поднятиями кривой $p(\Gamma_0)$ (эквивалентной трансверсальности пересечения $p(r) \cap \Gamma_0$) следует доказываемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В условиях предыдущего замечания кривые φ_i , отвечающие кривым $\tilde{\varphi}_i$ типа а), имеют начало $p(A_0)$. Никакая из кривых φ_i , отвечающих кривым $\tilde{\varphi}_i$ типа б), не содержит кривых φ_i , отвечающих кривым типа а).

Среди кривых $\tilde{\varphi}_i$ типа б) выберем произвольную кривую, проекция которой минимальна, т.е. не содержит других кривых φ_i . Обозначим эту кривую через $\tilde{\varphi}$, а ее про-

екцию – через φ . По построению φ пересекает $p(\Gamma_0)$ только в своих концах; обозначим их через C_1, C_2 . Дуги φ и $C_1C_2 \in \Gamma_1$ изотопны в классе дуг с концами C_1, C_2 . Модифицируем кривую Γ_1 так, чтобы устранить как минимум точки C_1, C_2 пересечения $p(\Gamma_1) \cap p(\Gamma_0)$. Эта модификация есть поднятие изотопии кривой $p(\Gamma_1)$ с неподвижными концами; изотопия изображена на рис. 5. Результат последней состоит в замене дуги $B_1B_2 \subset \Gamma_1$, содержащей $C_1C_2 \subset \Gamma_1$, на кривую (выделенную пунктиром), обходящую φ . Точнее, обозначим через Ω_ε ε -окрестность дуги φ , где ε достаточно мало, так что Ω_ε односвязна и пересекает кривую $p(\Gamma_0)$ по дуге, а кривую $p(\Gamma_1)$ – по паре дуг, содержащих точки C_1 и C_2 (рис. 5). Пусть B_1B_2 – дуга кривой $p(\Gamma_1)$, содержащая φ внутри себя, такая, что дуги B_1C_1, C_2B_2 не пересекаются и содержатся в Ω_ε . Существует несамопересекающаяся кривая $\varphi' \subset \Omega_\varepsilon$, соединяющая точки B_1, B_2 и не пересекающая ни $p(\Gamma_0)$, ни $p(\Gamma_1)$ в других точках. Эта кривая изотопна дуге $B_1B_2 \subset p(\Gamma_1)$. Заменяем последнюю на φ' . В результате получим новую кривую $p(\Gamma_1)$ и ее поднятие Γ_1 с началом A_2 . Новая кривая Γ_1 лежит в Π_3 , если только ε выбрано достаточно малым так же, как и в рассмотренном ранее частном случае отсутствия кривых $\tilde{\varphi}_i$ типа б). Это следует из того, что новая кривая Γ_1 получается из старой с помощью изотопии, аналогичной описанной выше: вместо $p(\Gamma_1)$ подставляется кривая Γ_1 , а вместо дуги φ – кривая $\tilde{\varphi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В условиях предыдущего абзаца шаг модификации кривой Γ_1 , описанный там же, устраняет не только точки C_1 и C_2 пересечения $p(\Gamma_1) \cap p(\Gamma_0)$, но и все точки пересечения, лежащие на дуге $C_1C_2 \subset p(\Gamma_1)$.

Продолжая эту процедуру последовательно для всех кривых типа б) (см. замечание 11), мы получим новую кривую $\Gamma_1 \subset \Pi_3$. Точки пересечения ее проекции с $p(\Gamma_0)$ отвечают концам некоторых кривых типа а) (см. замечание 12). Применим к новой кривой $p(\Gamma_1)$ последовательность изотопий из начала п. 4 так же, как и при рассмотрении предыдущего случая. Аналогично, выбирая ε на каждом шагу достаточно малым, можно добиться, чтобы ее поднятие Γ_1 не выходило за пределы параллелограмма Π_3 . В результате получим кривую $p(\Gamma_1)$, поднятие которой с началом A_2 есть искомая кривая Γ_1 .

Существование точек A_3 со свойством ().* Теперь осталось показать, что точку $A_3 \in r \setminus A_2$ со свойством (*) можно выбрать сколь угодно удаленной от A_0 .

Вначале приведем более удобную формулировку свойства (*). Для этого сделаем следующие два замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. В условиях леммы 6 пусть A_1A_2 – сторона параллелограмма Π_2 такая, что прямая A_1A_2 разделяет точку A_0 и луч r . Пусть $A_3 \in r \setminus A_2$, Π_3 – соответствующий параллелограмм, Q – его вершина такая, что его сторона A_0Q параллельна r . Тогда его сторона QA_3 параллельна A_1A_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 14. В условиях предыдущего замечания пусть $p(A_3) \notin p(\Gamma_0)$. Пусть W – множество, соответствующее точке A_3 . Множество W не пересекает границы параллелограмма Π_3 вне полуинтервалов (A_2, A_3) и (Q, A_3) . Действительно, рассмотрим криволинейный четырехугольник Π , ограниченный кривой Γ_0 , отрезком $[A_2, A_3]$ и сторонами A_0Q, QA_3 параллелограмма Π_3 . Имеет место включение $\Pi \subset \Pi_3$. Поэтому достаточно доказать утверждение замечания с заменой Π_3 на Π . По определению $W \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Множество W не пересекает прямой A_0Q . Действительно, каждая из кривых $\tilde{\varphi}_i$, составляющих множество W , есть дуга кривой (обозначим последнюю через Γ'_0), получаемой сдвигом кривой Γ_0 на ненулевой целочисленный вектор и пересекающей прямую $R = A_2A_3$. Кривая Γ'_0 не пересекает прямую A_0Q . Действительно, иначе

она пересекала бы пару параллельных прямых A_2A_3, A_0Q . Это невозможно: кривая Γ_0 , получаемая из Γ'_0 сдвигом на целочисленный вектор, лежит в полосе, ограниченной ими. Это следует из условия леммы 6. Следовательно, Γ'_0 должна лежать в образе этой полосы при сдвиге; и если бы Γ'_0 пересекала эти прямые, то соответствующая сдвинутая полоса содержала бы исходную. Это означало бы, что обе полосы совпадают. С другой стороны, исходная полоса не инвариантна ни для какого сдвига на ненулевой целочисленный вектор: прямые, ограничивающие ее, иррациональны.

Итак, (*) справедливо, если и только если W не пересекает стороны QA_3 . Построим точку A_3 с этим свойством и покажем, что ее можно выбрать сколь угодно удаленной от точки A_0 .

Для построения точки A_3 выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и построим вспомогательное поднятие $\Gamma'_0 \neq \Gamma_0$ кривой $p(\Gamma_0)$, пересекающее луч r в единственной точке (обозначим последнюю через C , а начало и конец кривой Γ'_0 через A'_0 и A'_2 соответственно), и точку $A_3 \in r \setminus [A_2, C]$, обладающие следующими свойствами:

- 1) точка A'_0 находится на расстоянии меньше ε от прямой A_0Q , параллельной r (см. замечание 13);
- 2) кривые Γ'_0 и Γ_0 лежат в одной полуплоскости относительно соответствующей прямой QA_3 из замечания 13, построенной по точке A_3 ;
- 3) никакое поднятие кривой $p(\Gamma_0)$, отличное от Γ'_0 , не пересекает отрезка $[C, A_3]$ (рис. 8).

Существование таких Γ'_0 и A_3 при любом $\varepsilon > 0$, сколь угодно удаленных от A_0 , вытекает из иррациональности луча r и доказывается в следующем абзаце. Тогда точка A_3 обладает свойством (*), если только ε достаточно мало. Действительно, при малых ε соответствующее множество W не пересекает стороны QA_3 соответствующего параллелограмма Π_3 : оно состоит из дуги $A'_0C \subset \Gamma'_0$, не пересекающей прямой QA_3 в силу свойства 2), и кривых $\tilde{\varphi}_i$, содержащих точки интервала (A_2, C) . Эти кривые содержатся в Π_3 и не пересекают его границы вне интервалов (A_2, C) , (Q, A_3) (замечание 14 и свойство 3)). Покажем, что никакая из них не пересекает стороны QA_3 , если ε выбрано достаточно малым. Рассмотрим прямую, параллельную QA_3 и проходящую через точку A'_0 . Она пересекает прямую A_0Q . Пусть I_ε – ее отрезок, ограниченный точкой их пересечения и A'_0 (рис. 8). Через I обозначим кривую, составленную из I_ε и дуги $A'_0C \subset \Gamma'_0$. Кривая I разбивает Π_3 на две области: одна из них содержит интервал (A_2, C) , а другая – сторону QA_3 . Поэтому достаточно показать, что $\tilde{\varphi}_i$ не пересекают I . Кривые $\tilde{\varphi}_i$ не пересекают Γ'_0 , так как поднятия несамопересекающейся кривой $p(\Gamma_0)$ не пересекают друг друга. Если ε достаточно мало, то $\tilde{\varphi}_i$ не пересекают I_ε . Действительно, с одной стороны, расстояния между поднятиями кривой $p(\Gamma_0)$ равномерно ограничены снизу. С другой стороны, длина отрезка I_ε стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это следует из свойства 1) кривой Γ'_0 . Тем самым, если ε меньше минимального из расстояний между поднятиями кривой $p(\Gamma_0)$, то никакая из кривых $\tilde{\varphi}_i$ не пересекает I_ε .

Докажем теперь существование поднятия Γ'_0 , пересекающего луч r в единственной точке, и точки A_3 со свойствами 1)–3), сколь угодно удаленных от A_0 . Вначале докажем существование поднятия со свойством 1) (в формулировку которого не входит точка A_3). Затем покажем, что если ε выбрано достаточно малым, то для такого поднятия и некоторой точки A_3 выполнены свойства 2), 3).

Свойство 1) эквивалентно тому, что расстояние от конца A'_2 кривой Γ'_0 до прямой R меньше ε : это расстояние равно расстоянию из свойства 1), так как Γ'_0 получается параллельным переносом кривой Γ_0 , имеющей начало A_0 и конец $A_2 \in R$. Для всякого

Рис. 8

Рис. 9

$\varepsilon > 0$ существует поднятие Γ'_0 со свойством из начала абзаца. Это следует из всюду плотности луча $p(r)$ на торе (иррациональность луча r). По этой же причине и в силу трансверсальности пересечения кривой Γ_0 с прямой R такое поднятие можно выбрать пересекающим луч r в единственной точке и сколь угодно удаленным от A_0 (рис. 9). Трансверсальность пересечения Γ_0 с R следует из условия леммы 6, поскольку $\Gamma_0 \subset \Pi_2$. Если кривая Γ'_0 такая, как в начале абзаца, построена по достаточно малому ε , то существует точка $A_3 \in r \setminus A_2$ со свойствами 2), 3). Действительно, рассмотрим прямую, параллельную прямой A_1A_2 и проходящую через точку A'_2 . Пусть A'_3 – точка ее пересечения с лучом r . Пусть ε достаточно мало, так что 2ε -окрестность точки $p(A_2)$ пересекает кривую $p(\Gamma_0)$ по единственной дуге (рис. 9). Тогда аналогичная окрестность точки A'_2 не пересекает поднятий кривой $p(\Gamma_0)$, отличных от Γ'_0 . Искомая точка A_3 получается сдвигом точки A'_3 на расстояние меньше ε в направлении луча r . Эта точка обладает свойствами 2), 3) по построению. Лемма 6 полностью доказана. Лемма 5 также доказана.

Я благодарен Д. В. Аносову, который привлек мое внимание к кругу вопросов о поведении на бесконечности поднятий несамопересекающихся кривых. Я также благодарен ему за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Weil A. Les familles de courbes sur le tore // Mat. Sb. Nov. Ser. 1936. V. 1. № 5. P. 779–781.
- [2] Markley N. G. The Poincaré–Bendixon theorem for the Klein bottle // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 135. P. 159–165.
- [3] Пупко В. И. О несамопересекающихся кривых на замкнутых поверхностях // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177. № 2. С. 272–274.
- [4] Аносов Д. В. О поведении траекторий на евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского, накрывающих траектории потоков на замкнутых поверхностях. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 51. № 1. С. 16–43.
- [5] Аносов Д. В. О поведении траекторий на евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского, накрывающих траектории потоков на замкнутых поверхностях. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 52. № 3. С. 451–478.
- [6] Anosov D. V. Flows on closed surfaces and behavior of trajectories lifted to the universal covering plane // J. Dynam. Control Systems. 1995. V. 1. № 1. P. 125–138.