Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Камынин, Э. Франчини, Об одной обратной задаче для параболического уравнения высокого порядка, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 680–691

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 08:57:47

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В. Л. Камынин, Э. Франчини

Установлены теоремы об однозначной разрешимости обратной задачи определения правой части параболического уравнения высокого порядка с двумя независимыми переменными. Дополнительное условие задается в форме интегрального переопределения. Дано приложение полученных результатов к исследованию предельного перехода в последовательности соответствующих обратных задач со слабо сходящимися коэффициентами.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. В работе рассматривается обратная задача определения пары функций $\{u(t, x), f(t)\}$, удовлетворяющих параболическому уравнению

$$(-1)^m D_t u + a(t, x) D_x^{2m} u + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t, x) D_x^j u = f(t)g(t, x) + h(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \quad (1)$$

граничным условиям

$$D_x^i u|_{x=0, l} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

и дополнительному условию интегрального переопределения

$$\int_0^l u(t, x)w(x) dx = \varphi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Здесь $m \geq 1$ – натуральное число, $Q_T = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$, функции $a(t, x), b_j(t, x), g(t, x), h(t, x), w(x), u_0(x), \varphi(t)$ заданы.

В первой части работы устанавливаются теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи (1)–(4), а во второй части дается приложение этих результатов к исследованию вопроса о предельном переходе в последовательности обратных задач вида (1)–(4) со слабо сходящимися коэффициентами.

Ранее обратные задачи для параболических уравнений с условием интегрального переопределения типа (4) изучались в работах [1]–[6] и др. для абстрактных уравнений в

банаховых пространствах и для уравнений второго порядка, где были доказаны теоремы об однозначной разрешимости рассматриваемых задач.

В настоящей работе мы рассматриваем обратную задачу для уравнения высокого порядка в недивергентной форме и с коэффициентами, зависящими от t , поэтому результаты и методы, имеющиеся в работах [1], [2] для абстрактных обратных задач неприменимы в нашем случае.

Техника доказательства теорем существования и единственности в нашей работе близка к технике работ [3]–[8], где исследовались аналогичные вопросы для параболических уравнений второго порядка и линеаризованных систем уравнений Навье–Стокса. Она базируется на априорных оценках решений соответствующей прямой задачи, полученных С. Н. Кружковым [9].

Мы даем два типа условий, достаточных для однозначной разрешимости задачи (1)–(4), причем во втором случае коэффициенты $a(t, x)$, $b_j(t, x)$ в уравнении (1) предполагаются только ограниченными и измеримыми, что позволяет использовать этот результат для доказательства теоремы о предельном переходе в последовательности обратных задач вида (1)–(4) со слабо сходящимися коэффициентами. Ранее аналогичные вопросы исследовались в случае прямых задач для различных классов эллиптических и параболических уравнений, а также для обратных задач для параболических уравнений второго порядка с финальным и интегральным переопределением [10]–[14], [6], [8]. Отметим, что данная проблематика связана с математическим моделированием физических процессов в сильно неоднородных средах и теорией G -сходимости (см. [15]–[18] и др.).

Введем некоторые обозначения и функциональные пространства, используемые в дальнейшем.

Положим $Q_\tau \equiv [0, \tau] \times [0, l]$, $0 < \tau \leq T$.

Банаховы пространства $L_2([0, l])$, $L_2([0, T])$, $L_\infty(0, T; L_2([0, l]))$, $L_2(Q_T)$, $W_2^m([0, l])$, $W_2^1([0, \tau])$, $W_2^{2m}([0, l])$, пространства Гёльдера $C^{k, \alpha}([0, l])$ с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле.

Через $\dot{W}_2^1([0, l])$, $\dot{W}_2^m([0, l])$ обозначим банаховы пространства функций, полученных замыканием множества $C_0^\infty([0, l])$ по норме пространств $W_2^1([0, l])$ и $W_2^m([0, l])$ соответственно.

Введем еще пространство Соболева $W_2^{1, 2m}(Q_T)$ функций $u(t, x)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{W_2^{1, 2m}(Q_T)} = \left(\|u\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|D_t u\|_{L_2(Q_T)}^2 + \sum_{j=1}^{2m} \|D_x^j u\|_{L_2(Q_T)}^2 \right)^{1/2}.$$

Через $\omega(\rho)$ будем обозначать функцию типа модуля непрерывности, т.е. гладкую неубывающую и неотрицательную при $\rho \geq 0$ функцию, для которой $\omega(0) = 0$.

Для простоты положим в дальнейшем

$$\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{L_2([0, l])}, \quad G(t) = \int_0^t g(t, x) w(x) dx.$$

В работе будут использоваться следующие хорошо известные неравенства: неравенство Коши

$$|yz| \leq \frac{\varepsilon}{2} |y|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |z|^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (5)$$

справедливое для произвольных $y, z \in \mathbb{R}^1$; неравенство Пуанкаре (см., например, [19])

$$\|v\| \leq \theta \|D_x^m v\|, \quad \theta \equiv \theta(m, l) > 0, \quad (6)$$

справедливое для всех функций $v(x) \in \dot{W}_2^m([0, l])$; неравенство Эрлингса–Ниренберга–Гальярдо (см., например, [19])

$$\|D_x^j v\|^2 \leq \sigma^2 (\varepsilon \|D_x^m v\|^2 + \varepsilon^{-j/(m-j)} \|v\|^2), \quad \sigma \equiv \sigma(m, l) > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1), \quad (7)$$

справедливое для всех функций $v(x) \in W_2^m([0, l])$.

Относительно исходных данных задачи (1)–(4) будем предполагать, что входящие в них функции измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

$$\Lambda_1 \leq a(t, x) \leq \Lambda_2, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (8)$$

$$|b_j(t, x)| \leq K_b, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2m-1, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (9)$$

$$g(t, x) \in L_\infty(0, T; L_2([0, l])), \quad \|g\|_{L_\infty(0, T; L_2([0, l]))} \leq K_g, \quad (10)$$

$$w(x) \in \dot{W}_2^1([0, l]), \quad \|w\|_{W_2^1([0, l])} \leq K_w, \quad (11)$$

$$\left| \int_0^l g(t, x) w(x) dx \right| \geq g_0 > 0, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

$$h(t, x) \in L_2(Q_T), \quad \varphi(t) \in W_2^1([0, T]), \quad u_0(x) \in \dot{W}_2^m([0, l]); \quad (13)$$

$$\varphi(0) = \int_0^l u_0(x) w(x) dx, \quad (14)$$

$$|D_x a(t, x)| \leq K_a, \quad (t, x) \in Q_T. \quad (15)$$

В этих условиях $\Lambda_1, \Lambda_2, K_a, K_b, K_g, K_w, g_0 = \text{const} > 0$.

Дадим следующее определение обобщенного решения задачи (1)–(4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара функций $\{u(t, x), f(t)\}$ называется *обобщенным решением* обратной задачи (1)–(4), если

$$u(t, x) \in C(0, T; \dot{W}_2^m([0, l])) \cap W_2^{1, 2m}(Q_T), \quad f(t) \in L_2([0, T]),$$

эти функции удовлетворяют уравнению (1) почти всюду в Q_T , и функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям (2)–(4) в обычном смысле.

2. Однозначная разрешимость обратной задачи (1)–(4). В дальнейшем через M с индексом будем обозначать произвольные положительные константы, зависящие только от m, l, T, θ, σ и от констант из условий (8)–(12), (15), а через s с индексом будем обозначать произвольные положительные константы, зависящие от тех же величин, что и M , и еще от $\|u_0\|_{W_2^m([0, l])}, \|\varphi(t)\|_{W_2^1([0, T])}, \|h\|_{L_2(Q_T)}$.

Ниже мы устанавливаем два типа условий, достаточных для однозначной разрешимости обратной задачи (1)–(4).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (8)–(15). Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(4) и выполнены оценки

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|D_x^m u(t, \cdot)\| + \|u\|_{W_2^{1,2m}(Q_T)} \leq c_1, \quad \|f\|_{L_2([0, T])} \leq c_2. \quad (16)$$

Для доказательства теоремы 1 выведем следующее соотношение, связывающее $f(t)$ и $u(t, x)$.

Умножим обе части уравнения (1) на $w(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Тогда, учитывая переопределение (4), получим, что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{G(t)} \left(\int_0^l a(t, x) D_x^{2m} u(t, x) w(x) dx + \sum_{j=0}^{2m-1} \int_0^l b_j(t, x) D_x^j u(t, x) w(x) dx \right) \\ & + \frac{(-1)^m}{G(t)} \varphi'(t) - \frac{1}{G(t)} \int_0^l h(t, x) w(x) dx, \end{aligned} \quad (17)$$

понимаемое как равенство функций в $L_2([0, T])$.

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть выполнены условия (8)–(12). Тогда для того чтобы пара $\{u(t, x), f(t)\}$ была обобщенным решением задачи (1)–(4), необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (1)–(3), (17).

Доказательство этого утверждения стандартно (см., например, [3], [7]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Разобьем отрезок $[0, T]$ на конечное число отрезков $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, t_N = T]$ длины Δt , величина которой будет выбрана ниже. Докажем существование и единственность обратной задачи (1)–(4) на каждом из этих частичных отрезков.

Рассмотрим сначала отрезок $[0, t_1]$ и представим искомое решение $\{u_1(t, x), f_1(t)\}$ на этом отрезке в виде суммы

$$\{u_1, f_1\} = \{v_1, 0\} + \{z_1, f_1\}.$$

Функция $v_1(t, x)$ однозначно определяется как единственное решение (см. [9]) прямой задачи

$$\begin{aligned} (-1)^m D_t v_1 + a(t, x) D_x^{2m} v_1 + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t, x) D_x^j v_1 &= h(t, x), \quad (t, x) \in Q_{t_1}, \\ D_x^i v_1|_{x=0, l} &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad t \in [0, t_1], \\ v_1|_{t=0} &= u_0(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned}$$

и для нее справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq t_1} \|D_x^m v_1(t, \cdot)\| + \|v_1\|_{W_2^{1,2m}(Q_{t_1})} \leq c_3.$$

Пару $\{z_1, f_1\}$ будем искать как решение обратной задачи

$$(-1)^m D_t z + a(t, x) D_x^{2m} z + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t, x) D_x^j u = f(t) g(t, x), \quad (t, x) \in Q_{t_1}, \quad (18)$$

$$D_x^i z|_{x=0, l} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad t \in [0, t_1], \quad (19)$$

$$z|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (20)$$

$$\int_0^l z(t, x) w(x) dx = \varphi_1(t) \equiv \varphi(t) - \int_0^l v_1(t, x) w(x) dx, \quad t \in [0, t_1]. \quad (21)$$

Введем линейный оператор

$$L: L_2([0, t_1]) \rightarrow L_2([0, t_1]),$$

определяемый следующим образом. Для произвольной $f(t) \in L_2([0, t_1])$ рассмотрим функцию $z(t, x)$ как решение прямой задачи (18)–(20) с данной функцией $f(t)$ в правой части уравнения (18) и положим

$$(Lf)(t) = \frac{1}{G(t)} \left(\int_0^l a(t, x) D_x^{2m} z(t, x) w(x) dx + \sum_{j=0}^{2m-1} \int_0^l b_j(t, x) D_x^j z(t, x) w(x) dx \right). \quad (22)$$

В силу [9] прямая задача (18)–(20) имеет единственное решение $z(t, x)$ для каждой $f(t) \in L_2([0, t_1])$ в правой части (18), так что оператор L определен корректно.

В соответствии с предложением 1 и определением оператора L для нахождения решения обратной задачи (18)–(21) требуется найти решение операторного уравнения

$$f(t) = (Lf)(t) + \frac{(-1)^m}{G(t)} \varphi_1'(t). \quad (23)$$

Покажем, что оператор L является сжимающим в пространстве $L_2([0, t_1])$ при некотором выборе $\Delta t \equiv t_1$. В силу определения L и предположения (12) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|Lf\|_{L_2([0, t_1])}^2 &\leq \frac{1}{g_0^2} \left(\int_0^{t_1} \left(\int_0^l a(t, x) D_x^{2m} z(t, x) w(x) dx \right)^2 dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{2m-1} \int_0^{t_1} \left(\int_0^l b_j(t, x) D_x^j z(t, x) w(x) dx \right)^2 dt \right) \equiv \frac{1}{g_0^2} \left(I + \sum_{j=0}^{2m-1} I_j \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Для оценки слагаемого I в правой части (24) воспользуемся предположениями (8), (11), (15) и неравенством Коши–Буняковского, в силу которых

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{t_1} \left(\int_0^l D_x^{2m-1} z \cdot D_x (a(t, x) w(x)) dx \right)^2 dt \\ &\leq \|D_x^{2m-1} z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 \cdot \|D_x (a(t, x) w(x))\|_{L_2(Q_{t_1})} \leq M_1 \|D_x^{2m-1} z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

С другой стороны, используя (9), (11) и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$I_j \leq K_b^2 \cdot \int_0^{t_1} \left(\int_0^l (D_x^j z) dx \right) \cdot \left(\int_0^l w^2 dx \right) dt \leq M_2 \|D_x^j z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2. \quad (26)$$

Подставляя (25) и (26) в (24) и учитывая интерполяционное неравенство (7), получаем, что

$$\|Lf\|_{L_2([0, t_1])}^2 \leq M_3 \sum_{j=0}^{2m-1} \|D_x^j z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 \leq M_4 \varepsilon^2 \|D_x^{2m} z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 + M_5 \beta(\varepsilon) \|z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2, \quad (27)$$

где $\beta(\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{2m-1} \varepsilon^{-2j/(2m-1)}$.

В силу [9], а также условия (10) имеем оценку

$$\|D_x^{2m} z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 \leq M_6 \|f(t) \cdot g(t, x)\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 \leq M_7 \|f\|_{L_2([0, t_1])}^2, \quad (28)$$

а в силу неравенства Пуанкаре (6)

$$\begin{aligned} \|z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 &\leq \theta^2 \int_0^{t_1} \|D_x^m z(t, \cdot)\|^2 dt \leq \theta^2 t_1 \left(\sup_{0 \leq t \leq t_1} \|D_x^m z(t, \cdot)\|^2 \right) \\ &\leq t_1 M_8 \|f\|_{L_2([0, t_1])}^2, \end{aligned} \quad (29)$$

где в последнем переходе мы еще раз воспользовались оценкой решения прямой задачи из [9].

Подставляя (28), (29) в (27), мы окончательно получаем неравенство

$$\|Lf\|_{L_2([0, t_1])}^2 \leq (\varepsilon^2 M_7 + t_1 M_8 \beta(\varepsilon)) \|f\|_{L_2([0, t_1])}^2.$$

Еще раз подчеркнем, что константы M_7 и M_8 не зависят от ε , t_1 , $u_0(x)$, $\varphi_1(t)$, $h(t, x)$.

Выберем теперь $\varepsilon = \varepsilon_0$ так, чтобы $\varepsilon_0^2 M_7 < 1/4$, а затем $t_1 = \Delta t$ так, чтобы

$$M_8 \beta(\varepsilon_0) \Delta t < \frac{1}{4}. \quad (30)$$

При таком выборе ε и t_1 получаем, что

$$\|Lf\|_{L_2([0, t_1])} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_{L_2([0, t_1])}.$$

Следовательно, оператор L является сжимающим из $L_2([0, t_1])$ в $L_2([0, t_1])$ и уравнение (23) имеет единственное решение $f_1(t) \in L_2([0, t_1])$. Кроме того, очевидно, справедлива оценка

$$\|f\|_{L_2([0, t_1])} \leq c_4.$$

Пусть теперь $z_1(t, x)$ – единственное решение прямой задачи (18)–(20) с найденной $f_1(t)$ в правой части уравнения (18). Оно существует в силу [9] и удовлетворяет оценке

$$\sup_{0 \leq t \leq t_1} \|D_x^m z_1(t, \cdot)\| + \|z_1\|_{W_2^{1, 2m}(Q_{t_1})} \leq c_5.$$

В соответствии с предложением 1 пара $\{z_1, f_1\}$ является единственным решением обратной задачи (18)–(21). Следовательно, в Q_{t_1} существует и единственно решение $\{u_1, f_1\}$ обратной задачи (1)–(4) и оно удовлетворяет оценкам (16), где T должно быть заменено на t_1 .

Заметим, что выбор Δt в (30) не зависит от $\varphi_1(t)$ и $u_0(x)$. Поэтому приведенные выше рассуждения могут быть повторены для отрезка времени $[t_1, t_2]$ с функцией $u(t_1, x)$ в качестве начального условия.

За конечное число шагов мы получим единственное решение $\{u(t, x), f(t)\}$ исходной обратной задачи (1)–(4) в Q_T , а также оценки (16). Теорема доказана.

Результат о существовании и единственности решения задачи (1)–(4) остается справедливым, если условие (15) заменить на условие

$$g(t, x) \in L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1([0, l])), \quad \|g\|_{L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1([0, l]))} \leq K_g^*. \quad (31)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (8)–(14), а также условие (31) вместо (15). Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 1, разобьем отрезок $[0, T]$ на конечное число отрезков $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, t_N = T]$, длину Δt которых выберем ниже, и докажем требуемый результат на отрезке $[0, t_1]$.

Повторяя ход доказательства теоремы 1, рассмотрим операторное уравнение (23), где оператор L задается формулой (22). Учитывая определение оператора L , наши предположения и неравенство (5) при $\varepsilon = 1$, имеем оценку

$$\|Lf\|_{L_2([0, t_1])}^2 \leq M_1 \|D_x^{2m} z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 + M_2 \sum_{j=0}^{2m-1} \|D_x^j z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2,$$

из которой после применения неравенств (6) и (7) находим, что

$$\|Lf\|_{L_2([0, t_1])}^2 \leq M_3 \|D_x^{2m} z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 + M_4 \|D_x^m z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2. \quad (32)$$

Чтобы оценить слагаемые, входящие в правую часть (32), умножим уравнение (18) на $D_x^{2m} z$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Учитывая условия (8), (9) и (31), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_x^m z(t, \cdot)\|^2 + \Lambda_1 \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\|^2 \\ & \leq K_b \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\| \sum_{j=0}^{2m-1} \|D_x^j z(t, \cdot)\| + K_g^* |f(t)| \cdot \|D_x^{2m-1} z(t, \cdot)\| \\ & \equiv S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Воспользовавшись неравенствами (5)–(7), получаем

$$\begin{aligned}
 S_2 &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} |f(t)|^2 + \frac{(K_g^*)^2}{2\varepsilon_1} \|D_x^{2m-1} z(t, \cdot)\|^2 \\
 &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} |f(t)|^2 + \frac{(\sigma K_g^*)^2}{2\varepsilon_1} (\varepsilon_2 \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\|^2 + \varepsilon_2^{1-m} \|D_x^m z(t, \cdot)\|^2), \\
 S_1 &\leq K_b \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\| \cdot \sum_{j=0}^{2m-1} (\varepsilon_2 \sigma \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\| + \varepsilon_2^{-j/(2m-j)} \sigma \|z(t, \cdot)\|) \\
 &\leq 2m K_b \sigma \varepsilon_2 \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\|^2 + K_b \sigma \theta \cdot (2\varepsilon_2 \cdot \gamma(\varepsilon_2))^{1/2} \cdot \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\| \cdot \|D_x^m z(t, \cdot)\| \\
 &\leq \left(2m K_b \sigma + \frac{1}{2}\right) \varepsilon_2 \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\|^2 + K_b^2 \sigma^2 \theta^2 \gamma(\varepsilon_2) \|D_x^m z(t, \cdot)\|^2.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – произвольные положительные константы и введено обозначение

$$\gamma(\varepsilon_2) = \frac{\sum_{j=0}^{2m-1} \varepsilon_2^{-j/(2m-j)}}{2\varepsilon_2}.$$

Подставляя (34) в (33), получаем оценку

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_x^m z(t, \cdot)\|^2 + \Lambda_1 \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\|^2 \\
 &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} |f(t)|^2 + \left(\frac{(K_g^*)^2}{2\varepsilon_1} + 2m K_b \sigma + \frac{1}{2}\right) \varepsilon_2 \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\|^2 \\
 &\quad + \left(\frac{(K_g^*)^2}{2\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_2^{1-m} + (K_b \sigma \theta)^2 \cdot \gamma(\varepsilon_2)\right) \cdot \|D_x^m z(t, \cdot)\|^2.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Ниже мы выберем $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ таким образом, чтобы

$$\left(\frac{(K_g^*)^2}{2\varepsilon_1} + 2m K_b \sigma + \frac{1}{2}\right) \varepsilon_2 = \frac{\Lambda_1}{2}. \tag{36}$$

Обозначая еще

$$M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2 \left(\frac{(K_g^*)^2}{2\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_2^{1-m} + (K_b \sigma \theta)^2 \cdot \gamma(\varepsilon_2) \right),$$

выводим из (35) неравенство

$$\frac{d}{dt} \|D_x^m z(t, \cdot)\|^2 + \Lambda_1 \|D_x^{2m} z(t, \cdot)\|^2 \leq \varepsilon_1 |f(t)|^2 + M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \|D_x^m z(t, \cdot)\|^2. \tag{37}$$

Применяя к (37) лемму Гронвулла и учитывая условие (20), получаем, что

$$\|D_x^m z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 \leq \varepsilon_1 \cdot \frac{e^{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)t_1} - 1}{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \cdot \|f\|_{L_2([0, t_1])}^2. \tag{38}$$

Интегрируя неравенство (37) по t от 0 до t_1 и учитывая (38), находим, что

$$\begin{aligned} \|D_x^{2m} z\|_{L_2(Q_{t_1})}^2 &\leq \frac{\varepsilon_1}{\Lambda_1} \|f\|_{L_2([0, t_1])}^2 + \frac{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\Lambda_1} \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{e^{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)t_1} - 1}{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \cdot \|f\|_{L_2([0, t_1])}^2 \\ &\equiv \frac{\varepsilon_1}{\Lambda_1} \cdot e^{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)t_1} \cdot \|f\|_{L_2([0, t_1])}^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (32), (38), (39) окончательно получаем оценку

$$\|Lf\|_{L_2([0, t_1])}^2 \leq \left(M_3 \frac{\varepsilon_1}{\Lambda_1} e^{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)t_1} + M_4 \frac{e^{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)t_1} - 1}{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \right) \|Lf\|_{L_2([0, t_1])}^2. \quad (40)$$

Выбираем теперь параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и t_1 следующим образом. Сначала фиксируем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы

$$\varepsilon_1 \cdot \max \left\{ \frac{M_3}{\Lambda_1}, M_4 \right\} = \frac{1}{16}.$$

Затем полагаем

$$\varepsilon_2 = \frac{\Lambda_1}{2} \left(\frac{(K_g^*)^2}{2\varepsilon_1} + 2mK_b\sigma + \frac{1}{2} \right)^{-1}.$$

При таком выборе ε_2 будет справедливо соотношение (36). Выбрав $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, мы, тем самым, фиксировали также величину $M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Наконец, выбираем t_1 достаточно малым так, чтобы

$$\max \left\{ e^{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)t_1}, \frac{1}{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} (e^{M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)t_1} - 1) \right\} < 2.$$

Тогда из (40) вытекает, что

$$\|Lf\|_{L_2([0, t_1])} \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L_2([0, t_1])},$$

а следовательно, оператор L является сжимающим оператором из $L_2([0, t_1])$ в $L_2([0, t_1])$.

Далее мы заканчиваем доказательство, как и в теореме 1. Теорема 2 доказана.

3. Предельный переход в обратной задаче со слабо сходящимися коэффициентами. В этом пункте докажем теорему о сходимости решений $\{u^k(t, x), f^k(t)\}$ последовательности обратных задач

$$(-1)^m D_t u + a^k(t, x) D_x^{2m} u + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j^k(t, x) D_x^j u = f(t) g^k(t, x) + h^k(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} D_x^i u|_{x=0, l} &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad t \in [0, T], \\ u|_{t=0} &= u_0^k(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \quad (42)$$

$$\int_0^l u(t, x) w(x) dx = \varphi^k(t), \quad t \in [0, T], \quad (43)$$

$k = 1, 2, \dots$, к решению $\{u^\infty(t, x), f^\infty(t)\}$ предельной обратной задачи (41)–(43) при $k = \infty$, которую будем характеризовать символом “ ∞ ” в коэффициентах уравнения, начальном условии и в условии переопределения, в предположении слабой в $L_2(Q_T)$ сходимости при $k \rightarrow \infty$ коэффициентов уравнения (41) к соответствующим коэффициентам уравнения (41) при $k = \infty$. Результат, полученный в теореме 2, позволяет это сделать.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что относительно исходных данных задач (41)–(43), $k = 1, 2, \dots, \infty$, выполнены условия (8)–(14) и (31), причем константы, входящие в оценки норм функций в этих условиях, не зависят от k . Пусть при $k \rightarrow \infty$ слабо в $L_2(Q_T)$*

$$a^k(t, x) \rightharpoonup a^\infty(t, x), \quad (44)$$

$$b_j^k(t, x) \rightharpoonup b_j^\infty(t, x), \quad j = 0, 1, \dots, 2m-1, \quad h^k(t, x) \rightharpoonup h^\infty(t, x); \quad (45)$$

в норме $L_2(Q_T)$

$$g^k(t, x) \rightarrow g^\infty(t, x), \quad (46)$$

$$\varphi^k(t) \rightarrow \varphi^\infty(t). \quad (47)$$

Предположим еще, что существует функция типа модуля непрерывности $\omega(\rho)$ такая, что для любых $\sigma(t, x) \in C_0^\infty(Q_T)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{Q_T} (a^k(t + \tau, x) - a^k(t, x)) D_x^{2m} \sigma(t, x) dx dt \right| \leq \omega(|\tau|) \cdot \|\sigma\|_{W_2^{1, 2m}(Q_T)}. \quad (48)$$

Тогда при $k \rightarrow \infty$ равномерно на Q_T

$$D_x^j u^k(t, x) \rightharpoonup D_x^j u^\infty(t, x), \quad j = 0, 1, \dots, m-1; \quad (49)$$

по норме пространства $L_2(Q_T)$

$$D_x^j u^k(t, x) \rightarrow D_x^j u^\infty(t, x), \quad j = m, \dots, 2m-1; \quad (50)$$

слабо в $L_2(Q_T)$

$$D_x^{2m} u^k(t, x) \rightharpoonup D_x^{2m} u^\infty(t, x), \quad D_t u^k(t, x) \rightharpoonup D_t u^\infty(t, x), \quad (51)$$

и слабо в $L_2([0, T])$

$$f^k(t) \rightharpoonup f^\infty(t) \quad (52)$$

(в соотношениях (49)–(52) $\{u^k(t, x), f^k(t)\}$ – решения обратных задач (41)–(43) при $k = 1, 2, \dots$, а $\{u^\infty(t, x), f^\infty(t)\}$ – решение предельной обратной задачи (41)–(43) при $k = \infty$). Таким образом, в последовательности обратных задач (41)–(43) можно перейти к пределу при $k = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 при сделанных предположениях для каждого $k = 1, 2, \dots, \infty$ существует единственное решение $\{u^k(t, x), f^k(t)\}$ обратной задачи (41)–(43), для которого справедливы равномерные по k оценки (16). Из этих оценок вытекает, что существует пара функций $u^*(t, x) \in W_2^{1, 2m}(Q_T)$, $f^*(t) \in L_2([0, T])$ и подпоследовательность $k_\nu \rightarrow \infty$ такие, что при $\nu \rightarrow \infty$ равномерно на Q_T

$$D_x^j u^{k_\nu}(t, x) \rightharpoonup D_x^j u^*(t, x), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (53)$$

по норме пространства $L_2(Q_T)$

$$D_x^j u^{k\nu}(t, x) \rightarrow D_x^j u^*(t, x), \quad j = m, \dots, 2m-1, \quad (54)$$

слабо в $L_2(Q_T)$

$$D_x^{2m} u^{k\nu}(t, x) \rightharpoonup D_x^{2m} u^*(t, x), \quad D_t u^{k\nu}(t, x) \rightharpoonup D_t u^*(t, x), \quad (55)$$

слабо в $L_2([0, T])$

$$f^{k\nu}(t) \rightharpoonup f^*(t). \quad (56)$$

Докажем, что $u^*(t, x) = u^\infty(t, x)$ в Q_T , $f^*(t) = f^\infty(t)$ почти всюду на $[0, T]$.

Из (56) и (46) вытекает, что слабо в $L_2(Q_T)$ при $\nu \rightarrow \infty$

$$f^{k\nu}(t) \cdot g^{k\nu}(t, x) \rightharpoonup f^*(t) \cdot g^\infty(t, x). \quad (57)$$

Но тогда на основании условий (44), (45), (57), (48) и теоремы 1 из [11] получаем, что функция $u^*(t, x)$ удовлетворяет почти всюду в Q_T уравнению (41) при $k = \infty$ с $f(t) = f^*(t)$. В силу (49) функция $u^*(t, x)$, очевидно, удовлетворяет также краевым условиям (42) при $k = \infty$.

Наконец, на основании (53) и (47) мы можем перейти к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ в соотношении

$$\int_0^l u^{k\nu}(t, x) w(x) dx = \varphi^{k\nu}(t),$$

а следовательно, $u^*(t, x)$ удовлетворяет условию переопределения (43) при $k = \infty$. Таким образом, пара $\{u^*(t, x), f^*(t)\}$ является решением предельной обратной задачи (41)–(43) при $k = \infty$.

В силу уравнения (41) при $k = \infty$ $u^*(t, x) \in C(0, T; \dot{W}_2^m([0, l]))$.

В силу единственности обобщенного решения обратной задачи (41)–(43) при $k = \infty$ (см. теорему 2) получаем, что $u^*(t, x) = u^\infty(t, x)$, $f^*(t) = f^\infty(t)$ и сходимость в (53)–(56) осуществляется по всей последовательности индексов $k \rightarrow \infty$, а следовательно, справедливы предельные соотношения (49)–(52). Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия, аналогичные (48), встречались в предыдущих работах одного из авторов (см. [10]–[14] и др.), посвященных предельному переходу в прямых и обратных задачах для уравнений со слабо сходящимися коэффициентами. На основании техники доказательства теоремы 2 из [13] можно показать, что при выполнении соотношения (44) условие (48) эквивалентно следующему условию: существует бесконечно малая при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\alpha(k)$ такая, что для любых $\sigma(t, x) \in C_0^\infty(Q_T)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{Q_T} (a^k(t, x) - a^\infty(t, x)) D_x^{2m} \sigma(t, x) dx dt \right| \leq \alpha(k) \cdot \|\sigma\|_{W_2^{1, 2m}(Q_T)}.$$

Последнее условие в некоторых случаях более удобно для проверки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Прилепко А. И., Орловский Д. Г. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики. I // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 119–129.
- [2] Прилепко А. И., Орловский Д. Г. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики. II // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 4. С. 694–700.
- [3] Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. V. 4. № 1. P. 35–45.
- [4] Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in Hölder classes for some semilinear parabolic equations // Inverse Problems. 1988. V. 4. № 3. P. 595–606.
- [5] Костин А. Б. Обратная задача для уравнения теплопроводности с интегральным переопределением // Обратные задачи для математического моделирования физических процессов. Сб. научн. тр. М.: МИФИ, 1991. С. 45–49.
- [6] Kamynin V. L. On convergence of the solutions of inverse problems for parabolic equations with weakly converging coefficients // Elliptic and Parabolic Problems (Pont-à-Mousson, 1994). Pitman Res. Notes Math. Ser. V. 325. London: Longman Sci. Tech., 1995. P. 130–151.
- [7] Васин И. А. О некоторых обратных задачах динамики вязкой несжимаемой жидкости в случае интегрального переопределения // ЖВМиМФ. 1992. Т. 31. № 7. С. 1071–1079.
- [8] Kamynin V. L., Vasin I. A. Inverse problems for linearized Navier–Stokes equations with integral overdetermination. Unique solvability and passage to the limit // Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII (N.S.). 1992. V. 38. P. 229–247.
- [9] Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1979. Т. 5. С. 217–272.
- [10] Кружков С. Н., Камынин В. Л. Сходимость решений квазилинейных параболических уравнений со слабо сходящимися коэффициентами // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 3. С. 533–536.
- [11] Камынин В. Л. О предельном переходе в квазилинейных параболических уравнениях высокого порядка // Динамика сплошной среды. Вып. 63. Новосибирск: СО АН СССР, 1983. С. 122–128.
- [12] Камынин В. Л. О предельном переходе в квазилинейных эллиптических уравнениях со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1987. Т. 174. № 1. С. 45–63.
- [13] Камынин В. Л. Предельный переход в квазилинейных параболических уравнениях со слабо сходящимися коэффициентами и асимптотическое поведение решений задачи Коши // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 8. С. 1031–1047.
- [14] Камынин В. Л. Предельный переход в обратной задаче для недивергентных параболических уравнений с условием финального переопределения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 247–253.
- [15] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [16] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
- [17] Dal Maso G. An Introduction to Γ -Convergence. Boston: Birkhäuser, 1993.
- [18] Buttazzo G., Freddi L. Sequences of optimal control problems with measures as controls // Adv. Math. Sci. Appl. 1993. V. 2. P. 215–230.
- [19] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.