Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Карпов, О структуре жестких полустабильных пучков на алгебраических поверхностях, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 692–700

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 03:06:56

УДК 512.723

О СТРУКТУРЕ ЖЕСТКИХ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Б. В. Карпов

Пусть S – гладкая проективная поверхность, K – ее канонический класс и H – обильный дивизор такой, что $H \cdot K < 0$. В статье доказывается, что для любого жесткого ($\text{Ext}^1(F, F) = 0$) полустабильного по Мамфорду–Такемото относительно H пучка F существует исключительный набор $(E_1, \dots, E_n)$ пучков на S такой, что F может быть построен из $\{E_i\}$ посредством конечного числа расширений.

Библиография: 4 названия.

Введение. Пусть S – гладкая проективная поверхность с каноническим классом K и H – обильный дивизор, для которого $H \cdot K < 0$.

Для любого когерентного пучка F на S , имеющего $r(F) > 0$, рассмотрим следующие инварианты:

$$\mu(F) = \frac{c_1(F) \cdot H}{r(F)} \in \mathbb{Q}$$

– наклон Мамфорда–Такемото F относительно H ;

$$\gamma(F)(n) = \frac{\chi(F(nH))}{r(F)} \in \mathbb{Q}[n]$$

– наклон Гизекера F относительно H .

Когерентный пучок F без кручения μ -полустабилен (μ -стабилен), если для любого его подпучка E такого, что $0 < r(E) < r(F)$, выполняется неравенство $\mu(E) \leq \mu(F)$ ($\mu(E) < \mu(F)$ соответственно). Пучок без кручения F γ -полустабилен (γ -стабилен), если для любого подпучка $E \subset F$, имеющего $0 < r(E) < r(F)$, неравенство $\gamma(E)(n) \leq \gamma(F)(n)$ ($\gamma(E)(n) < \gamma(F)(n)$ соответственно) выполняется при $n \gg 0$.

Пучок F жесткий, если $\text{Ext}^1(F, F) = 0$, и сверхжесткий, если $\text{Ext}^i(F, F) = 0$ при $i > 0$. Исключительный пучок E – это сверхжесткий пучок такой, что $\text{Hom}(E, E) \cong \mathbb{C}$.

Упорядоченный набор пучков $(E_1, \dots, E_n)$ называется исключительным, если все E_i исключительны и $\text{Ext}^i(E_k, E_j) = 0$ для любого i при $k > j$.

Цель данной работы состоит в доказательстве следующего утверждения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01323, и фонда INTAS.

ТЕОРЕМА. *Любой жесткий μ -полустабильный пучок F является сверхжестким и имеет фильтрацию*

$$0 = F_{n+1} \subset F_n \subset \cdots \subset F_2 \subset F_1 = F,$$

все факторы которой F_i/F_{i+1} изоморфны $E_i \oplus \cdots \oplus E_i$ для некоторых исключительных γ -стабильных пучков E_i и набор $(E_1, \dots, E_n)$ исключителен.

Результаты о структуре жестких и сверхжестких пучков тесно связаны с изучением исключительных наборов пучков на поверхностях дель Пеццо (см. [1]) и на поверхностях с численно эффективным антиканоническим классом (см. [2]). Теорема, сформулированная выше, является обобщением теоремы 3 из [2, п. 2.4.1].

Конечно, существование обильного дивизора, имеющего отрицательное пересечение с антиканоническим классом, налагает определенные ограничения на поверхность. Однако, основной результат данной работы дает новую информацию, в частности, для рациональных линейчатых поверхностей $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(m))$, $m \geq 2$, и для подходящих их раздутий.

Отметим, что для $S = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(m))$ число членов фильтрации жесткого μ -полустабильного пучка $n \leq 3$, так как максимальная длина исключительного набора равна $\dim K_0(S) = 4$ и образы E_i в $K_0(S)$ лежат в подпространстве $c_1 \cdot H = r\mu(F)$.

1. Стабильность. Начнем с некоторых обозначений. Мы пишем $\gamma(E) > \gamma(F)$, если $\gamma(E)(n) > \gamma(F)(n)$ при $n \gg 0$. По теореме Римана–Роха

$$\gamma(F)(n) = \frac{1}{2}n^2 H^2 + n\left(\mu(F) + \frac{1}{2}H \cdot K\right) + \frac{\chi(F)}{r(F)}.$$

Легко видеть, что

$$\gamma(E) > \gamma(F) \iff \mu(E) > \mu(F) \text{ или } \mu(E) = \mu(F), \quad \frac{\chi(E)}{r(E)} > \frac{\chi(F)}{r(F)}.$$

Отсюда следует, что любой μ -стабильный пучок γ -стабилен и любой γ -полустабильный пучок μ -полустабилен.

Мы будем использовать следующие свойства стабильных пучков.

СВОЙСТВО 1. *Пучок без кручения F γ -полустабилен (γ -стабилен) тогда и только тогда, когда $\gamma(F) \leq \gamma(G)$ ($\gamma(F) < \gamma(G)$ соответственно) для любого факторпучка без кручения G пучка F .*

СВОЙСТВО 2. *Если E и F γ -стабильны и $\gamma(E) > \gamma(F)$, то $\text{Hom}(E, F) = 0$.*

СВОЙСТВО 3. *Пусть*

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

– точная тройка пучков, где F и G γ -полустабильны и $\gamma(F) = \gamma(G)$. Тогда $\gamma(F') = \gamma(F)$ и F' γ -полустабилен.

СВОЙСТВО 4. *Пусть пучки E_1 и E_2 γ -стабильны, $\gamma(E_1) = \gamma(E_2)$ и $\text{Hom}(E_1, E_2) \neq 0$. Тогда $E_1 \cong E_2$ и $\text{Hom}(E_1, E_2) \cong \mathbb{C}$.*

СВОЙСТВО 5. Свойства 1–3 справедливы для μ -полустабильных пучков.

Свойства 1–5 доказаны в [2]. Они аналогичны хорошо известным свойствам полустабильных пучков на $\mathbb{P}_n$ (см. [3]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть E_1 и E_2 – μ -полустабильные пучки и $\mu(E_1) \geq \mu(E_2)$. Тогда $\text{Ext}^2(E_2, E_1) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По двойственности Серра $\text{Ext}^2(E_2, E_1) \cong \text{Hom}^*(E_1, E_2 \otimes K)$. С другой стороны, $c_1(E_2 \otimes K) = c_1(E_2) + r(E_2)K$. Следовательно, мы имеем

$$\mu(E_2 \otimes K) = \mu(E_2) + K \cdot H < \mu(E_2) \leq \mu(E_1),$$

что означает справедливость утверждения в силу свойств стабильности.

2. Свойства фильтратий. Пусть F – пучок. Положим

$$xF = \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_x \text{ слагаемых}.$$

Для фильтрации

$$0 = F_{n+1} \subset F_n \subset \cdots \subset F_2 \subset F_1 = F \quad (1)$$

пучка F обозначим через $\text{Gr}(F)$ упорядоченный набор факторпучков:

$$\text{Gr}(F) = (F_n/F_{n+1}, F_{n-1}/F_n, \dots, F_1/F_2).$$

Иногда мы будем говорить, что F имеет фильтрацию с $\text{Gr}(F) = (G_n, G_{n-1}, \dots, G_1)$. Это означает, что имеет место фильтрация вида (1) такая, что $G_i = F_i/F_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$. Отметим, что $G_n = F_n$.

Мы будем использовать спектральную последовательность

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_i \text{Ext}^{p+q}(G_i, G_{i+p}), \quad (2)$$

которая сходится к $\text{Ext}^{p+q}(F, F)$.

Очевидно, что любая фильтрация с двумя факторами есть не что иное как точная тройка

$$0 \longrightarrow G_2 \longrightarrow F \longrightarrow G_1 \longrightarrow 0. \quad (3)$$

ЛЕММА МУКАИ. Если в точной тройке (3) $\text{Hom}(G_2, G_1) = \text{Ext}^2(G_1, G_2) = 0$, то $\dim \text{Ext}^1(F, F) \geq \dim \text{Ext}^1(G_1, G_1) + \dim \text{Ext}^1(G_2, G_2)$.

Доказательство содержится в [4] и в [1]. Кроме того, это утверждение легко доказать с помощью спектральной последовательности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для пучка F следующие условия эквивалентны:

- i) существует фильтрация с $\text{Gr}(F) = (G_n, \dots, G_{i+1}, G_i, \dots, G_1)$;
- ii) существует фильтрация с $\text{Gr}(F) = (G_n, \dots, G_{i+2}, \tilde{G}, G_{i-1}, \dots, G_1)$, где $\tilde{G}$ имеет фильтрацию с $\text{Gr}(\tilde{G}) = (G_{i+1}, G_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) $\implies$ ii). Пусть

$$0 \subset F_n \subset \cdots \subset F_{i+2} \subset F_{i+1} \subset F_i \subset \cdots \subset F$$

– фильтрация с $\text{Gr}(F) = (G_n, \dots, G_{i+1}, G_i, \dots, G_1)$. Тогда эта фильтрация с пропущенным F_{i+1} имеет факторы $\text{Gr}(F) = (G_n, \dots, G_{i+2}, \tilde{G}, G_{i-1}, \dots, G_1)$. Здесь $\tilde{G} = F_i/F_{i+2}$. Нижняя строка коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & F_{i+2} & \xlongequal{\quad} & F_{i+2} & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 \longrightarrow & F_{i+1} & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & G_i & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 0 \longrightarrow & G_{i+1} & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & G_i & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array} \tag{4}$$

дает фильтрацию пучка $\tilde{G}$ с $\text{Gr}(\tilde{G}) = (G_{i+1}, G_i)$.

ii) $\implies$ i). В этом случае мы имеем средний столбец и нижнюю строку диаграммы (4). Ясно, что по этим данным остальная часть диаграммы может быть восстановлена, что завершает доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть имеет место точная тройка пучков

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} \tilde{F} \longrightarrow 0.$$

Тогда следующие условия равносильны:

- i) $\tilde{F}$ имеет фильтрацию с $\text{Gr}(\tilde{F}) = (G_n, \dots, G_1)$;
- ii) F имеет фильтрацию с $\text{Gr}(F) = (E, G_n, \dots, G_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по n . Случай $n = 1$ очевиден. Рассмотрим случай $n > 1$.

i) $\implies$ ii). Пусть

$$0 \subset \tilde{F}_n \subset \cdots \subset \tilde{F}_2 \subset \tilde{F}_1 = \tilde{F}$$

– фильтрация с $\text{Gr}(\tilde{F}) = (G_n, \dots, G_1)$. Тогда $\tilde{F}_2$ имеет фильтрацию с $\text{Gr}(\tilde{F}_2) = (G_n, \dots, G_2)$. Рассмотрим эпиморфизм $F \xrightarrow{\alpha} \tilde{F} \rightarrow G_1$ и его ядро F_2 . Легко видеть, что имеет мес-

то следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & E & \xlongequal{\quad} & E & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{F}_2 & \longrightarrow & \tilde{F} & \longrightarrow & G_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \quad (5)$$

По предположению индукции F_2 имеет фильтрацию с $\text{Gr}(F_2) = (E, G_n, \dots, G_2)$. Из средней строки диаграммы (5) вытекает, что F имеет требуемую фильтрацию.

ii) $\Rightarrow$ i). Пусть

$$0 \subset E \subset F_n \subset \dots \subset F_2 \subset F$$

– фильтрация с $\text{Gr}(F) = (E, G_n, \dots, G_1)$. Тогда мы имеем две верхних строки и средний столбец (5). Ясно, что остальная часть этой диаграммы может быть восстановлена. По индуктивному предположению существует фильтрация $\tilde{F}_2$ с $\text{Gr}(\tilde{F}_2) = (G_n, \dots, G_2)$. Тогда из нижней строки диаграммы (5) следует, что $\tilde{F}$ имеет требуемую фильтрацию. Предложение доказано.

Комбинируя предложения 1, 2, легко доказать следующее свойство фильтратий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Следующие утверждения эквивалентны:

- i) пучок F имеет фильтрацию с $\text{Gr}(F) = (G_n, \dots, G_1)$, и существуют фильтратии $\text{Gr}(G_i) = (E_{m_i}^{(i)}, \dots, E_1^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$;
- ii) пучок F имеет фильтрацию с факторами

$$\text{Gr}(F) = (E_{m_n}^{(n)}, \dots, E_1^{(n)}, E_{m_{n-1}}^{(n-1)}, \dots, E_1^{(n-1)}, \dots, E_{m_1}^{(1)}, \dots, E_1^{(1)}).$$

3. Фильтрации γ -полустабильного пучка. Всюду в этом пункте мы предполагаем, что пучок F γ -полустабильен. В работе [2] доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пучок F имеет фильтрацию

$$0 = F_{n+1} \subset F_n \subset \dots \subset F_2 \subset F_1 = F$$

с γ -полустабильными факторами $G_i = F_i/F_{i+1}$, обладающими свойствами:

- а) каждый G_i имеет фильтрацию с изоморфными друг другу стабильными факторами: $\text{Gr}(G_i) = (E_i, E_i, \dots, E_i)$, $\gamma(E_i) = \gamma(G_i) = \gamma(F)$;
- б) $\text{Hom}(F_i, G_{i-1}) = \text{Hom}(G_i, G_{i-1}) = \text{Hom}(G_{i-1}, G_i) = 0$.

Это так называемая фильтрация с изотипными факторами. Она строится по индукции: в качестве E_i берется факторпучок пучка F_i , имеющий $\gamma(E_i) = \gamma(F)$ и минимальный ранг. При этом E_i γ -стабилен и любой ненулевой морфизм $\text{Ker}(F_i \rightarrow E_i) \rightarrow E_i$ (если такой существует) является эпиморфизмом. Подобным образом E_i “отщепляется” от F_i до тех пор, пока это возможно, т.е. в результате получается точная тройка $0 \rightarrow F_{i+1} \rightarrow F_i \rightarrow G_i \rightarrow 0$, где $\text{Gr}(G_i) = (E_i, E_i, \dots, E_i)$ и $\text{Hom}(F_{i+1}, E_i) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть F жесткий. Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) все F_i и G_i жесткие;
- б) $\text{Ext}^1(G_n, G_1) = 0$;
- в) E_i исключительны и $G_i = E_i \oplus \dots \oplus E_i$;
- г) $\text{Ext}^1(E_n, E_i) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пучки F_2 и G_1 полустабильны и $\gamma(F_2) = \gamma(G_1)$. Используя следствие 1, имеем $\text{Ext}^2(G_1, F_2) = 0$. Из леммы Мукайи следует, что F_2 и G_1 жесткие. Беря F_2 в качестве F , мы аналогично получаем, что F_3 и G_2 жесткие, и т.д.

б) Рассмотрим спектральную последовательность, ассоциированную с фильтрацией пучка F . Эта последовательность имеет вид (2) и сходится к $\text{Ext}^{p+q}(F, F)$. Пользуясь следствием 1, мы получаем $\text{Ext}^2(G_i, G_j) = 0$ для всех i, j . Следовательно, первый член спектральной последовательности имеет вид

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & & \text{Ext}^1(G_n, G_1) & 0 & \\
 & & \text{Hom}(G_n, G_1) & * & 0 \\
 & & & * & * \quad \ddots \\
 & & & & * \quad \ddots \quad p+q=2 \quad \cdot \\
 & & & & \ddots \quad p+q=1 \\
 & & & & \quad p+q=0 \\
 & & & & \cdot \xrightarrow{d} \cdot
 \end{array}$$

Пучок F жесткий. Значит, спектральная последовательность сходится к 0 на диагонали $p+q=1$. Отсюда $\text{Ext}^1(G_n, G_1) = 0$.

в) Из следствия 1 вытекает, что $\text{Ext}^2(E_i, E_i) = 0$. Беря G_i в качестве F в утверждении б), мы получаем $\text{Ext}^1(E_i, E_i) = 0$. Отсюда следует, что $G_i = E_i \oplus \dots \oplus E_i$. Наконец, E_i γ -стабильны, откуда $\text{Hom}(E_i, E_i) \cong \mathbb{C}$.

Утверждение г) следует из в) и б), примененных к F_i . Предложение доказано.

Таким образом, фильтрация γ -полустабильного жесткого пучка F , описанная в предложениях 4 и 5, имеет факторы

$$\text{Gr}(F) = (x_n E_n, \dots, x_1 E_1), \quad \gamma(E_i) = \gamma(F),$$

где пучки E_i исключительны, γ -стабильны, $E_i \not\cong E_{i-1}$ и $\text{Hom}(F_i, E_{i-1}) = 0$.

Предположим, что существует $j \in \{1, \dots, n-1\}$, для которого $\text{Hom}(E_n, E_j) \neq 0$. Рассмотрим наибольшее такое j . Из свойств стабильности следует, что $E_j \cong E_n$. Используя утверждение г) предложения 5 и применяя функтор $\text{Hom}(E_n, \cdot)$ к точным тройкам

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & x_n E_n & \longrightarrow & F_{n-1} & \longrightarrow & x_{n-1} E_{n-1} \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & F_{n-1} & \longrightarrow & F_{n-2} & \longrightarrow & x_{n-2} E_{n-2} \longrightarrow 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \longrightarrow & F_{j+1} & \longrightarrow & F_j & \longrightarrow & x_j E_n \longrightarrow 0 \end{array},$$

мы получаем $\text{Ext}^1(E_n, F_{n-1}) = \text{Ext}^1(E_n, F_{n-2}) = \dots = \text{Ext}^1(E_n, F_j) = 0$. Следовательно, последнее расширение тривиально и $F_j = F_{j+1} \oplus x_j E_n$. Таким образом, мы имеем новую фильтрацию F :

$$0 \subset (x_n + x_j)E_n \subset F_{n-1} \oplus x_j E_n \subset \dots \subset F_{j+2} \oplus x_j E_n \subset F_j \subset F_{j-1} \subset \dots \subset F \quad (6)$$

с факторами

$$\text{Gr}(F) = ((x_n + x_j)E_n, x_{n-1}E_{n-1}, \dots, x_{j+1}E_{j+1}, x_{j-1}E_{j-1}, \dots, x_1E_1).$$

Если $E_{j+1} \cong E_{j-1}$, то по предложению 1 мы можем объединить факторы $x_{j+1}E_{j+1}$ и $x_{j-1}E_{j-1}$ в сумму $(x_{j+1} + x_{j-1})E_{j-1}$. Соответствующая фильтрация — это (6) с пропущенным F_j . Отметим, что $\text{Hom}(F_i \oplus x_j E_n, E_{i-1}) = 0$ при $i = j+2, \dots, n$.

Итерируя эту процедуру, мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Существует фильтрация*

$$0 \subset \tilde{x}_n E_n = \tilde{F}_{m+1} \subset \tilde{F}_m \subset \dots \subset \tilde{F}_2 \subset \tilde{F}_1 = F$$

с факторами $\widetilde{\text{Gr}}(F) = (\tilde{x}_n E_n, \tilde{x}_m \tilde{E}_m, \dots, \tilde{x}_1 \tilde{E}_1)$ такими, что упорядоченный набор $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m)$ является поднабором $(E_1, \dots, E_{n-1})$ и

$$\text{Hom}(E_n, \tilde{E}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Более того, $\tilde{E}_m = E_{n-1}$, $\text{Hom}(\tilde{F}_i, \tilde{E}_{i-1}) = 0$ и $\tilde{E}_i \not\cong \tilde{E}_{i-1}$, $2 \leq i \leq m$.

4. Доказательство теоремы. Шаг 1. Пучок F γ -полустабилен. Рассмотрим фильтрацию, описанную в п. 3. Она имеет факторы $\text{Gr}(F) = (x_n E_n, \dots, x_1 E_1)$, $\gamma(E_i) = \gamma(F)$, где пучки E_i исключительны и γ -стабильны, $\text{Ext}^1(E_n, E_i) = 0$, $E_i \not\cong E_{i-1}$ и $\text{Hom}(F_i, E_{i-1}) = 0$. По предложению 6 мы можем построить эту фильтрацию так, что $\text{Hom}(E_n, E_i) = 0$ при $i = 1, \dots, n-1$.

Отметим, что в силу следствия 1 $\text{Ext}^2(E_i, E_j) = 0$ для всех i, j .

Пучок $\tilde{F} = F/x_n E_n$ γ -полустабилен и имеет фильтрацию

$$0 = F_n/x_n E_n \subset F_{n-1}/x_n E_n \subset \dots \subset F_2/x_n E_n \subset F_1/x_n E_n = \tilde{F} \quad (7)$$

с γ -полустабильными факторами $\text{Gr}(\tilde{F}) = (x_{n-1}E_{n-1}, \dots, x_1E_1)$.

Отсюда следует, что $\text{Hom}(E_n, \tilde{F}) = 0$. Из следствия 1 имеем $\text{Ext}^2(\tilde{F}, E_n) = 0$. Применяя лемму Мукаи к точной тройке

$$0 \longrightarrow x_n E_n \longrightarrow F \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow 0,$$

заключаем, что $\tilde{F}$ жесткий.

Применяя функтор $\text{Hom}(\cdot, E_{i-1})$ к точной тройке

$$0 \longrightarrow x_n E_n \longrightarrow F_i \longrightarrow F_i/x_n E_n \longrightarrow 0,$$

получаем, что $\text{Hom}(F_i/x_n E_n, E_{i-1}) = 0$. Следовательно, фильтрация (7) пучка $\tilde{F}$ обладает свойствами, сформулированными в предложении 4. Тогда из утверждения г) предложения 5 следует, что

$$\text{Ext}^1(E_{n-1}, E_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Используя предложение 6, мы можем построить фильтрацию пучка $\tilde{F}$ с факторами

$$\text{Gr}(\tilde{F}) = (\tilde{x}_{n-1} E_{n-1}, \tilde{x}_m \tilde{E}_m, \dots, \tilde{x}_1 \tilde{E}_1)$$

такими, что набор $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m)$ является поднабором $(E_1, \dots, E_{n-2})$ и

$$\text{Hom}(E_{n-1}, \tilde{E}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

(на самом деле, $\tilde{E}_m = E_{n-2}$). Из предложения 2 следует, что существует фильтрация пучка F с факторами

$$\text{Gr}(F) = (x_n E_n, \tilde{x}_{n-1} E_{n-1}, \tilde{x}_m \tilde{E}_m, \dots, \tilde{x}_1 \tilde{E}_1).$$

Заменяя в предыдущем рассуждении $\tilde{F}$ на $\tilde{F}/\tilde{x}_{n-1} E_{n-1}$ и итерируя эту процедуру, мы получаем фильтрацию F с

$$\text{Gr}(F) = (x_n E_n, \tilde{x}_{n-1} E_{n-1}, \tilde{x}_{n-2} E_{n-2}, x'_k E'_k, \dots, x'_1 E'_1),$$

где набор $(E'_1, \dots, E'_k, E_{n-2}, E_{n-1}, E_n)$ исключителен.

Шаг 2. Пучок F μ -полустабильный и жесткий. Пусть

$$0 \subset F_n \subset \dots \subset F_2 \subset F_1 = F$$

– фильтрация Гардера–Нарасимхана F относительно γ (см. [2]) с факторами $\text{Gr}(F) = (G_n, \dots, G_1)$. Здесь G_i γ -полустабильны и $\gamma(G_i) > \gamma(G_{i-1})$. Пучок G_n – подпучок F и G_1 – факторпучок F , откуда $\mu(G_n) \leq \mu(F) \leq \mu(G_1)$, и мы имеем $\mu(G_i) = \mu(F)$. Следовательно, $\mu(F_i) = \mu(F)$ и F_i μ -полустабильны.

Покажем, что G_i жесткие. Пучок F_2 имеет фильтрацию с $\text{Gr}(F_2) = (G_n, \dots, G_2)$. По свойствам стабильности $\text{Hom}(G_i, G_1) = 0$, $i = 2, \dots, n$. Из этого следует, что $\text{Hom}(F_2, G_1) = 0$. Согласно следствию 1 имеем $\text{Ext}^2(G_1, F_2) = 0$. Из леммы Мукаи следует, что G_1 и F_2 жесткие. Беря F_3 вместо F_2 , мы аналогично получаем, что G_2 и F_3 жесткие. Продолжая рассуждение в том же духе, мы видим, что все G_i жесткие.

По шагу 1 каждый G_i имеет фильтрацию с

$$\mathrm{Gr}(G_i) = (x_{m_i}^{(i)} E_{m_i}^{(i)}, \dots, x_1^{(i)} E_1^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $E_s^{(i)}$ γ -стабильны, $\gamma(E_s^{(i)}) = \gamma(G_i)$, $s = 1, \dots, m_i$, и набор $(E_1^{(i)}, \dots, E_{m_i}^{(i)})$ исключителен. Из предложения 3 следует, что F имеет фильтрацию с

$$\mathrm{Gr}(F) = (x_{m_n}^{(n)} E_{m_n}^{(n)}, \dots, x_1^{(n)} E_1^{(n)}, \dots, x_{m_1}^{(1)} E_{m_1}^{(1)}, \dots, x_1^{(1)} E_1^{(1)}). \quad (8)$$

Мы утверждаем, что набор $(E_1^{(1)}, \dots, E_{m_1}^{(1)}, \dots, E_1^{(n)}, \dots, E_{m_n}^{(n)})$ исключителен. По построению $\gamma(E_t^{(j)}) > \gamma(E_s^{(i)})$ при $j > i$, откуда $\mathrm{Hom}(E_t^{(j)}, E_s^{(i)}) = 0$. С другой стороны, $\mu(E_t^{(j)}) = \mu(E_s^{(i)})$. Отсюда следует, что $\mathrm{Ext}^2(E_t^{(j)}, E_s^{(i)}) = 0$. Наконец, из спектральной последовательности (2), ассоциированной с фильтрацией (8), вытекает, что $\mathrm{Ext}^1(E_t^{(j)}, E_s^{(i)}) = 0$. Это завершает доказательство.

Автор благодарен С. А. Кулешову за полезные обсуждения, а также А. Н. Рудакову и А. Л. Городенцеву за внимание к этой работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кулешов С. А., Орлов Д. О. Исключительные пучки на поверхностях дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 59–93.
- [2] Кулешов С. А. Исключительные и жесткие пучки на поверхностях с антиканоническим классом без базисных компонент. Препринт № 1. М.: Матем. колледж НМУ, 1994.
- [3] Оконе К., Шнейдер М., Шпиндлер Х. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. М.: Мир, 1984.
- [4] Mukai S. On the moduli spaces of bundles on K3 surfaces. I // Vector Bundles / ed. Atiyah et al.: Oxford Univ. Press, 1986. P. 67–83.

Московский институт электроники и математики

Поступило
20.05.96