Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Малыхин, Борелевская разложимость компактов и их подпространств, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 701–712

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 11:06:27

УДК 513.83

БОРЕЛЕВСКАЯ РАЗЛОЖИМОСТЬ КОМПАКТОВ И ИХ ПОДПРОСТРАНСТВ

В. И. Малыгин

Рассматривается вопрос о наличии в тихоновских кубах и их борелевских подпространствах, в диадических компактах дизъюнктивных плотных (борелевских) подмножеств. Поставлено несколько проблем.

Библиография: 13 названий.

0. Введение. 100 лет назад в Математике разразился Великий Кризис, связанный с обнаружением парадоксов в основаниях математики. Парадоксы показали необходимость ограничения некоторых логических рассуждений, способов образования новых множеств. Часть математиков потребовала ревизии многих математических конструкций и построений, связанных прежде всего с аксиомой выбора. Развита в этом направлении часть математики впоследствии получила название конструктивной. В широком смысле этого слова в такой математике рассматриваются объекты и применяются методы рассуждений несколько ограничительные по сравнению с “обычной” классической математикой. Такой подход давно, но не очень широко применяется и в общей топологии. В данной заметке предпринята попытка такого подхода в исследовании разложимости топологических пространств.

1. “Неклассические” направления в теории разложимости топологических пространств. В 1943 г. Е. Хьюитт [1] назвал пространство *разложимым*, если в нем есть два дизъюнктивных плотных подмножества, и *неразложимым* в противном случае. Хьюитт, чуть позже М. Катетов [2], другие топологи доказали разложимость многих классов пространств (все рассматриваемые пространства предполагаются не имеющими изолированных точек): компактов, пространств счетного характера и т.п. К настоящему времени получено много интересных и красивых результатов: Н. В. Величко [3] и Е. Г. Пыткеев [4] доказали разложимость и максимальную разложимость k -пространств. В 1994 г. В. Комфорт (см. [5]) доказал разложимость всякого тихоновского счетно компактного пространства. В 1976 г. автор [6] построил на счетной бесконечной булевой группе (вся из элементов второго порядка) неразложимую хаусдорфову групповую топологию, а совсем недавно Комфорт и Ван Милл [7] доказали, что абелева хаусдорфова группа разложима, если в ней множество элементов второго порядка конечно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01619.

Однако постепенно, с исчерпыванием классической тематики выявилась необходимость и возможность более ограничительного подхода к понятию разложимости. Сказалась и некоторая накапливающаяся неудовлетворенность классической теорией разложимости. Эта неудовлетворенность простирается в двух направлениях: во-первых, сами плотные подмножества в большинстве случаев весьма неконструктивны, так как получаются в результате трансфинитных построений; и во-вторых, насчет разложимости рассматриваются самые общие топологические пространства и неразложимые топологии также строятся по трансфинитной индукции.

На первом направлении можно попытаться изменить само понятие разложимости и считать разложимыми (в новом уточненном смысле) только такие пространства, которые имеют пару дизъюнктивных плотных подмножеств сравнительно простой природы, например, борелевских (т.е. принадлежащих σ -кольцу или σ -алгебре подмножеств, порожденных открытыми или замкнутыми подмножествами рассматриваемого пространства) – и тогда говорят о борелевской разложимости (идея борелевской разложимости была выдвинута С. Ватсоном во время визита автора в Торонто летом 1993 г.).

Может быть, первая работа в этом направлении – это работа Дж. Сидера [8]. Более продвинутой в этом направлении является совместная работа [9] Р. Хименеса и автора. В данной заметке рассматривается борелевская разложимость некоторых классов топологических пространств: компактов, в частности, совершенно нормальных, диадических компактов, пространств полных по Бэру.

На втором направлении можно попытаться рассматривать не всевозможные топологические пространства, а пространства сравнительно простой природы, например, борелевские подмножества тихоновских кубов. Все-таки такие подпространства имеют некоторую “конструктивную” основу; во всяком случае, их топология определяется не трансфинитным построением, а некоторым другим способом. Немаловажно также, что борелевских подпространств (т.е. топологических пространств, гомеоморфных “каноническим” борелевским подмножествам) намного меньше, чем всех топологических подпространств. Так, легко видеть, что в тихоновском кубе веса n всевозможных подпространств $\exp(\exp n)$, в то время как борелевских подпространств только $\exp n$.

Есть и третье “неклассическое” направление в теории разложимости: исследовать “хорошие” (или “хорошо устроенные”) топологические пространства на предмет нахождения в них “хороших” плотных дизъюнктивных подмножеств.

В данной заметке рассматриваются “хорошие” пространства – борелевские и A -подмножества, подпространства тихоновских кубов на предмет нахождения в них как произвольных плотных подмножеств, так и плотных борелевских же подмножеств.

Через $[\cdot]$ и Int обозначаются операторы взятия замыкания и внутренности подмножеств топологического пространства.

2. Борелевская разложимость полных по Бэру пространств. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $\mathcal{B}$ – какое-то семейство его подмножеств. Тогда пространство называется $\mathcal{B}$ -разложимым, если в нем имеется два дизъюнктивных плотных подмножества, принадлежащих семейству $\mathcal{B}$ каждое. Если таких дизъюнктивных подмножеств найдется k штук, то будем говорить, что пространство k $\mathcal{B}$ -разложимо; $\Delta(\tau)$ -разложимость называется максимальной $\mathcal{B}$ -разложимостью. (Напомним, что $\Delta(\tau) = \min\{|V| : \emptyset \neq V \in \tau\}$ и называется дисперсионным характером топологии τ или пространства (X, τ) .) Такое общее понятие разложимости введено в [9]. Оно есть прямое обобщение обычной разложимости топологических пространств, когда $\mathcal{B}$ есть семейство всех подмножеств исследуемого пространства. Если же $\mathcal{B}$ есть σ -алгебра бо-

релевских подмножеств, порожденная открытыми (или замкнутыми, что в случае алгебры одно и то же) подмножествами, то говорят о *борелевской разложимости*, а если это σ -алгебра подмножеств, обладающих свойством Бэра (т.е. представимых в виде $V \Delta N$, где V открыто, N – множество первой категории и Δ – операция симметрической разности), то говорят о *бэровской разложимости*. Представление пространства в виде соответствующего дизъюнктивного семейства плотных подмножеств будем называть *разложением*, а сами плотные подмножества – *слагаемыми* разложения.

Заметим теперь, что слагаемые борелевского разложения, являясь борелевскими множествами, обладают свойством Бэра; следовательно, борелевская разложимость влечет бэровскую разложимость, а бэровская неразложимость влечет неразложимость борелевскую. Вопрос о совпадении или различии этих видов разложимости остается открытым, хотя оба вида разложимости совпадают для всюду полных по Бэру пространств (см. далее следствие 2).

Первые результаты относительно бэровской и борелевской разложимости получены в [9] (см. теоремы 1, 2 и следствие 1 далее).

ТЕОРЕМА 1. *Метризуемое пространство максимально борелевски, тем более, максимально бэровски разложимо.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть каждое подмножество первой категории нигде не плотно в пространстве. Тогда пространство бэровски, тем более, борелевски неразложимо.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Следующие пространства бэровски, тем более, борелевски неразложимы:*

- а) *стоун-чеховский нарост счетного бесконечного дискретного пространства;*
- б) *стоуновское пространство булевой алгебры измеримых по Лебегу подмножеств обычного отрезка действительных чисел;*
- в) *континуум Суслина.*

ПОЯСНЕНИЕ К ВЫВОДУ СЛЕДСТВИЯ 1 ИЗ ТЕОРЕМЫ 2. В первых двух пространствах каждое подмножество первой категории нигде не плотно в пространстве, а континуум Суслина становится таковым после удаления из него всех сепарабельных интервалов, если они в нем имелись.

Из следствия 1 видно, что бэровская и борелевская разложимость разительно отличаются от классической – ведь в смысле последней любой компакт максимально разложим!

Обобщим теорему 2.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть в пространстве есть непустое открытое множество, в котором каждое подмножество первой категории нигде не плотно. Тогда пространство бэровски, тем более, борелевски неразложимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – указанное непустое открытое множество. Докажем, что всякое его подмножество W со свойством Бэра, не являющееся нигде не плотным, имеет непустую внутренность. Легко видеть, что отсюда вытекает теорема 3. Итак, $W = E \Delta N$, где E открыто, а N первой категории. Тем самым, $W = (E \setminus N_1) \cup N_2$, где N_1, N_2 – также множества первой категории. Но E не может быть пустым, ибо тогда

$W = N_2$ и, значит, W нигде не плотно, так как N_2 первой категории. Если же $E \neq \emptyset$, то $\text{Int } W \neq \emptyset$, поскольку N_1 нигде не плотно.

Теперь дополним теоремы 2, 3, но предварительно напомним, что пространство называется *всюду полным по Бэру*, если любое множество первой категории имеет пустую внутренность (эквивалентно – пересечение любого счетного семейства плотных открытых множеств всюду плотно).

ТЕОРЕМА 4. *Для всюду полного по Бэру пространства верно только одно из двух следующих взаимоисключающих утверждений:*

- А) *в пространстве есть непустое открытое множество, в котором каждое подмножество первой категории нигде не плотно; тогда пространство бэровски, тем более, борелевски неразложимо;*
- Б) *в пространстве есть плотное F_σ -подмножество первой категории; тогда пространство борелевски разложимо, так как дополнение к указанному F_σ -подмножеству, являясь G_δ -множеством, также плотно в пространстве, потому что это пространство всюду полно по Бэру (отметим также, что в этом борелевском разложении слагаемые принадлежат к низшим классам борелевской иерархии: одно есть F_σ -множество, а другое G_δ -множество).*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Всюду полное по Бэру пространство или борелевски разложимо, а тогда и бэровски разложимо, или бэровски неразложимо, а тогда и борелевски неразложимо; другими словами, оба вида разложимости совпадают для таких пространств.*

Теорема 4 в какой-то степени решает вопрос Ватсона, который для борелевской разложимости желал иметь слагаемые наимизших классов борелевской иерархии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть для пространства X случай А) не имеет места; тогда найдется дизъюнктное семейство $\mathcal{E}$ открытых множеств такое, что $\bigcup \mathcal{E}$ плотно в пространстве и в каждом $E \in \mathcal{E}$ плотно некоторое множество первой категории $F_E = \bigcup \{F_i^E : i \in \omega\}$, являющееся относительным F_σ -множеством (т.е. каждое F_i^E замкнуто лишь в E). Пусть $F_i = [\bigcup \{F_i^E : E \in \mathcal{E}\}]$. Тогда $S = \bigcup \{F_i : i \in \omega\}$ есть F_σ -множество первой категории в X , плотное во всем пространстве. Если пространство всюду полно по Бэру, то каждое $E \setminus F_E$ плотно в E ; поскольку $E \cap F_i = F_i^E$ для каждого $E \in \mathcal{E}$ и $i \in \omega$, то $E \cap S = F_E$ для каждого $E \in \mathcal{E}$. Тогда $X \setminus S$ есть плотное во всем пространстве G_δ -множество.

Напомним, что нормальное пространство называется *совершенно нормальным*, если всякое замкнутое его подмножество есть пересечение счетного семейства открытых подмножеств. Совершенно нормальные компакты весьма близки к метрическим. По теореме 1 метризуемое пространство максимально борелевски разложимо, а вот уже с совершенно нормальными компактами дело обстоит иначе.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Утверждение о борелевской разложимости совершенно нормального компакта неразрешимо в ZFC.*

Действительно, в ZFC невозможно доказать такое утверждение, ибо континуум Суслина бэровски, тем более борелевски, неразложим по следствию 1, а ведь он совершенно нормален и его существование совместно с ZFC (см. [10, с. 93–101]). С другой стороны, в

предположении аксиомы Мартина, соединенной с отрицанием континуум-гипотезы, всякий совершенно нормальный компакт X сепарабелен (см. [10, с. 101–110]). Пусть S – его счетное плотное подмножество. Тогда S есть плотное F_σ -множество, а его дополнение есть G_δ -множество, также плотное во всем пространстве, ибо $\text{Int } S = \emptyset$, так как любой компакт полон по Бэру.

Для полного понимания следствия 3 отметим специально, что бэровская неразложимость, тем более борелевская неразложимость, континуума Суслина есть следствие только его внутренних свойств (см. следствие 1) и никак не связаны с какими-нибудь специфическими свойствами модели, в которой он существует. Кроме того, напомним, что в предположении аксиомы Мартина, соединенной с отрицанием континуум-гипотезы, континуумов Суслина не существует.

ТЕОРЕМА 5. *В диадическом компакте есть дизъюнктное семейство мощности $\aleph_1$ плотных F_σ -подмножеств, так что он $\aleph_1$ борелевски разложим, причем слагаемые имеют тип F_σ .*

(В [9] было доказано, что любой диадический компакт имеет два плотных дизъюнктных подмножества: одно F_σ -множество, другое G_δ -множество.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как диадический компакт удовлетворяет условию Суслина, найдется максимальное дизъюнктное семейство $\mathcal{E}$ замкнутых G_δ -множеств с пустой внутренностью каждое. Из максимальной семейства вытекает, что его объединение плотно в пространстве. Согласно результату Б. А. Ефимова [11] в диадическом компакте любое семейство $\mathcal{P}$ G_δ -множеств имеет счетное подсемейство $\mathcal{P}'$ такое, что $\cup \mathcal{P} \subseteq [\cup \mathcal{P}']$. Найдем такое счетное подсемейство $\mathcal{E}_0$ для семейства $\mathcal{E}$. Ясно, что $\cup \mathcal{E}_0$ есть плотное в пространстве F_σ -множество. Теперь, так как всякий компакт всюду полон по Бэру, $\cup(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0)$ плотно в пространстве. Выделим из него опять-таки счетное подсемейство $\mathcal{E}_1$ такое, что $\cup(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0) \subseteq [\cup \mathcal{E}_1]$. Следовательно, $\cup \mathcal{E}_1$ плотно во всем компакте. Очевидно, что можно продолжить процесс по всем счетным ординалам. В результате получим желаемое семейство мощности $\aleph_1$ дизъюнктных плотных в пространстве F_σ -множеств.

ГИПОТЕЗА 1. *Диадические компакты максимально борелевски разложимы.*

Отметим теперь, что в сепарабельном компакте X без изолированных точек есть два дизъюнктных плотных борелевских подмножества: одно – это плотное счетное подмножество S , которое есть F_σ -множество, другое – это его дополнение $X \setminus S$, которое есть плотное G_δ -множество; таким образом, сепарабельный компакт без изолированных точек борелевски разложим. Однако, возникает следующая

ПРОБЛЕМА 1. Верно ли, что в любом сепарабельном компакте без изолированных точек есть (хотя бы) два дизъюнктных плотных F_σ -множества?

3. Разложимость результатов A -операции над открытыми подмножествами тихоновских кубов. Напомним, что такое A -операция. Пусть ω – первый бесконечный ординал.

Пусть ω^ω – множество всех функций из ω в ω и $\omega^{<\omega}$ – множество всех функций, определенных на начальных конечных сегментах $[0, n) \subset \omega$ или, что то же самое, $\omega^{<\omega}$ – это множество сужений $\{f|n : n \in \omega, f \in \omega^\omega\}$ полных функций из ω в ω на начальные конечные сегменты $[0, n) \subset \omega$.

Пусть X – произвольное множество и $\{F_p : p \in \omega^{<\omega}\}$ – система его подмножеств. Множество $\bigcup\{\bigcap\{F_{f|n} : n \in \omega\} : f \in \omega^\omega\}$ называется *результатом A -операции* над этой системой.

ТЕОРЕМА 6. *Любая сумма G_δ -множеств тихоновского куба максимально борелевски разложима, причем ее слагаемые есть F_σ -множества.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Результат A -операции над открытыми множествами тихоновского куба максимально борелевски разложим, причем слагаемые есть F_σ -множества.*

В самом деле, этот результат есть сумма некоторого семейства G_δ -множеств.

Доказательство теоремы 6 состоит из нескольких предложений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Тихоновский куб максимально борелевски разложим, причем слагаемые есть F_σ -множества.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним сначала, что σ -произведение по базисной точке – это множество всех точек куба I^α , отличных от базисной лишь на конечном числе координат. Как легко видеть, каждое σ -произведение по любой базисной точке плотно в таком кубе. Кроме того, оно есть F_σ -множество. Мощность любого σ -произведения равна мощности индексного множества; следовательно, различных σ -произведений в тихоновском кубе I^α ровно $\text{exp } \alpha$ и, поскольку различные σ -произведения дизъюнкты, требуемое доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Всякое G_δ -множество тихоновского куба максимально борелевски разложимо, причем слагаемые есть F_σ -множества.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае куба счетного веса это вытекает из его наследственной сепарабельности, так что рассмотрим куб несчетного веса. Итак, пусть X есть G_δ -множество тихоновского куба I^α несчетного веса. Тогда найдется счетное подмножество $N \subset \alpha$ и счетное подмножество $S \subset I^N$ такие, что $S \times I^{\alpha \setminus N}$ содержится в X и плотно в нем. Как только что доказано, тихоновский куб $I^{\alpha \setminus N}$ максимально борелевски разложим на F_σ -множества. Пусть $I^{\alpha \setminus N} = \bigcup\{Y_\beta : \beta \in \text{exp}(\alpha \setminus N)\}$ – это разложение; тогда F_σ -подмножества $S \times Y_\beta$, $\beta \in \text{exp}(\alpha \setminus N)$, дизъюнкты и плотны в X , что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\mathcal{E}$ – какое-нибудь семейство G_δ -множеств тихоновского куба. Тогда существует дизъюнктное семейство $\mathcal{E}'$ G_δ -множеств, вписанное в $\mathcal{E}$, такое, что $\bigcup \mathcal{E} \subseteq [\bigcup \mathcal{E}']$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение семейства $\mathcal{E}'$ проведем по трансфинитной индукции. Пусть $\mathcal{E} = \{E_\beta : \beta < \theta\}$. Положим $\mathcal{E}'_0 = \{E_0\}$. Теперь предположим, что для всех $\beta < \gamma$, где $\gamma < \theta$, уже определены некоторые семейства $\mathcal{E}'_\beta$ G_δ -множеств, причем $\bigcup \mathcal{E}'_\beta \subseteq E_\beta$, семейство $\mathcal{E}^*_\gamma = \bigcup\{\mathcal{E}'_\beta : \beta < \gamma\}$ дизъюнктно и $\bigcup\{E_\beta : \beta < \gamma\} \subseteq [\bigcup \mathcal{E}^*_\gamma]$. Теперь найдем счетное дизъюнктное семейство $\mathcal{E}'_\gamma$ (может быть, пустое) G_δ -множеств такое, что $\bigcup \mathcal{E}'_\gamma \subseteq E_\gamma \setminus [\bigcup \mathcal{E}^*_\gamma]$ и $E_\gamma \subseteq [(\bigcup \mathcal{E}^*_\gamma) \cup (\bigcup \mathcal{E}'_\gamma)]$. По завершении описанного процесса можно убедиться, что семейство $\bigcup\{\mathcal{E}'_\gamma : \gamma < \theta\}$ искомого.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $\mathcal{E}$ – какое-нибудь семейство G_δ -множеств тихоновского куба. Тогда существует счетное подсемейство $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ такое, что $\bigcup \mathcal{E} \subseteq [\bigcup \mathcal{E}']$.*

Это простое следствие уже упомянутого выше аналогичного утверждения Ефимова, относящегося к G_δ -множествам произвольного диадического компакта.

Теперь, используя предложения 1–4, завершим доказательство теоремы 6. Заметим сразу же, что в случае куба счетного веса любое его подпространство максимально борелевски разложимо на F_σ -множества, что вытекает из его наследственной сепарабельности, так что рассмотрим куб несчетного веса.

Пусть $\mathcal{E}$ – какое-нибудь семейство G_δ -множеств тихоновского куба I^α несчетного веса. По предложению 3 найдем дизъюнктное семейство $\mathcal{E}'$ G_δ -множеств такое, что $\cup \mathcal{E}' \subseteq \cup \mathcal{E}$ и $\cup \mathcal{E} \subseteq [\cup \mathcal{E}']$. По предложению 4 найдем счетное подсемейство $\mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{E}'$ такое, что $\cup \mathcal{E}' \subseteq [\cup \mathcal{E}'']$. По предложению 2 в каждом $E \in \mathcal{E}''$ найдется дизъюнктное семейство $\{F_\beta^E : \beta \in \text{exp } \alpha\}$ мощности $\text{exp } \alpha$ плотных в E F_σ -подмножеств. Пусть $F_\beta = \cup \{F_\beta^E : E \in \mathcal{E}''\}$ для каждого $\beta \in \text{exp } \alpha$. Тогда легко убедиться, что $\{F_\beta : \beta \in \text{exp } \alpha\}$ есть дизъюнктное семейство F_σ -подмножеств, плотных в $\cup \mathcal{E}$ и, следовательно, $\cup \mathcal{E}$ содержит максимально много дизъюнктивных плотных F_σ -подмножеств.

Заметим, что любая сумма G_δ -множеств тихоновского куба I^α имеет вес не более α , а дисперсионный характер $\text{exp } \alpha$ и, значит, максимально, т.е. $\text{exp } \alpha$ -разложима. Но нами доказано нечто большее – можно найти плотные дизъюнктивные F_σ -множества.

4. Разложимость A -, CA - и PCA -множеств в компактах. Результат A -операции над системой замкнутых подмножеств топологического пространства называется A -множеством в нем.

Исследование борелевских подмножеств из σ -кольца, порожденного замкнутыми подмножествами тихоновского куба, дает некоторые другие результаты (по сравнению с п. 3).

Действительно, всякое счетное подмножество в таком кубе принадлежит указанному σ -кольцу, но поскольку существуют счетные тихоновские неразложимые пространства (такие построил еще Хьюитт), стало быть, существуют элементы этого кольца, не разложимые в классическом смысле, тем более борелевски неразложимые.

Но счетный случай частенько оказывается особым при исследовании борелевских и A -множеств, так что следующие результаты представляются вполне естественными.

ТЕОРЕМА 7. *Регулярное подпространство несчетного дисперсионного характера, являющееся A -множеством в счетно компактном T_1 -пространстве, разложимо.*

СЛЕДСТВИЕ 5. *Подпространство несчетного дисперсионного характера, являющееся A -множеством в регулярном счетно компактном пространстве (в частности, в компакте), разложимо.*

Напомним, что A -множества включают в себя все элементы σ -борелиана, порожденного замкнутыми множествами, в частности, каждое F_σ -множество есть A -множество. (*Борелиан* – наименьшее семейство, содержащее данное и замкнутое относительно счетных сумм и пересечений.)

СЛЕДСТВИЕ 6. *Регулярное σ -компактное пространство несчетного дисперсионного характера разложимо.*

Такое пространство вполне регулярно, а значит, вкладывается в тихоновский куб, и там оно есть A -множество.

Перейдем теперь к исследованию более специальных подмножеств топологических пространств. Эти подмножества появились в классической дескриптивной теории множеств.

Напомним, что *СА-множества* – это дополнения к *A*-множествам. Возьмем теперь произведение двух пространств $X_1 \times X_2$, и пусть π_1 – проекция из этого произведения на X_1 . Пусть E есть *A*-множество в $X_1 \times X_2$. Тогда $T = \pi_1(X_1 \times X_2 \setminus E)$ называется *РСА-множеством*, а $X_1 \setminus T$ называется *СРСА-множеством*. Легко видеть, что это множество есть малый образ *A*-множества E , т.е. $X_1 \setminus T = \{x \in X_1 : \pi_1^{-1}(x) \subset E\}$. Если оба сомножителя X_1, X_2 компактны, то будем говорить о *РСА*- и *СРСА*-множествах в компактах.

ТЕОРЕМА 8. *Дополнение к финально компактному подпространству регулярного счетно компактного пространства разложимо.*

Напомним, что всякое *A*-множество в компакте финально компактно; следовательно, *СА*-множество в компакте есть дополнение к финально компактному подпространству. Так что теорема 8 влечет

СЛЕДСТВИЕ 7. *СА-множество в компакте разложимо.*

ТЕОРЕМА 9. *Пусть E – финально компактное подпространство регулярного счетно компактного произведения $X_1 \times X_2$. Тогда подпространство $\pi_1(X_1 \times X_2 \setminus E)$ разложимо.*

Напомним, что π_1 – проекция из этого произведения на X_1 .

СЛЕДСТВИЕ 8. *РСА-множество в компактах разложимо.*

Приводимые далее примеры придают некоторую завершенность результатам данной части.

ПРИМЕР 1. Хаусдорфово неразложимое счетно компактное пространство. Подобный пример построен также О. Павловым. Он использовал другую идею.

ПРИМЕР 2. Хаусдорфово неразложимое σ -компактное пространство.

ПРИМЕР 3. Тихоновское пространство и в нем два σ -компактных подпространства, разность которых имеет несчетный дисперсионный характер и неразложима.

Пространство из примера 2 финально компактно. С учетом того, что *A*-множество в компакте также финально компактно, представляется интересной следующая

ПРОБЛЕМА 2. Разложимо ли регулярное финально компактное пространство несчетного дисперсионного характера?

Отметим, что финально компактная группа несчетного дисперсионного характера максимально разложима (см. [12]).

Подчеркнем, что в проблеме 2 речь идет о неразложимости в классическом смысле, ибо существуют компакты, которые бэровски (тем более борелевски) неразложимы (см. выше п. 2).

ПРОБЛЕМА 3. Разложимо ли *СРСА*-множество в компактах?

Перейдем теперь к доказательству теорем 7–9 и конструкциям примеров 1–3.

Начнем с определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка x называется *lsd-точкой*, если существует множество M , точки которого имеют дизъюнктное семейство открытых окрестностей $\mathcal{V} = \{V_m : m \in M\}$, так что $x \in [M]$, но $x \notin \cup \mathcal{V}$. (Название “lsd” образовано начальными буквами слов “a Limit point of a Strongly Discrete subspace”. Такой тип точек был введен в [13] под другим названием.)

Следующая лемма взята из [13].

ЛЕММА 1. *Если пространство состоит только из lsd-точек, то оно $\aleph_0$ -разложимо.*

Эту лемму использует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если всякое непустое открытое подмножество хаусдорфова пространства содержит бесконечное счетно компактное подмножество, то пространство разложимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что множество L lsd-точек плотно в таком пространстве. Действительно, пусть W – непустое открытое подмножество; тогда в нем есть бесконечное счетно компактное подмножество B . Так как B бесконечно, а пространство хаусдорфово, найдется бесконечное дизъюнктное семейство $\mathcal{V}$ открытых множеств таких, что $V \cap B \neq \emptyset$ для всякого $V \in \mathcal{V}$. Выберем по точке $m(V)$ в каждом таком $V \cap B$. Так как B счетно компактно, множество точек $M = \{m(V) : V \in \mathcal{V}\}$ имеет предельную точку $x \in B \subset W$. Это и есть lsd-точка. Итак, доказано, что множество L lsd-точек плотно в рассматриваемом пространстве.

Далее используем

КРИТЕРИЙ НЕРАЗЛОЖИМОСТИ ХЬЮИТТА. *Пространство неразложимо, если и только если оно содержит непустое открытое подмножество, в котором всякое плотное в себе подмножество неразложимо.*

Теперь покажем, что в нашем пространстве такого открытого подмноества нет, чем и завершим доказательство предложения 5. Пусть W – какое-нибудь непустое открытое подмножество. Возможны два варианта: $\text{Int}(L \cap W) \neq \emptyset$ или $\text{Int}(L \cap W) = \emptyset$. Но в первом варианте $\text{Int}(L \cap W)$ даже $\aleph_0$ -разложимо согласно лемме 1, во втором же варианте W разложимо, потому что дизъюнктные множества $L \cap W$ и $W \setminus L$ имеют пустые внутренности и, значит, оба плотны в W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.

ЛЕММА 2. *Несчетное A -множество в счетно компактном T_1 -пространстве содержит бесконечное замкнутое во всем пространстве подмножество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система подмножеств $\{F_p : p \in \omega^{<\omega}\}$ называется *регулярной*, если $F_s \supseteq F_t$, когда $s \subseteq t$. Известно, что при исследовании A -множеств можно ограничиться регулярными системами, так что в дальнейшем соответствующие системы будут предполагаться регулярными. Пусть A -множество E получено из системы $\{F_p : p \in \omega^{<\omega}\}$. Объединение всех элементов F_p , для которых пересечение $E \cap F_p$ счетно, также счетно; следовательно, существует $f \in \omega^\omega$ такая, что каждое множество $F_{f|n}$ несчетно.

Фиксируем какую-либо такую f . Заметим, что $\cap \{F_{f|n} : n \in \omega\}$; поэтому если это множество бесконечно, то доказывать нечего – бесконечное замкнутое подмножество в E найдено. Так что пусть это множество конечно. Но тогда найдется последовательность

кортежей $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \dots$ таких, что $f = \cup\{p_i : i \in \omega\}$ и $E \cap (F_{p_i} \setminus F_{p_{i+1}}) \neq \emptyset$ для всякого $i \in \omega$. В каждом таком множестве зафиксируем точку x_i . Теперь легко убедиться, что $\{x_i : i \in \omega\} \cup (\cap\{F_{f|n} : n \in \omega\})$ есть бесконечное замкнутое во всем пространстве подмножество, содержащееся в E .

Пусть E – какое-нибудь регулярное подпространство несчетного дисперсионного характера, являющееся A -множеством в счетно компактном T_1 -пространстве X . Покажем, что всякое непустое открытое подмножество $W \subset E$ содержит бесконечное замкнутое во всем пространстве подмножество. Это подмножество, очевидно, счетнокомпактно, и нам остается сослаться на предложение 5.

Итак, пусть W – какое-нибудь непустое открытое подмножество E . Пусть $x \in W$. Так как E регулярно, найдется открытая в E окрестность V точки x такая, что $[V]_E \subset W$. Но дисперсионный характер E несчетен, а значит, V несчетно, тем более несчетно $[V]_E$. Очевидно, $[V]_E$ есть A -множество в X , и вдобавок, несчетное, как только что установлено. Значит, по лемме 2 оно содержит бесконечное замкнутое во всем пространстве подмножество. Но это и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.

ЛЕММА 3. *Всякая неизолированная точка в дополнении к финально компактному подпространству регулярного счетно компактного пространства является предельной в бесконечном подмножестве этого дополнения, замкнутом во всем пространстве.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – финально компактное подпространство регулярного счетно компактного пространства X и x – неизолированная точка в $X \setminus E$. Для всякой точки $e \in E$ фиксируем два открытых множества V_e и W_e таких, что $x \in V_e$, $e \in W_e$ и $[V_e] \cap W_e = \emptyset$. Так как E финально компактно, существует счетное семейство $\mathcal{V}$ множеств $[V_e]$, так что $(\cap \mathcal{V}) \cap E = \emptyset$. Пусть $K = \cap \mathcal{V}$. Если x – предельная точка K , то все доказано. Иначе, существует открытая окрестность Q точки x такая, что $\{x\} = Q \cap K$. Но тогда $\{x\} = Q \cap \{V : [V] \in \mathcal{V}\}$, т.е. $\{x\}$ есть G_δ -множество в регулярном счетно компактном пространстве, значит x имеет счетный характер. Но тогда, поскольку x – неизолированная точка в $X \setminus E$, ей соответствует сходящаяся последовательность, лежащая в $X \setminus E$.

Теперь докажем непосредственно теорему 8. Пусть E – финально компактное подпространство регулярного счетно компактного подпространства X . Докажем, что $X \setminus E$ разложимо (если оно, конечно, не имеет изолированных точек, что предполагается всюду в данной работе, когда речь идет о разложимости). Пусть W – непустое открытое подмножество X и $W \setminus E \neq \emptyset$. В силу регулярности найдется непустое открытое подмножество $V \subset W$ такое, что $[V] \subset W$ и $V \setminus E \neq \emptyset$. Но $[V]$ счетно компактно и $E \cap [V]$ финально компактно. Согласно лемме 3 любая точка из $V \setminus E$ является предельной в некотором бесконечном подмножестве, лежащем в $[V] \setminus E$. Далее осталось сослаться на предложение 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.

ЛЕММА 4. *Пусть E – финально компактное подпространство регулярного счетно компактного произведения $X_1 \times X_2$. Тогда всякая неизолированная точка из $T = \pi_1(X_1 \times X_2 \setminus E)$ является предельной в бесконечном подмножестве из T , замкнутом в X_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что существует $y \in X_2$ такая, что $(x, y) \notin E$. Для всякой точки $e \in E$ фиксируем два открытых подмножества произведения $X_1 \times X_2$: “прямоугольное” открытое множество $V_e = V_1^e \times V_2^e$, где V_1^e, V_2^e – открытые окрестности точек x, y в пространствах X_1, X_2 соответственно, и открытое множество W_e такое, что $e \in W_e$ и $[V_e] \cap W_e = \emptyset$. Так как E финально компактно, существует счетное семейство $\mathcal{V}$ множеств $[V_e]$, так что $(\cap \mathcal{V}) \cap E = \emptyset$. Пусть $K = \pi_1(\cap \mathcal{V})$. Если x – предельная точка K , то все доказано. Иначе, существует открытая окрестность Q точки x в X_1 такая, что $\{x\} = Q \cap K$. Но тогда $\{x\}$ есть G_δ -множество в регулярном счетно компактном пространстве X_1 , значит x имеет счетный характер в нем. Но тогда, поскольку x – неизолированная точка в T , к ней имеется сходящаяся последовательность, лежащая в T .

Далее доказательство теоремы 9 проходит примерно так же, как и теоремы 8, – с использованием леммы 4 и затем предложения 5.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРА 1. Пусть X – какое-нибудь сепарабельное экстремально не связное компактное или счетно компактное регулярное пространство без изолированных точек (например, абсолют отрезка $[0, 1]$). Тогда X не имеет сходящихся последовательностей; следовательно, всякое бесконечное замкнутое подмножество в нем несчетно. Пусть S – какое-нибудь счетное плотное подмножество X . Обозначим топологию на X через ν , а топологию подпространства на S через τ .

ЛЕММА 5. Пусть τ' – какая-нибудь топология на S , большая чем τ , и $\nu' = \nu \cup \tau'$. Тогда (X, ν') хаусдорфово и счетно компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим только счетную компактность, хаусдорфовость очевидна. Ясно, что если $x \in X \setminus S$ и $x \in V \in \nu'$, то $V \in \nu$. Пусть B – какое-нибудь бесконечное подмножество X . Тогда $[B]_{\nu'} \supseteq ([B]_\nu \setminus S)$, тем самым, $[B]_\nu$ несчетно. Доказана счетная компактность.

Продолжим описание примера 1. Известно, что для всякой топологии на бесконечном множестве существует большая неразложимая топология (также плотная в себе). Пусть τ^+ – какая-нибудь неразложимая топология на S , большая чем τ , и $\nu^+ = \nu \cup \tau^+$. Тогда пространство (X, ν^+) искомое: оно хаусдорфово, неразложимо и счетно компактно.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРА 2. Предварительно сконструируем некоторое необходимое для дальнейшего пространство. Возьмем бэровское пространство веса $\aleph_1$, т.е. произведение $\aleph_0$ копий дискретного пространства мощности $\aleph_1$. Это метрическое пространство, в котором всякое счетное подмножество нигде не плотно. Фиксируем какую-нибудь σ -дискретную базу $\cup \{\mathcal{B}_i : i \in \omega\}$. Выберем из каждого элемента семейства $\mathcal{B}_i$ по точке и обозначим множество выбранных точек X_i . Выбор можно организовать так, что все различные подмножества $X_i, i \in \omega$, дизъюнкты. Пусть $X = \cup \{X_i : i \in \omega\}$. Обозначим топологию подпространства на X через ρ . Итак, в (X, ρ) слагаемые X_i дизъюнкты, дискретны и замкнуты, более того, точки каждого X_i имеют дизъюнктное семейство открытых окрестностей; более того, точки любой суммы $X_i \cup X_k$ также имеют дизъюнктное семейство открытых окрестностей; и, наконец, каждое счетное подмножество всего X нигде не плотно.

Выше уже упоминалось, что для всякой топологии на бесконечном множестве существует большая неразложимая топология (также плотная в себе). В нашем случае для

топологии ρ найдется большая неразложимая и несчетного дисперсионного характера топология. Обозначим ее через τ .

Возьмем теперь для всякого $i \in \omega$ какую-нибудь компактификацию bX_i дискретного пространства X_i ; обозначим через ν_i топологию на bX_i . Будем считать множества $(bX_i \setminus X_i)$ дизъюнктными. Пусть $Z = \bigcup \{bX_i : i \in \omega\}$. Рассмотрим на Z топологию ν , определенную так: $V \in \nu$, если и только если $V \cap X \in \tau$ и $V \cap bX_i \in \nu_i$ для всякого $i \in \omega$. Нетрудно убедиться, что пространство (Z, ν) искомое: оно хаусдорфово, σ -компактно, его открытое подпространство (X, τ) неразложимо, а следовательно, и само (Z, ν) неразложимо.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРА 3. Возьмем пространство (X, τ) из предыдущего примера. Пусть βX – его стоун-чеховское компактное расширение. Пусть для всякого $i \in \omega$ bX_i есть замыкание в βX дискретного пространства X_i . Все подпространства $bX_i \setminus X_i$ попарно дизъюнкты. Пусть $Z = \bigcup \{bX_i : i \in \omega\}$ и $Y = \bigcup \{bX_i \setminus X_i : i \in \omega\}$. Очевидно, что оба пространства Z, Y σ -компактны и их разность $Z \setminus Y$ есть пространство (X, τ) , которое неразложимо и имеет несчетный дисперсионный характер.

Автор выражает благодарность В. Шиголеву за плодотворное обсуждение некоторых вопросов, относящихся к данной заметке, и рецензенту за многочисленные замечания и предложения, направленные на улучшение стиля и содержания заметки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hewitt E. A problem of set-theoretic topology // Duke Math. J. 1943. V. 10. P. 309–333.
- [2] Катетов М. О топологических пространствах, не содержащих плотных дизъюнктивных подмножеств // Матем. сб. 1947. Т. 21. № 1. С. 3–12.
- [3] Величко Н. В. К теории разложимых пространств // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 2. С. 209–214.
- [4] Пыткеев Е. Г. О максимально разложимых пространствах // Тр. МИАН. 1983. Т. 154. С. 209–213.
- [5] Comfort W. W., Garcia-Ferreira S. Resolvability: a selective survey and some new results // Topology Appl. 1996. V. 74. P. 149–167.
- [6] Малахын В. И. Экстремально-несвязные и близкие к ним группы // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 1. С. 27–30.
- [7] Comfort W. W., van Mill J. Groups with only resolvable group topologies // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. P. 687–696.
- [8] Ceder J. On maximally Borel resolvable spaces // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1966. V. 11. P. 89–94.
- [9] Jimenez R., Malykhin V. I. Structure resolvability // Comment. Math. Univ. Carolin. 1998. V. 39. № 2. P. 379–388.
- [10] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
- [11] Ефимов Б. А. Диалектические бикомпакты // Тр. ММО. 1965. Т. 14. С. 211–247.
- [12] Малахын В. И. Максимальная разложимость ограниченных групп // Матем. заметки. (в печати).
- [13] Sharma P. L., Sharma S. Resolution properties in generalized k -spaces // Topology Appl. 1989. V. 29. P. 61–66.