Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Медведева, О вложении классов H^ω , *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 713–719

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:18:14

УДК 517.518.2

О ВЛОЖЕНИИ КЛАССОВ H^ω

М. В. Медведева

В работе рассматриваются функции классов V_φ и ΛBV , которые встречаются в теории тригонометрических рядов Фурье. Получены необходимые и достаточные условия вложений классов H^ω в классы V_φ и ΛBV .

Библиография: 7 названий.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия вложений $H^\omega \subset V_\varphi$ и $H^\omega \subset \Lambda BV$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $\omega(t)$, определенная, непрерывная и неубывающая на $[0, +\infty)$, называется *модулем непрерывности*, если $\omega(0) = 0$ и $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$ для неотрицательных t_1 и t_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть функция φ , определенная на $[0, +\infty)$, непрерывна, строго возрастает и $\varphi(0) = 0$. Будем говорить, что функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является *функцией с φ -ограниченной вариацией* ($f \in V_\varphi$), если

$$\sup_G \sum_{k=1}^N \varphi(|f(s_k) - f(s_{k-1})|) < \infty,$$

где супремум берется по всем разбиениям $G = \{s_k\}$ отрезка $[a, b]$, $a \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n \leq b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — монотонная последовательность положительных чисел такая, что $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} = \infty.$$

Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией с Λ -ограниченной вариацией* ($f \in \Lambda BV$), если

$$\sup_G \sum_{k=1}^N \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{\lambda_k} < \infty,$$

где супремум берется по всем системам G непересекающихся интервалов (a_k, b_k) из отрезка $[a, b]$.

Функции классов V_φ и ΛBV рассматриваются в теории тригонометрических рядов Фурье (см. [1]–[3]).

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № 96/97-15-96073.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $1 \leq p < \infty$. Модулем непрерывности 2π -периодической функции $\psi \in L^p(0, 2\pi)$ называется

$$\omega_p(\delta, \psi) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left(\int_0^{2\pi} |\psi(t+h) - \psi(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 \leq \delta \leq 2\pi.$$

В случае непериодических функций $\psi \in L^p(0, 1)$ модуль непрерывности определяется так:

$$\omega_p(\delta, \psi) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |\psi(t+h) - \psi(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

Пусть $\omega(\delta)$ – данный модуль непрерывности. Тогда через $H_p^\omega \equiv H_p^{\omega(\delta)}$ обозначают множество функций $f(t)$, для каждой из которых $\omega_p(\delta, f) = O(\omega(\delta))$. Через H^ω обозначают множество непрерывных на $[0, 1]$ функций $f(t)$, для которых $\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta))$, где

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{0 \leq h \leq \delta \\ 0 \leq x \leq 1-h}} |f(x+h) - f(x)|.$$

Если даны числа $\alpha > 0$ и $1 \leq p < \infty$, то через $\text{Lip}(\alpha, p)$ обозначается класс функций $H_p^{\delta^\alpha}$.

Ранее были доказаны неусиливаемые теоремы для различных классов функций.

ТЕОРЕМА А. Пусть даны числа $0 < \alpha \leq 1 \leq p < \nu < \infty$ и модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда для того чтобы имело место вложение

$$H_p^{\omega(\delta)} \subset H_\nu^{\delta^\alpha} \equiv \text{Lip}(\alpha, \nu),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega(\delta) = O(\delta^{\alpha+1/p-1/\nu}) \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0+.$$
 (1)

Достаточность условия (1) была установлена Харди и Литтлвудом [4] в 1928 году, а необходимость П. Л. Ульяновым [5] в 1967 году. Отметим также, что в работе [5] доказана

ТЕОРЕМА Б. Пусть даны числа $1 \leq p < \nu < \infty$ и модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда для того чтобы имело место вложение

$$H_p^{\omega(\delta)} \subset L_\nu(0, 1),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu/p-2} \omega^\nu\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

В дальнейшем функции будем рассматривать только на отрезке $[0, 1]$.

Пусть $1 \leq p < \infty$. Обозначим через V_p класс V_φ , где $\varphi(t) = t^p$. В статье О. Ковачика [6] содержится следующая теорема.

ТЕОРЕМА В. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности. Тогда

- а) если $\omega(t) = O(t^{1/p})$ при $t \rightarrow 0+$, то $H^\omega \subset V_p$;
- б) если $\omega(t) \neq O(t^{1/p})$ и, более того, $t^{1/p} = o(\omega(t))$ при $t \rightarrow 0+$, то существует функция $f \in H^\omega$ такая, что $f \notin V_p$.

Мы докажем более общее утверждение, частным случаем которого является теорема В.

ТЕОРЕМА 1. Пусть φ – выпуклая на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$ и существует число $c > 1$, для которого

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(cx)}{\varphi(x)} < \infty.$$

Тогда для вложения $H^\omega \subset V_\varphi$ необходимо и достаточно, чтобы $\omega(t) = O(\varphi^{-1}(t))$ при $t \rightarrow 0+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Так как для некоторого числа $c > 1$ верхний предел

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(cx)}{\varphi(x)} < \infty,$$

то

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(ax)}{\varphi(x)} < \infty$$

для всякого $a > 0$.

Пусть $f \in H^\omega$, т.е. $\omega(t, f) \leq c_0 \omega(t)$. Так как $\omega(t) = O(\varphi^{-1}(t))$ при $t \rightarrow 0+$, существует $c_1 > 0$ такое, что $\omega(t) \leq c_1 \varphi^{-1}(t)$ при $t \in [0, 1]$.

Имеем

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(c_0 c_1 x)}{\varphi(x)} < \infty.$$

Поэтому найдется $c_2 > 0$, при котором $\varphi(c_0 c_1 x) \leq c_2 \varphi(x)$ для $x \in [0, \varphi^{-1}(1)]$.

Пусть $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \varphi(|f(s_k) - f(s_{k-1})|) &\leq \sum_{k=1}^N \varphi(\omega(s_k - s_{k-1}, f)) \leq \sum_{k=1}^N \varphi(c_0 \omega(s_k - s_{k-1})) \\ &\leq \sum_{k=1}^N \varphi(c_0 c_1 \varphi^{-1}(s_k - s_{k-1})) \leq \sum_{k=1}^N c_2 \varphi(\varphi^{-1}(s_k - s_{k-1})) \leq c_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $f \in V_\varphi$.

Необходимость. Предположим, что $H^\omega \subset V_\varphi$, но $\omega(t) \neq O(\varphi^{-1}(t))$ при $t \rightarrow 0+$. Тогда $\omega(t) \not\leq 0$.

Известно, что для каждого модуля непрерывности $\omega(t) \not\leq 0$ существует вогнутый модуль непрерывности $\omega^*(t)$ такой, что $\omega(t) \leq \omega^*(t) \leq 2\omega(t)$ при $t \in [0, 1]$ (см. [7, с. 182]). Тогда класс H^ω совпадает с классом H^{ω^*} и мы можем считать, что ω – вогнутый модуль непрерывности, т.е.

$$\omega(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \geq \alpha \omega(t_1) + (1 - \alpha)\omega(t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Если для некоторых $0 \leq x < y \leq 1$ выполнено $\omega(x) = \omega(y)$, то из вогнутости и неубывания ω на $[0, 1]$ следует, что $\omega(z) = \omega(x)$ для всех $z \in [x, 1]$. Так как $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \not\equiv 0$ и ω — непрерывная функция на $[0, +\infty)$, найдется число $t_0 \in [0, 1]$ такое, что на $[0, t_0]$ функция ω строго возрастает. Обозначим $T_0 = \omega(t_0)$. Тогда на $[0, T_0]$ можно определить функцию ω^{-1} , обратную к ω .

Возьмем убывающую последовательность $y_1, y_2, \dots$ из интервала $(0, t_0)$ такую, что $y_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $\omega(y_k) > 2^k \varphi^{-1}(y_k)$.

Обозначим $z_k = \omega(y_k)$. Тогда $\omega^{-1}(z_k) = y_k$ и $\varphi(z_k) = \varphi(\omega(y_k)) > \varphi(2^k(\varphi^{-1}(y_k)))$, так как φ строго возрастает. Из выпуклости φ следует, что $\varphi(ax) \geq a\varphi(x)$ при $a \geq 1$. Поэтому $\varphi(z_k) > 2^k \varphi(\varphi^{-1}(y_k)) = 2^k y_k = 2^k \omega^{-1}(z_k)$.

Значит,

$$\omega^{-1}(z_k) < \frac{1}{2^k} \varphi(z_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как ω^{-1} и φ непрерывны на $[0, T_0]$, это неравенство выполняется в некоторой окрестности точки z_k . Возьмем в этой окрестности конечное число точек t_s таких, что

$$1 \leq \sum_{s=a_{k-1}+1}^{a_k} \varphi(t_s) \leq 1 + \varphi(T_0),$$

где $a_0 = 0$. Получим убывающую последовательность $t_1, t_2, \dots$ из интервала $(0, T_0)$ такую, что $t_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1,$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k) = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-1}(t_k) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \varphi(T_0)}{2^n} < \infty.$$

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-1}(t_k) = d$. Можно считать, что $d > 1$. Обозначим

$$x_0 = 0, \quad x_{2k} = x_{2k-2} + \frac{1}{d} \omega^{-1}(t_k), \quad x_{2k-1} = \frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2d\omega(x - x_{2k}), & x \in [x_{2k}, x_{2k+1}], \\ 2d\omega(x_{2k+2} - x), & x \in [x_{2k+1}, x_{2k+2}], \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, \quad f(1) = 0.$$

Тогда $f \in C[0, 1]$. Покажем, что $f \in H^\omega$. Имеем

$$\omega(h, f) = \sup_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ |x - y| \leq h}} |f(x) - f(y)|.$$

Наибольшее значение $|f(x) - f(y)|$ принимает, когда точки x и y принадлежат одному интервалу монотонности функции f .

Если $x, y \in [x_{2k}, x_{2k+1}]$, то

$$|f(x) - f(y)| = 2d|\omega(x - x_{2k}) - \omega(y - x_{2k})| \leq 2d\omega(|x - y|) \leq 2d\omega(h),$$

так как для $t_1, t_2 \geq 0$ разность $\omega(t_1 + t_2) - \omega(t_2) \leq \omega(t_1)$.

Для $x, y \in [x_{2k+1}, x_{2k+2}]$ также $|f(x) - f(y)| \leq 2d\omega(h)$. Следовательно, $\omega(h, f) \leq 2d\omega(h)$, т.е. $f \in H^\omega$.

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f(x_{k+1}) - f(x_k)|) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi(|f(x_{2k+1}) - f(x_{2k})|) + \varphi(|f(x_{2k+2}) - f(x_{2k+1})|)) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f(x_{2k+1})|) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(2d\omega(x_{2k+1} - x_{2k})) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(2d\omega\left(\frac{1}{2d}\omega^{-1}(t_{k+1})\right)\right). \end{aligned}$$

Так как ω – вогнутая функция и $1/(2d) < 1$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f(x_{k+1}) - f(x_k)|) \geq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(2d\frac{1}{2d}\omega(\omega^{-1}(t_{k+1}))\right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(t_{k+1}) = \infty.$$

Поэтому $f \notin V_\varphi$. Получили противоречие. Значит, $\omega(t) = O(\varphi^{-1}(t))$ при $t \rightarrow 0+$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда для вложения $H^\omega \subset V_p$ необходимо и достаточно, чтобы $\omega(t) = O(t^{1/p})$ при $t \rightarrow 0+$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что если в условии теоремы 1 предположить, что существует $c > 1$, при котором

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(cx)}{\varphi(x)} = \infty,$$

то условие $\omega(t) = O(\varphi^{-1}(t))$ при $t \rightarrow 0+$ будет являться необходимым, но не достаточным для вложения $H^\omega \subset V_\varphi$.

ТЕОРЕМА 2. Для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $t_k \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq 1$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k)}{\lambda_k}$$

сходился.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим $H^\omega \subset \Lambda BV$, но существует последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $t_k \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k)}{\lambda_k} = \infty.$$

Обозначим

$$x_0 = 0, \quad x_{2k} = x_{2k-2} + t_k, \quad x_{2k-1} = \frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Возьмем функцию

$$f(x) = \begin{cases} \omega(2(x - x_{2k})), & x \in [x_{2k}, x_{2k+1}], \\ \omega(2(x_{2k+2} - x)), & x \in [x_{2k+1}, x_{2k+2}], \\ 0, & x \in [\sum_{k=1}^{\infty} t_k, 1], \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

Легко показать, что $f \in H^\omega$. Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(x_{2k-1}) - f(x_{2k-2})|}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(x_{2k-1})|}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k)}{\lambda_k} = \infty,$$

т.е. $f \notin \Lambda BV$. Получили противоречие.

Достаточность. Здесь мы также можем считать, что ω – вогнутый модуль непрерывности.

Покажем, что найдется число $M > 0$ такое, что для всякой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq 1$, сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k)}{\lambda_k} \leq M.$$

Предположим, что такого числа не существует. Тогда для всякого $i = 1, 2, \dots$ найдется последовательность $\{t_{k,i}\}_{k=1}^{\infty}$, $t_{k,i} \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} t_{k,i} \leq 1$, для которой

$$2^i < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_{k,i})}{\lambda_k} < \infty.$$

Возьмем

$$t_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_{k,i}}{2^i}.$$

Тогда $t_k \geq 0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

В силу вогнутости и непрерывности ω получим

$$\omega(t_k) = \omega\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_{k,i}}{2^i}\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega(t_{k,i})}{2^i}.$$

По условию ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k)}{\lambda_k}$$

сходится, но

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k)}{\lambda_k} &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega(t_{k,i})}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_{k,i})}{\lambda_k} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} 2^i = \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие означает существование $M > 0$ такого, что если $t_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k)}{\lambda_k} \leq M.$$

Пусть $f \in H^\omega$, т.е. $\omega(t, f) \leq c\omega(t)$, и пусть (a_k, b_k) , $k = 1, \dots, N$, — система непересекающихся интервалов из отрезка $[0, 1]$.

Тогда $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) \leq 1$ и

$$\sum_{k=1}^N \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^N \frac{\omega(b_k - a_k, f)}{\lambda_k} \leq c \sum_{k=1}^N \frac{\omega(b_k - a_k)}{\lambda_k} \leq cM.$$

Поэтому $f \in \Lambda BV$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Young L. C. General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series // Math. Ann. 1938. V. 115. № 4. P. 581–612.
- [2] Саакян А. А. О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // Изв. АН АзССР. Матем. 1987. № 6. С. 517–529.
- [3] Waterman D. On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 1972. V. 44. № 2. P. 107–117.
- [4] Hardy G. H., Littlewood J. E. A convergence criterion for Fourier series // Math. Z. 1928. V. 28. № 4. P. 612–634.
- [5] Ульянов П. Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 3. С. 649–686.
- [6] Kovacik O. On the embedding $H^\omega \subset V_p$ // Math. Slovaca. 1993. V. 43. № 5. P. 573–578.
- [7] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
22.07.97