Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Панов, О числе периодических решений полиномиальных дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 720–727

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1448>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:39:13

УДК 517.98

О ЧИСЛЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Панов

Для специальных классов обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с переменными коэффициентами получены оценки числа периодических решений.
Библиография: 5 названий.

Введение. В работе исследуется число периодических решений полиномиального дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами вида

$$\dot{x} = x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_0(t), \quad (1)$$
$$a_j(t+T) = a_j(t).$$

Вопрос об оценке сверху числа решений уравнения (1) может считаться облегченным вариантом шестнадцатой проблемы Гильберта [1]. Однако и в этом варианте проблема решена лишь для $n \leq 3$. Для таких n число предельных циклов уравнения (1) не превышает n . Для $n = 1$ это утверждение следует из линейности уравнения. При $n = 2$ преобразование монодромии уравнения (1) за период дробно-линейно, нетождественно и поэтому не может иметь больше двух неподвижных точек. При $n = 3$ число периодических решений оценено в работах [2] и [3] (с указанием на то, что результат принадлежит Смейлу).

В п. 2 настоящей работы этот результат усилен. А именно, доказано, что уравнение

$$\dot{x} = x^{2n+1} + a(t)x^2 + b(t) \quad (2)$$

имеет не более трех периодических решений. Доказательство основано на монотонности по t двойного отношения значений любых четырех решений уравнения (2).

При $n = 4$ число периодических решений уравнения (1) может быть равно шести [2]. В п. 3 настоящей работы построен новый класс уравнений (1) с $n = 4$ и шестью периодическими решениями. Построение основано на существовании поля плоскостей в $\mathbb{R}^3$, свойства которого в значительной мере определяют поведение решений уравнения (1) при $n = 4$.

При малых коэффициентах уравнение (1) имеет не более n периодических решений с учетом кратности. Это следует из принципа Рунге, примененного к комплексификации преобразования монодромии за период T . В п. 1 явно указана зависящая от T и n константа C такая, что неравенства $|a_j| < C$ гарантируют наличие не более чем n циклов у уравнения (1).

Работа выполнена при поддержке фонда CRDF, грант RM1-229, фонда INTAS, грант № 93-05-07, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01258.

1. Уравнения с малыми периодическими коэффициентами. Рассмотрим уравнение вида (1) с периодически зависящими от времени коэффициентами $a_i(t+T) = a_i(t)$. Пусть $\varphi(x, t)$ – решение этого уравнения с начальным условием $\varphi(x, 0) = x$. В дальнейшем через Φ мы будем обозначать отображение последования $\Phi: x \rightarrow \varphi(x, T)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T = 1/(6n)$ и для любого t корни многочлена

$$x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_0(t),$$

включая комплексные, по модулю не превосходят $\pi/(2n)$. Тогда отображение последования имеет не более n неподвижных точек.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно было бы вместо периода $T = 1/(6n)$ взять период $T = 2\pi$ и тогда константу $\pi/(2n)$ в условии теоремы следовало бы заменить на

$$\frac{\pi/12}{(12\pi n)^{1/(n-1)}}.$$

Для доказательства теоремы комплексифицируем уравнение (1) по x и разложим правую часть на множители:

$$\dot{z} = (z - b_1(t))(z - b_2(t)) \dots (z - b_n(t)), \quad |b_i(t)| < \frac{\pi}{2n}. \quad (3)$$

Предполагается, что все функции $b_i(t)$ гладкие. Будет доказано, что отображение последования

$$\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \varphi\left(z, \frac{1}{6n}\right),$$

имеет ровно n неподвижных точек. Доказательство опирается на следующие две леммы.

ЛЕММА 1. Фазовая кривая любого периодического решения с периодом T уравнения (3) обязана пересекаться с кругом $|z| \leq 1$.

ЛЕММА 2. Существует число $R(n)$, $R(n) > 1$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) для всякого уравнения вида (3) отображение последования Φ определено на всем круге $|z| \leq R(n)$;
- 2) ни одна из периодических фазовых кривых уравнения (3) не пересекает окружность $|z| = R(n)$.

Покажем, как из этих двух лемм следует теорема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из лемм 1 и 2 вытекает, что все периодические фазовые кривые уравнения (3) лежат внутри круга $|z| < R(n)$. Другими словами, для всякого уравнения вида (3) отображение $z \mapsto \Phi(z) - z$ не обращается в 0 на окружности $|z| = R(n)$. Поэтому можно определить индекс образа этой окружности относительно точки 0 под действием отображения последования Φ .

По непрерывности для всех уравнений вида (3) этот индекс один и тот же, а именно, он равен n . По теореме Руше он в точности равен числу неподвижных точек отображения последования Φ , т.е. числу периодических решений. Теорема доказана.

Приступим теперь к доказательству лемм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Разобьем область $|z| > 1$ выходящими из нуля лучами на $2n - 2$ равных сектора так, чтобы положительная действительная полуось была биссектрисой первого сектора. Пронумеруем эти сектора против часовой стрелки числами от 1 до $2n - 2$. Те сектора, которым соответствуют четные номера, назовем *четными*, остальные – *нечетными*.

Рис. 1

Легко показать, что в любой момент времени векторное поле (3) на каждом из $2n - 2$ лучей смотрит в нечетную область (рис. 1). Кроме того, в четной области не существует ни одной точки, в которой вектор направлен точно в 0, а в нечетной области не существует точки, в которой вектор направлен строго от 0.

Допустим теперь, что у уравнения (3) существует периодическое решение, фазовая кривая которого лежит вне круга $|z| \leq 1$. Из сказанного выше ясно, что такая фазовая кривая должна целиком лежать в одном из секторов (если она вошла в нечетный сектор, то там и останется, см. рис. 1). На замкнутой фазовой кривой, лежащей в одном секторе, должны найтись две точки, в одной из которых вектор поля должен быть направлен в 0, а в другой – от 0 (рис. 1), но такого быть не может. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Для доказательства достаточно указать число $R(n)$ такое, что точка, стартующая с окружности $|z| = R(n)$, за период $T = 1/(6n)$, во-первых, не успеет достигнуть единичного круга $|z| \leq 1$ и вернуться обратно и, во-вторых, не уйдет на бесконечность. Оценим снизу время t_1 , за которое точка, стартующая с окружности $|z| = R(n)$, сможет достигнуть единичного круга $|z| \leq 1$, и время t_2 , за которое точка, стартующая с окружности $|z| = R(n)$, уйдет на бесконечность. Воспользуемся тем, что радиальная скорость на решении, проходящем через точку z , не превосходит $(r + \pi/(2n))^n$, где $r = |z|$. Имеем

$$t_1 \geq I_1 = \int_1^{R(n)} \left(r + \frac{\pi}{2n}\right)^{-n} dr, \quad t_2 \geq I_2 = \int_{R(n)}^{\infty} \left(r + \frac{\pi}{2n}\right)^{-n} dr.$$

Зафиксируем $R(n)$ так, чтобы выполнялось равенство $2I_1 = I_2$, а именно,

$$R(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{\pi}{2n}\right) - \frac{\pi}{2n}.$$

При этом

$$2I_1 = I_2 = \frac{2}{3(n-1)} \left(1 + \frac{\pi}{2n}\right)^{1-n} > T = \frac{1}{6n}.$$

Значит, $2t_1 > T$ и $t_2 > T$. Следовательно, искомое $R(n)$ найдено.

2. Двойное отношение и уравнения, имеющие не больше трех периодических решений. Хорошо известно [4], что в случае уравнения Рикатти

$$\dot{x} = x^2 + a(t)x + b(t)$$

отображение последования сохраняет двойное отношение (является проективным преобразованием прямой) и поэтому не может иметь более двух неподвижных точек. Оказывается, что двойное отношение полезно рассмотреть и в случае $n = 3$.

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим дифференциальное уравнение вида*

$$\dot{x} = x^3 + a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \quad (4)$$

с гладкими коэффициентами $a(t), b(t), c(t)$. Обозначим через $\varphi(x, t)$ решение этого уравнения с начальным условием $\varphi(x, 0) = 0$. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – четыре произвольные точки на прямой, расположенные в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Пусть $S(\overline{x}, t)$ есть двойное отношение точек $\varphi(x_1, t)$, $\varphi(x_2, t)$, $\varphi(x_3, t)$, $\varphi(x_4, t)$:

$$S(\overline{x}, t) = \frac{\varphi(x_1, t) - \varphi(x_2, t)}{\varphi(x_1, t) - \varphi(x_3, t)} \cdot \frac{\varphi(x_4, t) - \varphi(x_3, t)}{\varphi(x_4, t) - \varphi(x_2, t)}.$$

Тогда двойное отношение $S(\overline{x}, t)$ является возрастающей функцией времени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С точностью до бесконечно малых второго порядка имеем

$$\begin{aligned} S(\overline{x}, \Delta t) &= \frac{x_1 - x_2 + \Delta t(x_1^3 - x_2^3 + a(0)(x_1^2 - x_2^2) + b(0)(x_1 - x_2))}{x_1 - x_3 + \Delta t(x_1^3 - x_3^3 + a(0)(x_1^2 - x_3^2) + b(0)(x_1 - x_3))} \\ &\quad \times \frac{x_4 - x_3 + \Delta t(x_4^3 - x_3^3 + a(0)(x_4^2 - x_3^2) + b(0)(x_4 - x_3))}{x_4 - x_2 + \Delta t(x_4^3 - x_2^3 + a(0)(x_4^2 - x_2^2) + b(0)(x_4 - x_2))} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \cdot \frac{1 + \Delta t(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + a(0)(x_1 + x_2) + b(0))}{1 + \Delta t(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 + a(0)(x_1 + x_3) + b(0))} \\ &\quad \times \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_2} \cdot \frac{1 + \Delta t(x_4^2 + x_4x_3 + x_3^2 + a(0)(x_4 + x_3) + b(0))}{1 + \Delta t(x_4^2 + x_4x_2 + x_2^2 + a(0)(x_4 + x_2) + b(0))} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_2} \cdot (1 + \Delta t(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$S(\overline{x}, 0) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_2}$$

и $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, получаем, что знак инфинитезимального приращения совпадает со знаком $(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$, т.е. положителен. Ясно, что этот результата верен не только для $t = 0$, но и вообще для любого t . Теорема доказана.

Обозначим через $\Phi(t)$ отображение $x \mapsto \varphi(x, t)$, где $\varphi(x, t)$ – решение уравнения (4) с начальным условием $\varphi(x, 0) = 0$. Из доказанной теоремы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Отображение Φ в любой момент времени имеет не более трех неподвижных точек.*

Вычисления, аналогичные проделанным при доказательстве теоремы, позволяют получить следующий более общий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$\dot{x} = f(x, t)$$

с правой частью, обладающей тем свойством, что в каждый момент времени график функции $f(x, t)$ пересекается с любой параболой вида $ax^2 + bx + c$ не более чем в трех точках. В этом случае для любых четырех несовпадающих решений двойное отношение $S(\bar{x}, t)$ является монотонной функцией времени.

Отметим, что условие, наложенное на функцию $f(x, t)$, по сути равносильно знакопостоянству ее третьей производной $\partial^3 f / \partial^3 x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим четыре произвольные точки $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ на прямой. Через точки $(x_i, f(x_i, t))$, $i = 1, 2, 3$, проведем параболу $y(x) = ax^2 + bx + c$. Из условий, наложенных на функцию $f(x, t)$, следует, что разность $\omega = f(x_4, t) - y(x_4)$ будет знакопостоянной, т.е. ее знак не будет зависеть ни от времени, ни от конкретного значения x_4 . Повторяя те же вычисления, что при доказательстве теоремы 2, получаем, что с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$S(\bar{x}, t + \Delta t) = S(\bar{x}, t) \cdot \left(1 + \Delta t \frac{\omega \cdot (x_3(t) - x_2(t))}{(x_4(t) - x_3(t))(x_4(t) - x_2(t))} \right).$$

Отсюда следует, что знак инфинитезимального приращения функции $S(\bar{x}, t)$ постоянен и, значит, эта функция монотонна. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. *В условиях теоремы 3 отображение Φ в любой момент времени имеет не более трех неподвижных точек.*

Отметим следующий частный случай следствия 2, перекрывающий следствие 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Отображение последования дифференциального уравнения вида*

$$\dot{x} = x^{2n+1} + a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

не может иметь более трех неподвижных точек.

3. Случай $n = 4$: контактная структура и поведение решений. Ограничимся дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = (x^2 - 1)(x^2 + a(t)x + b(t)) \quad (5)$$

с периодически зависящими от времени коэффициентами: $a(t+T) = a(t)$, $b(t+T) = b(t)$. Оказывается, что поведение решений для всего этого класса уравнений регулируется следующей выделенной 1-формой:

$$\alpha = \frac{x_2 - x_3}{x_1^2 - 1} dx_1 + \frac{x_3 - x_1}{x_2^2 - 1} dx_2 + \frac{x_1 - x_2}{x_3^2 - 1} dx_3.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ – три различных решения уравнения (5). Поставим им в соответствие кривую $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, лежащую в $\mathbb{R}^3$. Тогда имеет место соотношение

$$\alpha(\dot{\bar{x}}(t)) = (x_1(t) - x_2(t))(x_2(t) - x_3(t))(x_3(t) - x_1(t)). \quad (6)$$

Верно и обратное утверждение. Пусть кривая $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ удовлетворяет соотношению (6), причем $-1 < x_1(t) < x_2(t) < x_3(t) < 1$. Тогда найдутся функции $a(t)$ и $b(t)$ такие, что функции $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ являются решением уравнения (5).

Вот лемма, из которой следует первая часть теоремы.

ЛЕММА 3. Пусть задана некоторая точка $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3$ и пара чисел a, b . Рассмотрим касательный вектор $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$, приложенный к точке $\bar{x}$ и имеющий координаты

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_1^2 - 1)(x_1^2 + ax_1 + b), & y_2 &= (x_2^2 - 1)(x_2^2 + ax_2 + b), \\ y_3 &= (x_3^2 - 1)(x_3^2 + ax_3 + b). \end{aligned}$$

Тогда имеет место соотношение

$$\alpha(\bar{y}) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha(y) &= \frac{x_2 - x_3}{x_1^2 - 1}(x_1^2 - 1)(x_1^2 + ax_1 + b) + \frac{x_3 - x_1}{x_2^2 - 1}(x_2^2 - 1)(x_2^2 + ax_2 + b) \\ &\quad + \frac{x_1 - x_2}{x_3^2 - 1}(x_3^2 - 1)(x_3^2 + ax_3 + b) \\ &= (x_2 - x_3)x_1^2 + (x_3 - x_1)x_2^2 + (x_1 - x_2)x_3^2 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1). \end{aligned}$$

Лемма, а вместе с ней и первая часть теоремы доказаны.

Рис. 2

Соотношение (7) задает в каждом касательном пространстве $T_{\bar{x}}\mathbb{R}^3$ аффинную плоскость $A(\bar{x})$. Через $A_0(\bar{x})$ обозначим параллельную ей плоскость в $T_{\bar{x}}\mathbb{R}^3$, которая задается однородным уравнением $\alpha(\bar{y}) = 0$, а через $\mathcal{A}_0$ – поле, порожденное этими плоскостями. Геометрический смысл доказанной части теоремы заключается в том, что для вектора решений $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ конец вектора скорости $\dot{\bar{x}}(t)$ обязательно лежит в аффинной плоскости $A(\bar{x})$ (рис. 2). Докажем оставшуюся часть теоремы.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Пусть кривая $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ удовлетворяет соотношению (6). Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (x_1^2(t) - 1)(x_1^2(t) + a(t)x_1(t) + b(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= (x_2^2(t) - 1)(x_2^2(t) + a(t)x_2(t) + b(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= (x_3^2(t) - 1)(x_3^2(t) + a(t)x_3(t) + b(t)), \end{aligned}$$

где неизвестными являются функции $a(t)$ и $b(t)$. По условию левая часть этой системы определяет точку, лежащую в аффинной плоскости, задаваемой соотношением (7). С другой стороны, по лемме 3 при любых $a(t)$ и $b(t)$ правая часть определяет точку, лежащую в той же самой аффинной плоскости. Ни в какой момент времени функции $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ не равны между собой. Отсюда следует, что, на самом деле, при подходящем выборе $a(t)$ и $b(t)$ может быть получена любая точка аффинной плоскости. Так что система имеет решение, при этом единственное. Теорема доказана.

Покажем, каким образом теорема 4 приводит к уравнениям с шестью циклами.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть в области $-1 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ задана замкнутая кривая γ , трансверсальная полю плоскостей $\mathcal{A}_0$, т.е. $\alpha(\dot{\gamma}) \neq 0$. Тогда существует параметризация кривой $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ и функции $a(t)$ и $b(t)$ такие, что $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ являются решениями уравнения (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, так как в каждой точке $\bar{x}$ кривой γ вектор $\dot{\gamma}$ трансверсален плоскости $A_0(\bar{x})$, параметр на кривой можно выбрать так, чтобы конец вектора $\dot{\gamma}$ лежал на параллельной аффинной плоскости $A(\bar{x})$. После этого остается применить вторую часть теоремы 4.

Сразу заметим, что если кривая, трансверсальная полю плоскостей $\mathcal{A}_0$, существует, то существует и уравнение с шестью периодическими решениями. Два из них очевидны: это $x = -1$ и $x = 1$, три решения дает следствие 4, а шестое получается из соображений четности (четность числа периодических решений любого уравнения вида (1) в общем случае равна четности степени n).

Другой очевидный факт заключается в том, что если поле плоскостей $\mathcal{A}_0$ интегрируемо, то не существует замкнутых кривых, трансверсальных этому полю. Поэтому необходимым условием для существования уравнений вида (5) с шестью периодическими решениями является неинтегрируемость поля $\mathcal{A}_0$, которая доказывается прямой проверкой условия $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ (см. [5]). Таким образом, поле задает контактную структуру [5]. В то же время всякую контактную структуру локальной заменой координат можно привести к стандартному виду $dz - x dy$ (теорема Дарбу [5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует замкнутая кривая, трансверсальная стандартной контактной структуре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим кривую

$$\gamma(t) = \left(\varepsilon \sin t, \varepsilon \cos t, \varepsilon^2 \frac{\sin 2t}{4} \right).$$

Имеем

$$(dz - x dy)(\dot{\gamma}) = \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Предложение доказано. Вместе с ним доказано и существование уравнений вида (5) с шестью циклами.

Выражаю признательность Ю.С. Ильяшенко за постановку задач, за регулярные консультации и за всемерную поддержку. Также выражаю благодарность Д.А. Панову за многочисленные обсуждения этой работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Динамические системы. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7–149.
- [2] Плисс В.А. О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 5. С. 965–968.
- [3] Shahshahani S. Periodic solutions of polynomial first order differential equations // Nonlinear Anal. 1981. V. 5. № 2. P. 157–165.
- [4] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1952.
- [5] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

Московский институт геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Поступило
03.06.97