Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Стоколос, К одной проблеме А. Зигмунда, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 749–762

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 11:30:55

УДК 517.5

К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ А. ЗИГМУНДА

А. М. Стоколос

Доказано, что существует суммируемая на $[0, 1]^2$ функция, интеграл от которой не дифференцируем в каждом из направлений, составляющих всюду плотное в $[0, 2\pi]$ множество, но дифференцируем сильным образом.

Библиография: 8 названий.

Классическая теорема Йессена–Марцинкевича–Зигмунда [1] утверждает сильную дифференцируемость интегралов функций из классов $L(\log^+ L)^{n-1}(I^n)$. С. Сакс [2] показал, что в любом классе $\Phi(L)(I^n)$, более широком чем $L(\log^+ L)^{n-1}(I^n)$, найдется функция, интеграл от которой не дифференцируется сильным образом почти всюду на I^n . Важность этого примера обсуждается, например, в [3], [4]. А. Зигмундом была предложена следующая проблема: можно ли для любой суммируемой на плоскости функции выбрать так оси координат, чтобы интеграл от этой функции был дифференцируем сильным образом?

Отрицательный ответ на поставленный вопрос был получен Дж. Марстрандом [5]. Он построил пример суммируемой на I^2 функции, интеграл от которой не дифференцируем сильным образом при любом выборе системы координат. В дальнейшем пример Марстранда модифицировался в [6], [7].

Интересным является тот момент, что мы не располагаем примером функции, интеграл от которой недифференцируем при одном выборе системы координат и дифференцируем при другом. Указанный пробел и заполняется в настоящей работе.

ТЕОРЕМА. *Существует суммируемая функция, интеграл от которой недифференцируем в каждом из направлений, составляющих всюду плотное в $[0; 2\pi]$ множество, но дифференцируем сильным образом.*

Доказательство этой теоремы основывается на следующих леммах.

Пусть I – интервал на прямой длины a . Тогда максимальная функция Харди–Литтлвуда от $\chi_I(x)$ вычисляется следующим образом:

$$\mathcal{M}\chi_I(x) = \frac{a}{\text{dist}(x, I) + a}.$$

Очевидно, это равенство выполняется и в случае, когда I – вертикальная полоса ширины a , а вместо максимальной функции Харди–Литтлвуда рассматривается сильная максимальная функция $\mathcal{M}_s f$. Возможно, оно справедливо при любом расположении полосы I . Во всяком случае предлагаемая ниже лемма 1 содержит близкое к этому утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть Π – полоса ширины a . Тогда

$$\frac{a}{\text{dist}(x, \Pi) + a} \leq \mathcal{M}_s \chi_\Pi(x) \leq \frac{a}{\max\{\text{dist}(x, \Pi), a\}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – прямоугольник, $x \in R$, а величина $d = OA$ и угол θ определены на рис. 1.

Рис. 1

Если мы покажем, что

$$\frac{|R \cap \Pi|}{|\Pi|} \leq \frac{a}{d}, \quad (1)$$

то поскольку $d \geq \text{dist}(x, \Pi)$, правое неравенство будет установлено.

Не ограничивая общности, считаем $0 < \theta < \pi/2$, $x \notin \Pi$ (см. рис. 1). Пусть $R = I_1 \times I_2$, причем $|I_1| = \alpha$, $|I_2| = \beta$. Разобьем область параметров (α, β) на пять подобластей, как показано на рис. 2.

Рис. 2

Рис. 3

1) В случае $(\alpha, \beta) \in \Omega_1$ имеем $R \cap \Pi = \emptyset$ и (1) доказано.

2) В случае $(\alpha, \beta) \in \Omega_2$ имеет место неравенство $\alpha \geq d/\sin \theta$. Обозначим через R_* и R^* вертикальную и горизонтальную полосы соответственно такие, что $R_* \cap R^* = R$.

Очевидно (см. рис. 3),

$$\frac{|R \cap \Pi|}{|R|} \leq \frac{|R_* \cap \Pi|}{|R|} = \frac{a\beta}{\alpha\beta \sin \theta} = \frac{a}{\alpha \sin \theta} \leq \frac{a}{\sin \theta \cdot d/\sin \theta} = \frac{a}{d},$$

и (1) в этом случае доказано.

3) В случае $(\alpha, \beta) \in \Omega_3$ поступаем по аналогии со случаем 2). Так как $\beta \geq d/\cos \theta$, имеем

$$\frac{|R \cap \Pi|}{|R|} \leq \frac{|R_* \cap \Pi|}{|R|} = \frac{a\alpha}{\alpha\beta \cos \theta} = \frac{a}{\beta \cos \theta} \leq \frac{a}{\cos \theta \cdot d/\cos \theta} = \frac{a}{d},$$

и (1) в этом случае доказано.

4) В случае $(\alpha, \beta) \in \Omega_4$ имеем $d \cos \theta \leq \beta \leq d/\cos \theta$, $0 < \alpha \leq d/\sin \theta$, откуда (см. рис. 4)

$$\begin{aligned} |AB| &= \frac{\beta - |AD|}{\sin \theta}, \quad |AD| = \left(\frac{d}{\sin \theta} - \alpha \right) \operatorname{tg} \theta, \\ \frac{|\Pi \cap R|}{|R|} &\leq \frac{|AB|a}{\alpha\beta} = \frac{a}{\alpha\beta \sin \theta} \left(\beta - \left(\frac{d}{\sin \theta} - \alpha \right) \operatorname{tg} \theta \right) = \frac{a}{\alpha\beta \sin \theta} \left(\beta - \frac{d}{\cos \theta} + \alpha \operatorname{tg} \theta \right) \\ &= a \left(\frac{1}{\alpha \sin \theta} - \frac{d}{\alpha\beta \sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{\beta \cos \theta} \right) = a \left(\frac{1}{\alpha \sin \theta} \left(1 - \frac{d}{\beta \cos \theta} \right) + \frac{1}{\beta \cos \theta} \right). \end{aligned}$$

Однако,

$$1 - \frac{d}{\beta \cos \theta} \leq 1 - \frac{d}{(d/\cos \theta) \cos \theta} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{|\Pi \cap R|}{|R|} \leq a \left(\frac{1}{(d/\sin \theta) \sin \theta} \left(1 - \frac{d}{\beta \cos \theta} \right) + \frac{1}{\beta \cos \theta} \right) = a \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\beta \cos \theta} + \frac{1}{\beta \cos \theta} \right) = \frac{a}{d}$$

и (1) в этом случае доказано.

Рис. 4

Рис. 5

5) В случае $(\alpha, \beta) \in \Omega_5$ имеем $d \sin \theta < \alpha \leq d / \sin \theta$, $0 < \beta \leq d \cos \theta$. Очевидно (см. рис. 5), $\beta \leq d / \cos \theta$ и, как и в предыдущем случае, справедлива оценка

$$\frac{|\Pi \cap R|}{|R|} \leq a \left(\frac{1}{\alpha \sin \theta} - \frac{d}{\alpha \beta \sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{\beta \cos \theta} \right) = a \left(\frac{1}{\beta \cos \theta} \left(1 - \frac{d}{\alpha \sin \theta} \right) + \frac{1}{\alpha \sin \theta} \right).$$

Однако,

$$1 - \frac{d}{\alpha \sin \theta} \leq 1 - \frac{d}{(d / \sin \theta) \sin \theta} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{|\Pi \cap R|}{|R|} \leq a \left(\frac{1}{(d / \cos \theta) \cos \theta} \left(1 - \frac{d}{\alpha \sin \theta} \right) + \frac{1}{\alpha \sin \theta} \right) = a \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\alpha \sin \theta} + \frac{1}{\alpha \sin \theta} \right) = \frac{a}{d}$$

и (1) доказано для всех случаев.

Докажем теперь левую часть утверждения леммы 1. Случай $x \in \Pi$ тривиален. В случае $x \notin \Pi$, не ограничивая общности, можно считать $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Выберем тогда прямоугольник R , как показано на рис. 6.

Рис. 6

Рис. 7

Тогда

$$\frac{|\Pi \cap R|}{|R|} = \frac{a\alpha}{\alpha\beta \cos \theta} = \frac{a}{\beta \cos \theta} = \frac{a}{a+d},$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем нами будет использоваться только оценка сверху. Оценка снизу включена в лемму 1 для полноты формулировки. Однако, нам представляется достаточно интересным выяснить, можно ли в утверждении леммы 1 вместо левого неравенства писать знак равенства.

ЛЕММА 2. Пусть Q – прямоугольник ширины a , наклоненный к оси OX под углом θ , $0 < \theta < \pi/2$. Пусть Π – полуплоскость, наклоненная к оси OX под углом $\theta + \pi/2$, $Q \not\subset \Pi$ и $d \equiv \text{dist}(Q, \Pi) \geq a$ (см. рис. 7).

Тогда для всех $x \in \Pi$ справедлива следующая оценка для сильного максимального оператора:

$$\mathcal{M}_s \chi_Q(x) \leq \frac{2a}{d \sin \theta \cos \theta}.$$

Рис. 8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\delta = d - a \sin \theta \cos \theta$ и проведем взаимноортогональные полуплоскости Π_1 и Π_2 , не содержащие Q , как показано на рис. 8.

Пусть $x \in \Pi_1$, R – прямоугольник, содержащий x и имеющий размеры $\alpha \times \beta$. Тогда $\beta \geq \delta \sin \theta$ и если R^* – вертикальная полоса, порожденная R , а Q^* – полоса, порожденная Q (см. рис. 8), то

$$\begin{aligned} \frac{|Q \cap R|}{|R|} &\leq \frac{|Q^* \cap R^*|}{|R|} = \frac{(a/\cos \theta)\alpha}{\alpha\beta} = \frac{a}{\beta \cos \theta} \leq \frac{a}{\delta \sin \theta \cos \theta} \\ &\leq \frac{a/(\sin \theta \cos \theta)}{d - a \sin \theta \cos \theta} = \frac{a/(\sin \theta \cos \theta)}{d - (a/2) \sin(2\theta)} \leq \frac{a/(\sin \theta \cos \theta)}{d - a/2} \leq \frac{2a}{d \sin \theta \cos \theta}. \end{aligned}$$

Аналогичную оценку можно получить для $x \in \Pi_2$.

Покажем теперь, что $\Pi \subset \Pi_1 \cap \Pi_2$, для чего нужно вычислить расстояние $|AC|$ от Q до точки A пересечения границ полуплоскостей Π_1 и Π_2 . Имеем $|AC| = |AB| + |BC| = \delta + |BC|$. Однако, $|BC| = a \sin \theta \cos \theta$. Поэтому $|AC| = \delta + a \sin \theta \cos \theta = d$, что и доказывает лемму 2.

Следующая лемма В.Г. Спринжука является обобщением леммы Бореля–Кантелли (см. [8, гл. 1, §3, лемма 5]).

ЛЕММА 3. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой μ и для последовательности $A_k \in \mathcal{A}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \infty.$$

Тогда

$$\mu(\overline{\lim} A_k) \geq \overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \frac{(\sum_{k=1}^q \mu(A_k))^2}{\sum_{k,j=1}^q \mu(A_k \cap A_j)}.$$

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Определим натуральные числа $\lambda_k \uparrow \infty$ так, чтобы для $B_k \equiv \lambda_k^{-1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 \leq \frac{1}{64}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 \log \frac{1}{B_k} = \infty. \quad (2)$$

Кроме того, выберем натуральные числа $w_k \uparrow \infty$ так, чтобы для $q_k = 2^{w_k}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^3 q_k \leq \frac{1}{4}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 q_k^2 < \infty, \quad (3)$$

и положим $A_k = B_k^2$.

Введем двоично-рациональные направления

$$\theta_j^k = \frac{\pi j}{2q_k}, \quad j = 1, \dots, q_k - 1.$$

Определим теперь прямоугольники $Q_j^{k,*}$ и $\Pi_j^{k,*}$ с центрами в начале координат и попарно параллельными сторонами размера $B_k \times A_k$ и $(B_k + 2B_k q_k^2) \times (A_k + 2B_k q_k)$ соответственно, большие стороны которых составляют с осью OX угол θ_j^k .

В силу соотношения (3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_k} |\Pi_j^{k,*}| \ll \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 q_k^3 < \infty. \quad (4)$$

Здесь и далее запись $x \ll y$ трактуется как неравенство $x \leq cy$, справедливое с некоторой константой c .

Определим теперь фигуру $Y_j^{k,*}$, совпадающую после поворота осей координат на угол θ_j^k против часовой стрелки и сдвига на величину $B_k/2$ в положительном направлении оси OX и на величину $A_k/2$ в положительном направлении оси OY с криволинейной трапецией Y_k^* , ограниченной гиперболой $x_2 = A_k/x_1$, осью OX и вертикальными прямыми $x_1 = B_k$ и $x_1 = 1/4$ (см. рис. 9).

Рис. 9

Рис. 10

Легко видеть, что $Y_j^{k,*}$ содержится в круге с центром в начале координат радиуса $1/2$ и для любого j

$$|Y_j^{k,*}| = |Y_k^*| = \int_{B_k}^{1/4} \frac{A_k}{t} dt \geq \frac{1}{4} A_k \log \frac{1}{B_k}.$$

Зафиксируем теперь направление θ_r^ν и положим $\theta_j^k = \theta_r^\nu$. Тогда множества $Y_j^{k,*}$ представляют собой криволинейные трапеции, ограниченные гиперболами с убывающими коэффициентами и повернутыми на один и тот же угол θ_j^k , причем с учетом (2)

$$\sum_{k=\nu}^{\infty} |Y_j^{k,*}| = \infty. \quad (5)$$

Функцию f будем строить, разбивая I^2 на k -м шаге на m_k^2 одинаковых квадратов I_n^k , $n = 1, \dots, m_k^2$. В каждом I_n^k определим некоторую точку $c_n^k = (c_{n,1}^k, c_{n,2}^k)$, расположенную на диагонали I_n^k (выбор c_n^k будет определен ниже), и будем помещать прямоугольники $Q_{n,j}^k$ и $\Pi_{n,j}^k$ с центрами в точках c_n^k и со сторонами, наклоненными к осям координат на угол θ_j^k , размера $B_k/m_k \times A_k/m_k$ и $(B_k + 2B_k q_k^2)/m_k \times (A_k + 2B_k q_k)/m_k$ соответственно.

Покажем теперь, как выбираются числа m_k и точки c_n^k . Обозначим через H_n^k гомотеию с коэффициентом $1/m_k$, переводящую начало координат в точку c_n^k .

В этих терминах прямоугольники $Q_{n,j}^k$ и $\Pi_{n,j}^k$ можно определить следующим образом:

$$Q_{n,j}^k = H_n^k(Q_j^{k,*}), \quad \Pi_{n,j}^k = H_n^k(\Pi_j^{k,*}).$$

Определим также следующие множества:

$$Q_n^k \equiv \bigcup_{j=1}^{q_k} Q_{n,j}^k, \quad Q^k \equiv \bigcup_{n=1}^{m_k^2} Q_n^k, \quad \Pi_n^k \equiv \bigcup_{j=1}^{q_k} \Pi_{n,j}^k, \quad \Pi^k \equiv \bigcup_{n=1}^{m_k^2} \Pi_n^k,$$

$$Y_{n,j}^k \equiv H_n^k(Y_j^{k,*}), \quad Y_n^k \equiv \bigcup_{j=1}^{q_k} Y_{n,j}^k, \quad Y^k \equiv \bigcup_{n=1}^{m_k^2} Y_n^k.$$

В силу (4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Pi^k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\Pi_k^*| < \infty. \quad (6)$$

Теперь на k -м шаге будут появляться в рассмотрении q_k двоично-рациональных направлений θ_j^k . Для $k = 1$ положим $m_1 = 1$, $c_1^1 = (1/2, 1/2)$, $Q_1 = Q^1$, $Y_1 = Y^1$, $J_1 = \{1\}$.

Пусть числа $m_1, \dots, m_k$ уже выбраны так, чтобы для любого направления $\theta_r^\nu = \pi r / (2q_\nu)$, где r/q_ν — несократимая дробь, $1 \leq \nu \leq k-1$, выполнялось следующее свойство: если $\nu \leq l, s \leq k$, $\theta_i^s = \theta_i^l = \theta_r^\nu$, то

$$|Y_j^s \cap Y_i^l| \leq 2|Y_j^s| \cdot |Y_i^l|. \quad (7)$$

Пусть $\nu \leq s \leq k$, $a_{s,j} = \{n : I_n^{k+1} \cap Y_j^s \neq \emptyset\}$. Запись $a^\#$ здесь и далее означает число элементов множества a . Так как Y_j^s измеримо по Жордану, имеем

$$\lim_{\text{diam } I_n^{k+1} \rightarrow 0} \left| \bigcup_{n \in a_{s,j}} I_n^{k+1} \right| = |Y_j^s|.$$

Следовательно, существует $m_{s,j}$ такое, что

$$a_{s,j}^\# |I_n^{k+1}| = \left| \bigcup_{n \in a_{s,j}} I_n^{k+1} \right| \leq 2|Y_j^s|.$$

Положим теперь

$$m_{k+1}^* = \max\{m_{s,j} : 1 \leq s \leq k, 1 \leq j \leq q_s\}, \quad m_{k+1} = \max\{m_{k+1}^*, 4\lambda_k m_k\}.$$

Тогда для указанного выше направления θ_r^ν , $1 \leq \nu \leq k$, и $\theta_j^{k+1} = \theta_i^s = \theta_r^\nu$ при любом выборе точек c_n^{k+1}

$$|Y_i^s \cap Y_j^{k+1}| \leq \left| \bigcup_{n \in a_{s,j}} Y_{j,n}^{k+1} \right| = a_{s,j}^\# |Y_{j,n}^{k+1}| \leq 2 \frac{|Y_j^s|}{|I_n^{k+1}|} |Y_{j,n}^{k+1}| = 2|Y_j^s| \cdot |Y_j^{k+1}|.$$

Таким образом, (7) выполнено с заменой k на $k+1$.

Выбирая в случае необходимости рост чисел m_k более быстрым, потребуем, чтобы

$$\left| \bigcup_{s \in J_k} Y_s^{k+1} \right| \leq 2^{-k}, \quad (8)$$

где

$$J_k = \left\{ n : 3 \cdot I_n^{k+1} \cap \left(\bigcup_{l=1}^k \partial Q_l \cup \bigcup_{l=1}^k \partial Y_l \right) \neq \emptyset \right\},$$

а $3 \cdot I$ обозначает концентрический с I квадрат, $|3 \cdot I| = 3|I|$.

Кроме того, будем считать m_k кратными λ_k .

Определим теперь точки c_n^k внутри

$$I_n^k = \left[\frac{s-1}{m_k}, \frac{s}{m_k} \right] \times \left[\frac{i-1}{m_k}, \frac{i}{m_k} \right]$$

для $i = 1$. Положим для $s \leq \lambda_k$

$$c_{n,1}^k = \frac{s-1}{m_k} + \frac{1}{\lambda_k m_k} \frac{2s-1}{2}, \quad c_{n,2}^k = \frac{1}{m_k} - \frac{1}{\lambda_k m_k} \frac{2s-1}{2}.$$

Таким образом, выбранная точка c_n^k расположена на диагонали I_n^k . Покажем, что $c_n^k \in I_n^k$. Действительно,

$$\frac{s-1}{m_2} \leq c_{n,1}^k \leq \frac{s-1}{m_2} + \frac{1}{\lambda_k m_k} s \leq \frac{s-1}{m_2} + \frac{1}{m_k} = \frac{s}{m_2},$$

что и требовалось показать.

Отметим, что мы определили положение точек внутри λ_k квадратов из нижнего слоя разложения I^2 . Определим точки c_n^k внутри остальных квадратов из нижнего слоя путем элементарного дублирования их расположения в первых λ_k квадратах. При этом

$$c_{n,1}^k \equiv c_{s,1}^k \left(\bmod \frac{1}{\lambda_k m_k} \right) \quad (9)$$

и, кроме того, если $c_{n,2}^k = c_{s,2}^k$, то

$$c_{n,1}^k \equiv c_{s,1}^k \left(\bmod \frac{\lambda_k}{m_k} \right). \quad (10)$$

Во втором слое расположим нижний слой с циклическим сдвигом на один квадрат влево, в третьем слое расположим предыдущий слой с циклическим сдвигом на один квадрат влево, и т.д. На каждом следующем слое будем располагать предыдущий с циклическим сдвигом на один квадрат (см. рис. 10). Тогда соотношение (9) останется в силе и, более того, для точек c_n^k , у которых $c_{n,1}^k = c_{s,1}^k$, выполнено

$$c_{n,2}^k \equiv c_{s,2}^k \left(\bmod \frac{\lambda_k}{m_k} \right). \quad (11)$$

Теперь для любого направления $\theta_r^\nu = \pi r / (2q_\nu)$, где r/q_ν — несократимая дробь, а $\theta_j^k = \theta_r^\nu$, с учетом гомотетичности, соотношения (5) и леммы 3 имеем

$$|\overline{\lim} Y_j^k| \geq \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Определим функции

$$f_{n,j}^k = \lambda_k \chi_{Q_{n,j}^k}, \quad f_n^k = \sum_{j=1}^{q_k-1} f_{n,j}^k, \quad f^k = \sum_{n=1}^{m_k^2} f_n^k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f^k.$$

Проверим суммируемость f . С учетом (3) имеем

$$\|f\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m_k^2} \sum_{j=1}^{q_k-1} \lambda_k |Q_{n,j}^k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k m_k^2 q_k B_k A_k m_k^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k B_k^2 < \infty.$$

Покажем теперь недифференцируемость интеграла от f базисом из прямоугольников в направлении θ_j^k .

Если $x \in Y_{j,n}^k$, то всегда найдется прямоугольник $R \ni x$ такой, что $|R| = A_k / m_k^2$, $Q_{n,j}^k \subset R$ (см. рис. 9). Тогда

$$|R|^{-1} \int_R f_{j,n}^k(y) dy = \lambda_k |Q_{n,j}^k| \frac{m_k^2}{A_k} = \lambda_k \frac{A_k B_k}{m_k^2} \frac{m_k^2}{A_k} = 1. \quad (13)$$

Таким образом, с учетом (12) на множестве меры больше $1/2$ верхняя производная интеграла относительно указанного базиса не меньше 1.

С другой стороны, если $\text{supp } \varphi \equiv \{x : \varphi(x) \neq 0\}$, то

$$|\text{supp } f| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\text{supp } f_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k q_k = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^3 q_k < \frac{1}{4} \quad (14)$$

в силу (3).

Сопоставляя (13) и (14), получаем требуемую недифференцируемость.

После того, как мы установили недифференцируемость интеграла от f в каждом двоично-рациональном направлении, покажем сильную дифференцируемость. В силу теоремы А. С. Безикевича (см., например, [4]) достаточно показать конечность почти всюду верхней сильной производной интеграла от f , т.е. установить, что для почти всех x

$$|R|^{-1} \int_{R \ni x} f(y) dy = O_x(1), \quad \text{diam}(R) \rightarrow 0. \quad (15)$$

С этой целью нужно накопить множество E нулевой меры, на дополнении к которому будет справедливо (15). Стандартная техника теории функций позволяет накапливать такие множества, используя свойства верхнего предела множеств и лемму Бореля–Кантелли.

А именно, в силу выбора m_k мера тех $3 \cdot I_j^k$, которые покрывают границу $\bigcup_{n=1}^{k-1} Q^n$, будет меньше чем 2^{-k} (см. (8)). Следовательно, по лемме Бореля–Кантелли верхний предел этих I_j^k (обозначим его через E_1) имеет меру 0.

Далее, пусть $E_2 = \overline{\lim} \Pi_n$. С учетом (6) и леммы Бореля–Кантелли $|E_2| = 0$. Положим, наконец, $E = E_1 \cup E_2$, $|E| = 0$, и ниже будем предполагать, что $x \notin E$.

Тогда найдется номер $n^*(x)$ такой, что

$$3 \cdot I_j^k \cap \bigcup_{n=1}^{k-1} \partial Q^n = \emptyset \quad \text{для всех } I_j^k \ni x, \quad k > n^*(x). \quad (16)$$

Кроме того, существует номер $n(x)$ такой, что

$$x \notin \Pi_k \quad \text{для всех } k \geq n(x). \quad (17)$$

Пусть $x \in R = \alpha \times \beta$, $\alpha \geq \beta$. Определим $k \leq s$ так, чтобы

$$m_{k+1}^{-1} < \alpha \leq m_k^{-1}, \quad m_{s+1}^{-1} < \beta \leq m_s^{-1}.$$

Будем рассматривать R настолько маленьким, чтобы $k \geq n(x) + n^*(x)$, и считать $x \in I_j^k$.

Имеем

$$\begin{aligned} |R|^{-1} \int_{R \ni x} f(y) dy &= \sum_{n=1}^{k-1} |R|^{-1} \int_{R \ni x} f^n(y) dy + |R|^{-1} \int_{R \ni x} f^n(y) dy \\ &\quad + \sum_{n=k+1}^{s-1} |R|^{-1} \int_{R \ni x} f^n(y) dy + |R|^{-1} \int_{R \ni x} f^s(y) dy \\ &\quad + |R|^{-1} \int_{R \ni x} \sum_{n=s+1}^{\infty} f^n(y) dy \\ &\equiv S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5. \end{aligned}$$

Так как $k \geq n^*(x)$ и $x \in I_j^k$, для $1 \leq n \leq k-1$ в силу (16) либо $3 \cdot I_j^k \subset Q^n$, либо $3 \cdot I_j^k \cap Q^n = \emptyset$. Учитывая, что $R \subset 3 \cdot I_j^k$, получим

$$S_1 \leq \sum_{n=1}^{k-1} |R|^{-1} \int_{R \ni x} f^n(y) dy \leq \sum_{n=1}^{k-1} f^n(x) \leq f(x) = O_x(1).$$

Оценим теперь S_2 . Поскольку R может пересекаться не более чем с четырьмя из квадратов I_n^k , не ограничивая общности, считаем

$$S_2 \leq 4\lambda_k \sum_{j=1}^{q_k-1} |R|^{-1} \int_{R \ni x} \chi_{Q_{n,j}^k}(y) dy \leq 4\lambda_k \sum_{j=1}^{q_k-1} \mathcal{M}_s \chi_{Q_{n,j}^k}(x),$$

где $\mathcal{M}_s$, как и ранее, обозначает сильную максимальную функцию.

Рис. 11

Обозначим через $\Omega_{n,j}^k$ горизонтальную полосу, порожденную продолжением сторон $\Pi_{n,j}^k$ (см. рис. 11, где положено $\alpha = B_k q_k^2 / m_k$, $\beta = B_k q_k / m_k$, $\gamma = Q_{n,j}^k$). С учетом (17) возможны два случая расположения точки x :

- 1) $x \in I_n^k \setminus \Omega_{n,j}^k$;
- 2) $x \in \Omega_{n,j}^k \setminus \Pi_{n,j}^k$.

1) Применяя лемму 1, получим

$$\mathcal{M}_s \chi_{Q_{n,j}^k}(x) \leq \frac{A_k m_k}{B_k q_k m_k} = \frac{A_k}{B_k q_k} = \frac{B_k}{q_k} = \frac{1}{\lambda_k q_k}.$$

Следовательно, $S_2 \leq 4$.

2) Применяя лемму 2, получим

$$\mathcal{M}_s \chi_{Q_{n,j}^k}(x) \ll \frac{A_k m_k}{q_k^2 \theta_j^k B_k m_k} \ll \frac{B_k}{q_k} = \frac{1}{\lambda_k q_k}.$$

Заметим, что в этом месте доказательства существенно использовался тот факт, что множество направлений дифференцируемости θ_j^k отделено от нуля величиной q_k^{-1} .

В итоге $S_2 = O(1)$.

Оценим теперь S_3 .

Так как в силу выбора m_k справедливо неравенство $m_s \geq 4m_{s-1}\lambda_{s-1}$, согласно (9) имеем

$$\beta \leq m_s^{-1} \leq (4m_{s-1}\lambda_{s-1})^{-1} \leq (4m_l\lambda_l)^{-1} \leq \frac{1}{4}|c_{n,2}^l - c_{r,2}^l| \equiv \gamma \quad (18)$$

для любых $n, r = 1, \dots, m_l^2$. Иными словами, расстояние между центрами любых Q_n^l больше четырех величин высоты прямоугольника R (см. рис. 12).

Рис. 12

Таким образом, если $c_n^l \subset 3 \cdot R$ и $c_r^l \subset 3 \cdot R$, то в силу (18)

$$c_{n,1}^l = c_{r,1}^l. \quad (19)$$

Пусть $\Gamma_l = \{n : c_n^l \subset 3 \cdot R\}$. Тогда из (19) и (11) следует, что число элементов Γ_l удовлетворяет оценке

$$\Gamma_l^\# \leq \frac{\alpha}{\lambda_l/m_l} = \frac{|R|m_l}{\beta\lambda_l}.$$

Рис. 13

Следовательно,

$$|R|^{-1} \int_R f^l(y) dy \leq \sum_{n \in \Gamma_l} |R|^{-1} \int_R f_n^l(y) dy \leq \sum_{n \in \Gamma_l} \lambda_l \frac{|Q_n^l \cap R|}{|R|}.$$

Чтобы оценить $|Q_n^l \cap R|$, рассмотрим рис. 13. Тогда

$$|Q_n^l \cap R| \leq \sum_{j=1}^{q_l-1} |Q_{n,j}^l \cap R| \ll \sum_{j=1}^{q_l-1} \beta \frac{A_l}{m_l \theta_j^l} \leq \sum_{j=1}^{q_l-1} \frac{\beta A_l q_l}{m_l} \leq \frac{\beta A_l q_l^2}{m_l}. \quad (20)$$

Итак, для $1 \leq l \leq s-1$ имеем

$$|R|^{-1} \int_R f^l(y) dy \leq \frac{|R| m_l}{\beta \lambda_l} \lambda_l \frac{\beta A_l q_l^2}{m_l} \frac{1}{|R|} = A_l q_l^2.$$

Отсюда в силу (3)

$$S_3 \ll \sum_{l=1}^{\infty} A_l q_l^2 = \sum_{l=1}^{\infty} B_l^2 q_l^2 = O(1).$$

Оценим теперь S_4 .

Введем горизонтальные полосы

$$\Omega_i^s = R \times \left[\frac{i-1}{m_s \lambda_s}, \frac{i}{m_s \lambda_s} \right].$$

Пусть на этот раз $\Gamma_s = \{i : \Omega_i^s \cap 3 \cdot R \neq \emptyset\}$. Очевидно, что количество элементов Γ_s удовлетворяет оценке

$$\Gamma_s^\# \leq [3\beta m_s \lambda_s] + 2.$$

Обозначим $\Gamma_{s,i} = \{n : c_n^s \subset (R \cap \Omega_i^s)\}$. Тогда в силу (10)

$$\Gamma_{s,i}^\# \leq \frac{3\alpha}{\lambda_s/m_s} = \frac{3m_s |R|}{\lambda_s \beta}.$$

Если $[3\beta m_s \lambda_s] > 0$, то $\Gamma_s^\# \leq 9\beta m_s \lambda_s$. В этом случае внутри R целиком помещается относительно много Q_n^s . Тогда оцениваемые средние мало отличаются от средних по всему I^2 и выполнено

$$\begin{aligned} |R|^{-1} \int_R f^s(y) dy &\leq \sum_{i \in \Gamma_s} \sum_{n \in \Gamma_{s,i}} |R|^{-1} \int_R f_n^s(y) dy \ll \sum_{i \in \Gamma_s} \sum_{n \in \Gamma_{s,i}} |R|^{-1} \lambda_s |Q_n^s| \\ &\leq \frac{\Gamma_s^\# \Gamma_{s,i}^\# \lambda_s q_s A_s B_s}{|R| m_s^2} \ll \frac{\beta m_s \lambda_s m_s |R| \lambda_s q_s A_s B_s}{\lambda_s \beta |R| m_s^2} = q_s A_s. \end{aligned}$$

Таким образом, если $[3\beta m_s \lambda_s] > 0$, то

$$|R|^{-1} \int_R f^s(y) dy \ll q_s A_s.$$

Если же $0 < 3\beta m_s \lambda_s < 1$, т.е. R — очень узкий прямоугольник (см. рис. 14), то учитывая, что $\Gamma_s^\# \leq 2$, и соотношение (20), получим

$$|R|^{-1} \int_R f^s(y) dy \leq 2 \frac{3m_s |R|}{\lambda_s \beta} \frac{\lambda_s A_s q_s^2}{m_s \alpha} = 6q_s^2 A_s.$$

Рис. 14

В итоге $S_4 = O(1)$.

Оценим теперь S_5 . Пусть

$$\Gamma_l = \{n : I_n^l \subset 3 \cdot R\}, \quad R_0(l) = \bigcup_{n \in \Gamma_l} I_n^l.$$

Для $l \geq s+1$ имеем $|R| \leq |R_0(l)| \leq 9|R|$. Следовательно, для $M \geq s+1$ выполнено

$$|R|^{-1} \int_R \sum_{l=s+1}^M f^l(y) dy \leq \sum_{l=s+1}^M 9|R_0(l)|^{-1} \int_{R_0(l)} f^l(y) dy \leq \sum_{l=s+1}^M 9\|f^l\|_1 \leq 9 \sum_{l=1}^{\infty} \|f^l\|_1.$$

Устремляя теперь $M \rightarrow \infty$, по лемме Фату получим

$$S_5 \leq 9 \sum_{l=1}^{\infty} \|f^l\|_1.$$

В итоге $S_5 = O(1)$.

Следовательно, соотношение (15) установлено, что влечет сильную дифференцируемость интеграла от f .

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Было бы интересным выяснить, каким может быть множество направлений дифференцируемости. В частности, может ли это множество быть произвольным подмножеством $[0, 2\pi]$ или же быть дополнением к $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A. Note on the differentiability of multiple integrals // Fund. Math. 1935. V. 25. P. 217-234.
- [2] Saks S. On the strong derivatives of functions of intervals // Fund. Math. 1935. V. 25. P. 235-252.
- [3] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
- [4] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
- [5] Marstrand J. A counter-example in the theory of strong differentiation // Bull. London Math. Soc. 1977. V. 9. P. 209-211.
- [6] Lopez M.B. A negative result in differentiation theory // Studia Math. 1982. V. 72. P. 173-182.
- [7] Stokolos A.M. An inequality for equimeasurable rearrangements and its application in the theory of differentiation of integrals // Anal. Math. 1983. V. 9. P. 133-146.
- [8] Спринжук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.

Одесский государственный университет
Институт математики экономики и механики
E-mail: stokolos@tet.kth.se

Поступило
23.06.97