Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Таскараев, Аналитические свойства условных кривизн выпуклых гиперповерхностей и задача Дирихле для уравнения Монжа–Ампера, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 763–768

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 06:05:37

УДК 517

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УСЛОВНЫХ КРИВИЗН ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА

А. Таскараев

Известно, что существование и единственность поверхности с заранее заданными геометрическими характеристиками являются одной из важных и актуальных проблем дифференциальной геометрии “в целом”. Формулировка этой проблемы на языке анализа приводит к краевым задачам для эллиптических и гиперболических уравнений в частных производных второго порядка.

В этой работе рассматриваются обобщенные решения уравнения Монжа–Ампера $\|z_{ij}\| = \varphi(x, z, p)$ в Λ^n , где $z = z(x_1, \dots, x_n)$ – выпуклая функция, $p = (p_1, \dots, p_n) = (\partial z / \partial x_1, \dots, \partial z / \partial x_n)$, $z_{ij} = \partial^2 z / \partial x_i \partial x_j$. Рассматриваются модель Кэли–Клейна пространства Λ^n и метод исследования принципа неподвижных точек в банаховых пространствах.

Библиография: 3 названия.

Пусть $G \subset E^{n-1} \subset E^n$ – выпуклая область с компактным замыканием на E^{n-1} и $\Gamma = \partial G$ – замкнутая выпуклая поверхность на гомеоморфной $(n-2)$ -мерной сфере. В работах [1], [2] изучена задача Дирихле для эллиптических уравнений Монжа–Ампера

$$\det \|z_{ij}\| = \varphi(x, z, Dz), \quad (1)$$

где $\varphi \geq 0$ и непрерывна в $G \times \mathbb{R} \times P$, Dz – оператор дифференцирования, т.е. если $z = z(x) = z(x_1, \dots, x_{n-1})$, то $Dz = (\partial z / \partial x_1, \dots, \partial z / \partial x_{n-1})$, а $P = \{(p_1, \dots, p_{n-1})\} = \{(\partial z / \partial x_1, \dots, \partial z / \partial x_{n-1})\}$.

Отметим, что при исследовании задачи Дирихле для уравнения (1) важным является тот факт, что гладкие решения уравнения (1) необходимо являются выпуклыми функциями. Это позволило, налагая на функцию φ требование

$$\varphi(x, z, Dz) \leq \psi(x) \cdot R(Dz), \quad (2)$$

где $\psi(x) \geq 0$, $R(Dz) > 0$, во-первых, определить для всякой выпуклой функции $z(x)$ в G R -кривизну

$$\omega(R, z, e) = \int_{\nu_z(e)} \frac{dp}{R(p)}$$

функции $z(x)$ как вполне аддитивную неотрицательную функцию борелевских множеств $e \subset G$, где $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$, $\nu_z: G \rightarrow P$ – нормальное отображение, порожаемое

функцией $z(x)$, и, во-вторых, ввести обобщенные решения уравнения (1) как выпуклые функции $z(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$\omega(R, z, e) = \int_e \frac{\varphi(x, z, p)}{R(p)} dp \quad (3)$$

на совокупности борелевских множеств области G . Оказалось (см. [1]), что достаточным условием разрешимости задачи Дирихле для уравнения (3) является неравенство

$$\int_G \psi(x) dx < \int_P \frac{dp}{R(p)}. \quad (4)$$

В случае, когда $\varphi(x, z, p) \equiv \psi(x)R(p)$, условие (4) является необходимым условием разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1).

В исследованиях, о которых речь шла выше, существенную роль играло неравенство (2). Однако в некоторых геометрических задачах условие (2) может не выполняться. Так, например, обстоит дело в задаче о восстановлении выпуклой гиперповерхности по ее внешней кривизне в пространстве Лобачевского, если гиперповерхности задаются выпуклыми функциями на некоторой выпуклой области G на фиксированной гиперповерхности. Действительно, рассмотрим модель Кэли–Клейна n -мерного пространства Лобачевского Λ^n . Не нарушая общности, можно считать кривизну пространства Лобачевского равной 1, а модель Кэли–Клейна расположенной в открытом шаре U радиуса 1 с центром в точке 0 евклидова пространства E^n . Тогда система декартовых координат в E^n порождает в U так называемую систему *бельтрамиевых координат* Λ^n . Линейный элемент Λ^n в бельтрамиевых координатах $x_1, x_2, \dots, x_n$, если $(x_1, \dots, x_n) \in U$, имеет вид

$$ds^2 = \frac{(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n dx_i^2) + (\sum_{i=1}^n x_i dx_i)^2}{(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)^2}.$$

Как известно, выпуклые тела в Λ^n в модели Кэли–Клейна изображаются выпуклыми телами в евклидовом шаре U . Поэтому все выпуклые поверхности, заданные в Λ^n явными уравнениями $z = z(x)$ в области G , таковы, что функция $z(x)$ выпукла в обычном смысле или, что то же самое, график $z(x)$ в E^n есть выпуклая поверхность, целиком лежащая в U . Справедливо также и обратное утверждение.

Известно, что нахождение выпуклой гиперповерхности $\Phi: z = z(x) \in C^2(G)$ по ее внешней интегральной кривизне в пространстве Λ^n , плотность которой относительно лебеговой меры на плоскости $z = 0$ задана функцией $H(x) \geq 0$, сводится к задаче Дирихле для уравнения

$$\det \|z_{ij}\| = H(x) \frac{(1 + |p|^2)^{(n+1)/2} (1 - d^2)^{(n+1)/2}}{(1 - \rho^2)^{1/2}}, \quad (5)$$

где

$$\rho = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad d = \frac{|\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i - z|}{\sqrt{1 + |p|^2}};$$

d есть значение опорной функции Φ для плоскости, касающейся Φ в точке $(x_1, \dots, x_{n-1}, z(x_1, \dots, x_{n-1}))$; при этом разыскиваются только такие решения задачи Дирихле, графики которых целиком лежат внутри шара U . Наличие множителей $(1 - d^2)$ и $(1 - \rho^2)$,

каждый из которых стремится к 0 при подходе точки $(x_1, \dots, x_{n-1}, z(x_1, \dots, x_{n-1}))$ к границе шара U в E^n , показывает, что уравнение (5) таково, что для него не выполняется условие (2).

В работе [3] А. Д. Вернер дал понятие внешней интегральной кривизны для выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского. Эта кривизна, которую мы обозначим через $\tilde{\omega}(z, e)$, является вполне аддитивной неотрицательной функцией борелевских множеств области G . Операторную функцию множеств $\tilde{\omega}(z, e)$ можно рассматривать как обобщение функции множества

$$\int_e \frac{\det \|z_{ij}\| (1 - \rho^2)^{1/2}}{(1 + |p|^2)^{(n+1)/2} (1 - d^2)^{(n+1)/2}} dx$$

для $z(x) \in C^2(G)$ на произвольные выпуклые функции $z(x)$ при условии, что графики всех этих функций целиком лежат в U .

Вернер (см. [3]) доказал, что для любой суммируемой функции $h(x) \geq 0$ задача Дирихле для уравнения

$$\frac{\det \|z_{ij}\| (1 - \rho^2)^{1/2}}{(1 + |p|^2)^{(n+1)/2} (1 - d^2)^{(n+1)/2}} = h(x)$$

разрешима в классе обобщенных решений, при этом удовлетворение граничных условий понимается в смысле Бакельмана (см. [1]).

Ближайшей задачей является исследование задачи Дирихле для дифференциальных уравнений вида

$$\det \|z_{ij}\| = \varphi(x, z, Dz) \frac{(1 + |p|^2)^{(n+1)/2} (1 - d^2)^{(n+1)/2}}{(1 - \rho^2)^{1/2}},$$

где $\varphi(x, z, Dz)$ — непрерывная функция в $[(\overline{G} \times \mathbb{R}) \cap U] \times P$.

Рассмотрим в области $\overline{G}$ дифференциальное уравнение

$$\det \|z_{ij}\| = \varphi(x, z, p), \quad (6)$$

где $\varphi(x, z, p)$ задана и непрерывна в $[(\overline{G} \times \mathbb{R}) \cap U] \times P$. На функцию $\varphi(x, z, p)$ наложим следующие ограничения:

$$0 \leq \varphi(x, z, p) \leq \Phi(x) \frac{(1 + |p|^2)^{(n+1)/2} (1 - d^2)^{(n+1)/2}}{(1 - \rho^2)^{1/2}}, \quad (7)$$

где $\Phi(x) \geq 0$ — суммируемая функция в G .

Для уравнения (6) рассмотрим задачу Дирихле при условии $z|_{\partial G} = 0$. Пусть $W^+(G)$ — совокупность выпуклых функций $z(x)$, заданных в G и удовлетворяющих следующим условиям:

- а) $z(x)$ обращена выпуклостью вниз;
- б) график $z(x)$ лежит внутри шара U ;
- в) $z|_{\partial G} = 0$.

Очевидно, $W^+(G)$ выпукло в банаховом пространстве $C(G)$. Пусть $z(x) \in W^+(G)$. Тогда функция

$$f_z(x) = \frac{\varphi(x, z, p)(1 - \rho^2)^{1/2}}{(1 + \sum_{i=1}^{n-1} z_{x_i}^2)^{(n+1)/2} (1 - d^2)^{(n+1)/2}}$$

неотрицательна и почти везде удовлетворяет неравенству

$$f_z(x) \leq \Phi(x). \quad (8)$$

Если функция $z(x) \in W^+(G) \cap C^1(G)$, то $f_z(x)$ непрерывна в G , а в силу (8) она суммируема в G и имеет место оценка

$$\int_G f_z(x) dx \leq \int_G \Phi(x) dx. \quad (9)$$

Если функция $z_n(x) \in W^+(G) \cap C^1(G)$ сходится к функции $z(x) \in W^+(G)$, то $z_{n, x_i} = \partial z_n / \partial x_i$ сходится, как известно, к z_{x_i} почти всюду. Из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла благодаря (8) и (9) получаем, что для любой функции $z(x) \in W^+(G)$ функция f_z суммируема, и имеет место равномерная оценка (9).

Рассмотрим теперь следующую задачу: в множестве функций $W^+(G)$ нужно найти функцию $u_0 \in W^+(G)$ такую, что

$$\tilde{\omega}(u_0, e) = \int_e \Phi(x) dx$$

для любого борелевского множества $e \subset G$.

Пусть теперь $z(x) \in W^+(G)$. Тогда для любого борелевского множества $e \subset G$ имеем

$$\int_e f_z(x) dx \leq \int_e \Phi(x) dx.$$

Согласно результатам Вернера (см. [3]) существует единственное решение задачи Дирихле

$$\tilde{\omega}(u, e) = \int_e f_z(x) dx, \quad u|_{\partial G} = 0.$$

Если $u(x)$ – решение, то

$$\tilde{\omega}(u, e) = \int_e f_z(x) dx \leq \int_e \Phi(x) dx = \tilde{\omega}(u_0, e). \quad (10)$$

Из (10) вытекает, что во всех точках $\overline{G}$ имеем $u_0(x) \leq u(x) \leq 0$ и, следовательно, $u(x)|_{\partial G} = 0$, т.е. $u(x) \in W^+(G)$. Тем самым, построен оператор $A: W^+(G) \rightarrow W^+(G)$, действующий по формуле $u = A(z)$, и наша задача Дирихле сведена к операторному уравнению.

Теперь докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА. *Задача Дирихле для уравнения (6) при краевом условии $z|_{\partial G} = 0$ имеет по крайней мере одно обобщенное решение $z_0(x) \in W^+(G)$, график которого лежит в U , если*

- 1) *выпуклая область G на гиперплоскости E^{n-1} лежит в шаре $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1$ и удалена на положительное расстояние от границы этого шара;*
- 2) *на множестве $[(\bar{G} \times \mathbb{R}) \cap U] \times P$ функция $\varphi(x, z, p)$ непрерывна и удовлетворяет неравенствам (7), где $\Phi(x) \geq 0$ – суммируемая в $\bar{G}$ функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы фактически сводится к тому, что при выполнении условий теоремы справедлив известный принцип Шаудера. В самом деле множество $W^+(G)$ есть выпуклое подмножество банахова пространства $C(G)$. Принцип Шаудера для оператора A будет иметь место, если установить, что оператор A компактен и непрерывен, при этом непрерывность A рассматривается относительно метрики $C(G)$, а компактность A означает, что $A(W^+(G))$ есть компактное подмножество множества $W^+(G)$.

Докажем компактность множества $A(W^+(G))$.

Пусть $z(x)$ – произвольная выпуклая функция из $W^+(G)$. Положим $u(x) = A(z(x))$. Пусть далее $u_0(x) \in W^+(G)$ – решение задачи Дирихле для уравнения

$$\det \|z_{ij}\| = \Phi(x) \frac{(1 - d^2)^{3/2} (1 + \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2)^{3/2}}{(1 - \rho^2)^{1/2}},$$

существование которого было установлено выше. Там же было доказано неравенство

$$u_0(x) \leq u(x) \leq A(z(x)) \leq 0 \quad (11)$$

при всех $x \in \bar{G}$.

Из неравенств (11) благодаря теореме [2, п. 23.2] следует, что множество функций $A(W^+(G))$ компактно в $W^+(G)$.

Докажем непрерывность оператора A .

Пусть последовательность функций $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ из $W^+(G)$ в $\bar{G}$ равномерно сходится к функции $z_0(x) \in W^+(G)$. Так как множество функций $u_n(x) = A(z_n(x))$ компактно в $W^+(G)$ относительно равномерной сходимости, то из $u_n(x)$ можно извлечь сходящуюся в метрике $C(\bar{G})$ подпоследовательность $u_{n_k}(x)$, предел которой в силу известных свойств выпуклых функций, настоящей теоремы и теоремы [2, п. 23.2] снова принадлежит $W^+(G)$. Итак, пусть

$$\bar{u}(x) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} u_{n_k}(x).$$

Функции множества $\tilde{\omega}(u_{n_k}, e)$, как доказано Вернером (см. [3]), слабо сходятся внутри G к $\tilde{\omega}(u, e)$. Так как $z_{n_k}(x) \in W^+(G)$ равномерно сходится к $z_0(x) \in W^+(G)$, неотрицательные суммируемые функции

$$f_{z_{n_k}}(x) = \frac{\varphi(x, z, z_{n_k, x_i})(1 - \rho_{n_k}^2)^{1/2}}{(1 + \sum_{i=1}^{n-1} z_{n_k, x_i}^2)^{3/2} (1 - d_{n_k}^2)^{3/2}}$$

сходятся почти везде к функции

$$f_{z_0}(x) = \frac{\varphi(x, z_0, z_{0,x_i})(1 - \rho_0^2)^{1/2}}{(1 + \sum_{i=1}^{n-1} z_{0,x_i}^2)^{3/2} (1 - d_0^2)^{3/2}}.$$

Для каждой из этих функций выполнено неравенство

$$f_{z_{n_k}}(x) \leq \Phi(x).$$

Так как $\Phi(x) \geq 0$ суммируема в $\overline{G}$, в силу известной теоремы Лебега для любого $e \subset G$ имеем

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_e f_{z_{n_k}}(x) dx = \int_e f_{z_0}(x) dx.$$

Поскольку

$$\tilde{\omega}(u_{n_k}, e) = \int_e f_{z_{n_k}}(x) dx,$$

мы получаем, что

$$\tilde{\omega}(\overline{u}, e) = \int_e f_{z_0}(x) dx.$$

Но функция $v_0 = A(z_0)$ по определению оператора A удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\omega}(v_0, e) = \int_e f_{z_0}(x) dx.$$

Итак, функции $\overline{u}$ и v_0 являются обобщенными решениями одного и того же уравнения

$$\tilde{\omega}(u, e) = \int_e f_{z_0}(x) dx. \quad (12)$$

Так как у функций $\overline{u}$ и v_0 края совпадают, а для уравнения (12) задача Дирихле имеет единственное решение (см. [3]), то $\overline{u}(x) \equiv v_0(x)$.

Таким образом, всякая сходящаяся подпоследовательность, извлеченная из компактной последовательности $u_n = A(z_n)$, сходится равномерно в $\overline{G}$ к функции $v_0 = A(z_0)$. Тем самым, непрерывность оператора A на $W^+(G)$ доказана.

Поскольку все условия принципа Шаудера для оператора A соблюдены, исходная задача Дирихле имеет хотя бы одно обобщенное решение в $W^+(G)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию "в целом". М.: Наука, 1973.
- [2] Таскараев А. Существование выпуклых гиперповерхностей, условная кривизна которых есть сумма интегральных условных кривизн различных порядков // Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. М.: Изд-во МГУ, 1991. С. 176–185.
- [3] Вернер А. Л. Восстановление полной выпуклой поверхности в пространствах Лобачевского по ее интегральной внешней кривизне // Ученые зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена. 1960. Т. 218.