Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. З. Шаваровский, Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 769–782

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1453>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:44:57

УДК 512.64

РЕДУКЦИЯ МАТРИЦ ПРИ ПОМОЩИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ И ПОДОБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Б. З. Шаваровский

Исследуется структура многочленных матриц в связи с приводимостью их полускалярно эквивалентными и подобными преобразованиями к более простым видам. В частности, указывается каноническая форма многочленных матриц без кратных характеристических корней относительно указанных преобразований. Это позволяет установить каноническую форму относительно подобия для одного типа конечных наборов числовых матриц.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В целом настоящая статья посвящена исследованию структуры матриц над полями и кольцами многочленов с точки зрения их приводимости различными преобразованиями к более простым видам. В этом направлении имеется обширная литература. Отметим, например, работы [1]–[5].

В 1976 году П. С. Казимирский и В. М. Петричкович наряду с известными понятиями эквивалентности и скалярной (строгой) эквивалентности [6], [7] ввели понятие полускалярной эквивалентности многочленных матриц [8], [9]. Их общими усилиями установлена некоторая простая форма (треугольная с инвариантными множителями на главной диагонали), к которой приводится матрица посредством полускалярно эквивалентных преобразований (см. также [5]). Однако матрица указанной формы определяется неоднозначно, причем неопределенность здесь слишком велика. Следовательно, для решения задачи классификации матриц относительно полускалярной эквивалентности необходимо доопределить установленную треугольную форму (или построить новую) так, чтобы она была единственной с точностью до некоторого тривиального различия. В общем случае это очень сложная задача, напрямую связанная с классической проблемой линейной алгебры о приведении к каноническому виду пары числовых матриц одновременным преобразованием подобия (решение этой проблемы см. в [4]). Поэтому естественно сузить класс многочленных матриц настолько, чтобы эта задача уже поддавалась решению.

Объектом исследования в данной работе являются квадратные неособенные многочленные матрицы без кратных характеристических корней, а основная цель – приведение таких матриц полускалярно эквивалентными преобразованиями к каноническому виду. При этом вводится понятие обобщенных элементарных делителей, которые при переходе к многочленным матрицам первой степени совпадают с обычными элементарными делителями. Далее, применяя полученные результаты, решается задача о канонической форме относительно одновременного преобразования подобия конечных наборов

числовых матриц при том же предположении об отсутствии кратных характеристических корней у сопоставляемых наборов многочленных матриц. Предлагаемая здесь каноническая форма является набором матриц одинаковой квазидиагональной структуры, причем каждый из наборов соответствующих диагональных блоков в свою очередь является набором матриц одинакового квазитреугольного строения. Обратим внимание, что метод построения указанной формы в классе подобных всегда дает единственный с точностью до одновременной перестановки прямых слагаемых набор матриц с максимально возможным числом диагональных блоков, а характеристические многочлены диагональных блоков многочленной матрицы, сопоставляемой каноническому набору матриц, совпадают с его обобщенными элементарными делителями. Важно отметить, что в случае, когда набор состоит из одной лишь матрицы, построенная здесь каноническая форма совпадает в точности с канонической формой Жордана.

Для сравнения приведем смежные работы [10], [11], в которых указываются условия полускалярной эквивалентности отдельных классов матриц.

Отметим, наконец, что метод полускалярной эквивалентности сыграл важную роль в построении Казимирским теории разложения матричных многочленов на множители [2] (в этом направлении см. также монографию [3]).

2. Определения и вспомогательные предложения. Основным полем здесь и в дальнейшем будет линейно упорядоченное лексикографическим способом поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Прямоугольные матрицы A и A' называются *диагонально эквивалентными* (в обозначениях $A \stackrel{d}{\sim} A'$), если $A' = BAC$, где B и C – диагональные неособенные матрицы [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Строки $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ одинаковой длины называются *связанными* (обобщение аналогичного понятия из работы [10]), если существует номер i такой, что i -е элементы в этих строках одновременно отличны от 0. Система строк $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s)$ называется *связанной*, если существует их перестановка $(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_s})$ такая, что каждая последующая строка связана с некоторой из предыдущих. Две матрицы A и B называются связанными, если некоторая строка одной из них связана с некоторой строкой другой.

Нетрудно проверяется следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Матрица со связанной системой ненулевых строк и более чем одним ненулевым столбцом перестановками строк и столбцов приводится к виду

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \dots & a_{1,n_1} & & & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n_1} & a_{2,n_1+1} & \dots & a_{2,n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & \dots & a_{r,n_{r-1}} & a_{r,n_{r-1}+1} & \dots & a_{r,n_r} \end{array} \right\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underbrace{0}_{s} \end{array} \right\|, \quad (1)$$

*

где все элементы $a_{11}, \dots, a_{1,n_1}, a_{2,n_1+1}, \dots, a_{2,n_2}, \dots, a_{r,n_{r-1}+1}, \dots, a_{r,n_r}$ и все подстроки $\|a_{21} \dots a_{2,n_1}\|, \dots, \|a_{r1} \dots a_{r,n_{r-1}}\|$ ненулевые, $1 < n_1 < \dots < n_r, s \geq 0$.

Для определения канонической формы многочленной матрицы в классе полускалярно эквивалентных введем понятие псевдостochasticеской матрицы и решим вопрос о построении в классе псевдостochasticеских диагонально эквивалентных матриц некоторой стандартной формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Числовая матрица называется *псевдостochasticеской*, если сумма элементов каждой ее строки равна единице.

Очевидно, диагонально эквивалентные преобразования, вообще говоря, не сохраняют свойство псевдостochasticесности. Поэтому к псевдостochasticеским матрицам будем применять только те преобразования, которые не нарушают это свойство.

Под *позицией* некоторого элемента матрицы, как обычно, будем понимать пару чисел (i, j) , где i и j – номера строки и столбца соответственно, в которых находится этот элемент.

Отбросив тривиальный случай, когда каждая строка матрицы содержит лишь один ненулевой элемент, рассмотрим псевдостochasticескую матрицу A , система строк которой связанная. Согласно предложению 1 перестановками строк и столбцов она приводится к виду (1). Позиции матрицы A , которые занимают ненулевые элементы $a_{11}, \dots, a_{1, n_1-1}, a_{2, n_1+1}, \dots, a_{2, n_2-1}$ (если $n_2 - n_1 > 1$), $\dots, a_{r, n_{r-1}+1}, \dots, a_{r, n_r-1}$ (если $n_r - n_{r-1} > 1$), a_{2, s_1} ($1 \leq s_1 \leq n_1$), $\dots, a_{2, s_{r-1}}$ ($1 \leq s_{r-1} \leq n_{r-1}$) матрицы (1), назовем *определяющими позициями* матрицы A . Понятно, что матрица A может иметь несколько множеств определяющих позиций, поскольку матрица (1) определяется неоднозначно. Упорядочим каждое из этих множеств лексикографическим способом. Полученные таким образом упорядоченные множества назовем *наборами определяющих позиций* (НОП) данной матрицы. Пусть, далее, $\mathcal{P} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)\}$, $\mathcal{P}' = \{(i'_1, j'_1), (i'_2, j'_2), \dots, (i'_q, j'_q)\}$ – два НОП матрицы A . Будем считать, что $\mathcal{P} < \mathcal{P}'$ ($\mathcal{P}$ “меньше” $\mathcal{P}'$), если $(i_1, j_1) = (i'_1, j'_1), \dots, (i_u, j_u) = (i'_u, j'_u)$, но $(i_{u+1}, j_{u+1}) < (i'_{u+1}, j'_{u+1})$, $0 \leq u < \min(p, q)$. Среди всех НОП матрицы A можем найти единственный набор $\mathcal{P}$ такой, что $\mathcal{P} < \mathcal{P}'$ для каждого НОП $\mathcal{P}' \neq \mathcal{P}$. Назовем его *первым набором определяющих позиций* (ПНОП) матрицы A . Поскольку под действием диагонально эквивалентных преобразований позиции ненулевых элементов матрицы остаются неизменными, то ПНОП является характеристикой не одной матрицы A , а целого класса $\{BAC\}$ диагонально эквивалентных матриц. Каждой матрице $D \in \{BAC\}$ соответствует набор K_D ее элементов, стоящих в ПНОП. Это соответствие взаимно однозначно. Классу $\{BAC\}$ соответствует множество $K = \{K_D\}$ наборов элементов из $\mathbb{C}$. Предполагая основное поле комплексных чисел линейно упорядоченным лексикографическим способом, можем упорядочить теперь множество K также лексикографическим способом. Если множество $\mathcal{L}$ матриц $G \in \{BAC\}$ таких, что K_G является набором натуральных чисел, непусто, можем выбрать матрицу $H \in \mathcal{L}$ с минимальным K_H . Назовем ее *канонической* в классе псевдостochasticеских диагонально эквивалентных матриц.

ЗАМЕЧАНИЕ. Название “каноническая” здесь несколько условное, поскольку диагонально эквивалентные преобразования отнюдь не упрощают матрицу в смысле увеличения числа ее нулевых элементов и придания ей более простого вида.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В классе $\{BAC\}$ псевдостochasticеских диагонально эквива-

лентных матриц со связанной системой строк существует, притом единственная, каноническая матрица.

Доказательство. Существование. Наряду с данной псевдостochasticеской матрицей A построим матрицу Z тех же размеров, с тем же размещением нулевых элементов и с неопределенными остальными ненулевыми элементами. Пусть $(z_{i_1}, \dots, z_{i_k})$ – набор элементов матрицы Z , стоящих в ПНОП матрицы A . Будем считать, что построенная матрица псевдостochasticеская и все отношения произведений нормальных наборов (ненулевых) элементов [6] каждой ее квадратной подматрицы равны соответствующим отношениям для матрицы A . Следовательно, неизвестные элементы матрицы Z являются зависимыми. Нетрудно показать, что каждый ее ненулевой элемент имеет вид $z_i = u_i/v_i$, где $u_i, v_i \in \mathbb{C}[z_{i_1}, \dots, z_{i_k}]$. Придавая переменным $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ допустимые значения такие, что $u_i \neq 0, v_i \neq 0$, получаем конкретные (из основного поля) значения z_i . Во вполне упорядоченном (лексикографическим способом) непустом множестве наборов $\{(a_1, \dots, a_k)\}, a_j \in \mathbb{N}$, допустимых для набора неизвестных $(z_{i_1}, \dots, z_{i_k})$, выбираем первый (минимальный) набор $(a_{10}, \dots, a_{k0})$. Заменив все те элементы матрицы Z , которые являются единственными ненулевыми элементами своих строк, единицами и набор $(z_{i_1}, \dots, z_{i_k})$, элементов из ПНОП набором $(a_{10}, \dots, a_{k0})$, вычислив при этом все остальные элементы $z_i = u_i/v_i$, получим числовую псевдостochasticескую каноническую матрицу Z_0 , которая согласно [12] диагонально эквивалентна матрице A .

Единственность достаточно доказать для случая, когда матрица не содержит нулевых столбцов. Пусть имеем две канонические $(k \times t)$ -матрицы M и M' с одинаковым размещением нулевых элементов и равными соответствующими элементами в ПНОП. Не уменьшая общности, будем считать, что все позиции из ПНОП в этих матрицах находятся в первых r строках ($r \geq 1$). На основании [12] из условия

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)M = M' \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_t), \quad (2)$$

где все α_i, β_j ненулевые, вытекает, что первые r строк матрицы M совпадают с соответствующими строками матрицы M' . Таким образом, $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_t$. Пусть, далее, $\bar{a}_u$ и $\bar{a}'_u$ – u -е строки матриц M и M' соответственно, причем $u > r$. Тогда согласно доказанному выше из условия (2) имеем $\alpha_u \bar{a}_u = \alpha_1 \bar{a}'_u$. Но поскольку сумма элементов каждой из строк $\bar{a}_u, \bar{a}'_u$ равна 1, то $\alpha_1 = \alpha_u$; следовательно, $M = M'$.

3. Полускалярная эквивалентность многочленных матриц без кратных характеристических корней. Рассмотрим кольцо $\mathbb{C}_n[x]$ ($n \times n$)-матриц над $\mathbb{C}[x]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Матрицы $A(x), B(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ называются *полускалярно эквивалентными* (в обозначениях $A(x) \sim B(x)$), если $B(x) = CA(x)Q(x)$ для некоторых $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), Q(x) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}[x])$ [2], [8].

Наша задача – установить каноническую форму в классе полускалярно эквивалентных квадратных многочленных матриц без кратных характеристических корней.

Рассмотрим произвольную матрицу $A(x) \in \mathbb{C}_n[x]$, все корни характеристического многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ которой имеют кратность 1. Договоримся в дальнейшем значение произвольной матрицы $G(x)$ на системе корней многочлена $\varphi(x)$ (см. [2, определение 1, § 2, разд. 11], обозначение $M_{G(x)}(\varphi)$) записывать в порядке возрастания корней, т.е. если, например, многочлен $\varphi(x)$ имеет все простые корни $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, причем

$\alpha_{i_1} < \dots < \alpha_{i_s}$, то

$$M_{G(x)}(\varphi) = \left\| \begin{array}{c} G(\alpha_{i_1}) \\ \dots \\ G(\alpha_{i_s}) \end{array} \right\|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Матрица $A(x)$ полускалярно эквивалентна матрице вида

$$C(x) = E_{n-t} \oplus \left\| \begin{array}{c|c} E_{t-1} & 0 \\ \hline c_1(x) & \Delta(x) \end{array} \right\|, \quad (3)$$

где E_m – единичная матрица порядка m , $t = \text{rank } M_{A_*(x)}(\Delta)$ ($A_*(x)$ – взаимная матрица для $A(x)$) и для произвольно фиксированных характеристических корней $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ таких, что $\text{rank } M_{A_*(x)}[\alpha_1, \dots, \alpha_t] = t$, выполняются условия

$$c_i(\alpha_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, t, \quad c_t(x) = 1 - \sum_{k=1}^{t-1} c_k(x), \quad (4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{rank } M_{A_*(x)}(\Delta) = t$, но на основании теоремы 1 из [9] и предложений 3, 4 из [2, § 2, разд. 11] можно показать, что $A(x) \sim E_{n-t} \oplus B(x)$, где $B(x)$ имеет вид

$$B(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_{t-1} & 0 \\ \hline b_1(x) & \Delta(x) \end{array} \right\|, \quad (5)$$

причем $\text{rank } M_{B_*(x)}(\Delta) = t$, $\deg b_r < \deg \Delta$, $r = 1, \dots, t-1$. В случае $t = 1$ уже все доказано. Пусть $t > 1$ и для некоторых характеристических корней $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ выполняется условие $\text{rank } M_{A_*(x)}[\alpha_1, \dots, \alpha_t] = t$. Складывая первые $t-1$ строк матрицы $B(x)$, умноженные на некоторые константы, с последней ее строкой, получим матрицу вида (5), последняя строка которой $\| b_1^{(0)}(x) \dots b_{t-1}^{(0)}(x) \Delta(x) \|$, где $b_r^{(0)}(\alpha_t) = 0$, $r = 1, \dots, t-1$. Тогда $\| b_1^{(0)}(\alpha_1) \dots b_{t-1}^{(0)}(\alpha_1) \| \neq \bar{0}$, и мы можем считать, что $b_1^{(0)}(\alpha_1) = 1$. Далее, прибавляя некоторые кратные первого столбца ко 2-му, $\dots$, $(t-1)$ -му столбцам и производя соответствующие операции над строками, получим матрицу вида (5), последняя строка которой $\| b_1^{(1)}(x) \dots b_{t-1}^{(1)}(x) \Delta(x) \|$, где $b_r^{(1)}(\alpha_1) = \delta_{r1}$, $b_r^{(1)}(\alpha_t) = 0$, $r = 1, \dots, t-1$. Если $t > 2$, то $\| b_2^{(1)}(\alpha_2) \dots b_{t-1}^{(1)}(\alpha_2) \| \neq \bar{0}$, и мы можем считать $b_2^{(1)}(\alpha_2) = 1$. Прибавляя некоторые кратные второго столбца ко всем остальным, кроме последнего, и производя соответствующие операции над строками, получим матрицу вида (5), последняя строка которой $\| b_1^{(2)}(x) \dots b_{t-1}^{(2)}(x) \Delta(x) \|$, где $b_r^{(2)}(\alpha_j) = \delta_{rj}$, $b_r^{(2)}(\alpha_t) = 0$, $r = 1, \dots, t-1$, $j = 1, 2$. Продолжая так и далее, в результате цепочки таких преобразований придем к матрице вида (5) с t -й строкой $\| c_1(x) \dots c_{t-1}(x) \Delta(x) \|$, элементы которой удовлетворяют условиям (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если в матрицах

$$C^{(m)}(x) = E_{n-t} \oplus \left\| \begin{array}{c|c} E_{t-1} & 0 \\ \hline c_1^{(m)}(x) & \Delta(x) \end{array} \right\|, \quad m = 1, 2,$$

для некоторых характеристических корней $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ выполняются условия

$$c_i^{(m)}(\alpha_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, t, \quad c_t^{(m)}(x) = 1 - \sum_{k=1}^{t-1} c_k^{(m)}(x),$$

то условия $C^{(1)}(x) \sim C^{(2)}(x)$, $M_{\bar{c}^{(1)}(x)}(\Delta) \stackrel{d}{\sim} M_{\bar{c}^{(2)}(x)}(\Delta)$, где

$$\bar{c}^{(m)}(x) = \left\| c_1^{(m)}(x) \quad \dots \quad c_{t-1}^{(m)}(x) \quad c_t^{(m)}(x) \right\|,$$

эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C^{(1)}(x) \sim C^{(2)}(x)$. Перейдем в очевидном равенстве

$$SC^{(1)}(x) = C^{(2)}(x)R(x), \quad (6)$$

где $S, R(x)$ – обратимые матрицы, к взаимным матрицам. Из полученного равенства, обозначив через $\bar{r}_n(x)$ последнюю строку взаимной матрицы $R_*(x)$, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n-t} \quad -c_1^{(1)}(x) \quad \dots \quad -c_{t-1}^{(1)}(x) \quad 1 \right\| S_* \\ &= \bar{r}_n(x) \left[\Delta(x)E_{n-t} \oplus \left\| \frac{\Delta(x)E_{t-1}}{-c_1^{(2)}(x) \quad \dots \quad -c_{t-1}^{(2)}(x)} \right\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве к значениям матриц на системе корней многочлена $\Delta(x)$ и учитывая вид матрицы $C_*^{(2)}(x)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left(M_{\left\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad -c_1^{(1)}(x) \quad \dots \quad -c_{t-1}^{(1)}(x) \quad 1 \right\|}(\Delta) \right) S_* \\ &= \text{diag}(r_1, \dots, r_p) M_{\left\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad -c_1^{(2)}(x) \quad \dots \quad -c_{t-1}^{(2)}(x) \quad 1 \right\|}(\Delta), \end{aligned}$$

где r_i – значения последнего элемента строки $\bar{r}_n(x)$ на системе корней многочлена $\Delta(x)$, ($r_i \neq 0$). Из последнего можно получить

$$(M_{\bar{c}^{(1)}(x)}(\Delta))S' = \text{diag}(r_1, \dots, r_p)M_{\bar{c}^{(2)}(x)}(\Delta),$$

откуда, учитывая условия предложения, следует, что S' – диагональная неособенная матрица. Первая часть предложения доказана.

Обратно, пусть имеет место равенство

$$(M_{\bar{c}^{(1)}(x)}(\Delta)) \text{diag}(s_1, \dots, s_t) = \text{diag}(r_1, \dots, r_p)M_{\bar{c}^{(2)}(x)}(\Delta),$$

где все $s_1, \dots, s_t, r_1, \dots, r_p$ ненулевые. Отсюда можем записать

$$\begin{aligned} & \left(M_{\left\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad -c_1^{(1)}(x) \quad \dots \quad -c_{t-1}^{(1)}(x) \quad 1 \right\|}(\Delta) \right) (E_{n-t} \oplus \|c_{ij}\|) \\ &= \text{diag}(r_1, \dots, r_p) M_{\left\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad -c_1^{(2)}(x) \quad \dots \quad -c_{t-1}^{(2)}(x) \quad 1 \right\|}(\Delta), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\|c_{ij}\|$ – матрица размеров $t \times t$, причем $c_{kk} = s_k$, $c_{kt} = s_t - s_k$, $k = 1, \dots, t-1$, $c_{tt} = s_t$ и все остальные элементы равны 0. По элементам матриц $\|c_{ij}\|$, $C^{(1)}(x)$ и $C^{(2)}(x)$ построим $(t \times t)$ -матрицу $\|r_{ij}(x)\|$ следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{tv}(x) &= \frac{r_{tt}(x)c_v^{(2)}(x) - c_{vv}c_v^{(1)}(x)}{\Delta(x)}, \\ r_{uv}(x) &= c_{uv} + c_{ut}c_v^{(2)}(x), \quad r_{ut}(x) = c_{ut}\Delta(x), \quad u, v = 1, \dots, t-1, \\ r_{tt}(x) &= c_{tt} - \sum_{h=1}^{t-1} c_{ht}c_h^{(1)}(x). \end{aligned}$$

На основании (7) убеждаемся, что $\|r_{ij}(x)\| \in \mathbb{C}_t[x]$, и непосредственным подсчетом проверяем справедливость равенства

$$\begin{aligned} &\left[\Delta(x)E_{n-t} \oplus \left\| \begin{array}{c|c} \Delta(x)E_{t-1} & 0 \\ \hline -c_1^{(1)}(x) & \dots & -c_{t-1}^{(1)}(x) & 1 \end{array} \right\| \right] [E_{n-t} \oplus \|c_{ij}\|] \\ &= [E_{n-t} \oplus \|r_{ij}(x)\|] \left[\Delta(x)E_{n-t} \oplus \left\| \begin{array}{c|c} \Delta(x)E_{t-1} & 0 \\ \hline -c_1^{(2)}(x) & \dots & -c_{t-1}^{(2)}(x) & 1 \end{array} \right\| \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (6).

Пусть матрица $A(x)$ приведена к виду (3), описанному в предложении 3. Тогда матрица $L = M_{\bar{c}(x)}(\Delta)$, где

$$\bar{c}(x) = \|c_1(x) \quad \dots \quad c_{t-1}(x) \quad c_t(x)\|, \quad c_t(x) = 1 - \sum_{p=1}^{t-1} c_p(x),$$

перестановками строк приводится к виду

$$L \rightarrow \left\| \begin{array}{c} L_1 \\ \dots \\ L_k \end{array} \right\|, \quad 1 \leq k \leq t,$$

где система строк каждой подматрицы L_i связанная, а подматрицы L_j и L_m при $j \neq m$ несвязанные. Этим определяется некоторое разложение характеристического многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$:

$$\Delta(x) = \prod_{i=1}^k \Delta_i(x), \quad (8)$$

а именно: $M_{\bar{c}(x)}(\Delta_i) = L_i$, $i = 1, \dots, k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Разложение (8) классом полускалярно эквивалентных матриц $\{CA(x)Q(x)\}$ определяется однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеются полускалярно эквивалентные матрицы вида (3):

$$E_{n-t} \oplus \left\| \begin{array}{c|c} E_{t-1} & 0 \\ \hline c_1^{(1)}(x) \dots c_{t-1}^{(1)}(x) & \Delta(x) \end{array} \right\| \sim E_{n-t} \oplus \left\| \begin{array}{c|c} E_{t-1} & 0 \\ \hline c_1^{(2)}(x) \dots c_{t-1}^{(2)}(x) & \Delta(x) \end{array} \right\|.$$

Тогда каждая из матриц $M_{\bar{c}^{(m)}(x)}(\Delta)$ ($m = 1, 2$), где

$$\bar{c}^{(m)}(x) = \left\| c_1^{(m)}(x) \dots c_{t-1}^{(m)}(x) \ c_t^{(m)}(x) \right\|,$$

содержит все строки единичной матрицы E_t . Для некоторого разложения $\Delta(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)$ построим матрицы

$$M^{(m)} = \left\| \frac{M_1^{(m)}}{M_2^{(m)}} \right\| = \left\| \frac{M_{\bar{c}^{(m)}(x)}(\varphi_1)}{M_{\bar{c}^{(m)}(x)}(\varphi_2)} \right\|, \quad m = 1, 2.$$

Если матрицы $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}$ несвязанные и $\text{rank } M_i^{(1)} = n_i, i = 1, 2$, то $n_1 + n_2 = t = \text{rank } M^{(1)}$. Согласно предложению 4 из [2, § 2, разд. II] $\text{rank } M^{(2)} = t, \text{rank } M_i^{(2)} = n_i, i = 1, 2$. Следовательно, из t строк матрицы E_t , присутствующих в матрице $M^{(2)}$, ровно n_i содержатся в матрице $M_i^{(2)}$ ($i = 1, 2$). Это значит, что матрицы $M_1^{(2)}, M_2^{(2)}$ несвязанные. Из приведенных рассуждений и вытекает заключение предложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множители $\Delta_i(x)$ ($i = 1, \dots, k$) разложения (8) характеристического многочлена $\Delta(x)$ называются *обобщенными элементарными делителями* (ОЭД) I рода матрицы $A(x)$.

Далее полезным будет ввести понятие степени матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Степенью* ненулевой матрицы L (обозначение: $\text{st } L$) будем называть пару чисел (p, q) , где $p = (\text{rank } L)/q$, q – число ненулевых строк матрицы L , если на множестве таких пар определить отношение порядка: $(p, q) < (p', q')$ в случае $p < p'$ или $p = p', q < q'$.

Согласимся произвольную матрицу B , состоящую из некоторых строк матрицы L , называть *строчной подматрицей* матрицы L . При этом L -номером строки $\bar{b}$ матрицы B будем называть номер этой строки в матрице L .

Пусть $\Delta_i(x)$ – ОЭД I рода матрицы $A(x)$, приведенной к виду (3). Рассмотрим матрицу $L_i = M_{\bar{c}(x)}(\Delta_i)$. Нетрудно убедиться, что перестановками строк матрица L_i приводится к виду

$$L_i \rightarrow \left\| \begin{array}{c} L_{i1} \\ \dots \\ L_{it_i} \end{array} \right\| = \tilde{L}_i,$$

где

$$\text{st} \left\| \begin{array}{c} L_{i1} \\ \dots \\ L_{i,j-1} \\ L_{ij} \end{array} \right\| \leq \text{st} \left\| \begin{array}{c} L_{i1} \\ \dots \\ L_{i,j-1} \\ H_{ij} \end{array} \right\|, \quad j = 1, \dots, t_i,$$

H_{ij} – произвольная строчная подматрица матрицы, полученной из L_i вычеркиванием подматриц $L_{i1}, \dots, L_{i,j-1}$, причем в случае равенства степеней указанных матриц

минимальный L_i -номер строк подматрицы L_{ij} меньше минимального L_i -номера строк подматрицы H_{ij} . Очевидно, с точностью до размещения строк в пределах каждой из подматриц L_{ij} матрица $\tilde{L}_i$ определяется однозначно. Ей соответствует некоторое разложение ОЭД I рода $\Delta_i(x)$:

$$\Delta_i(x) = \prod_{j=1}^{t_i} \Delta_{ij}(x),$$

так что $L_{ij} = M_{\tilde{c}(x)}(\Delta_{ij})$, $j = 1, \dots, t_i$. Таким образом, от разложения (8) характеристического многочлена $\Delta(x)$ матрицы $A(x)$ на ОЭД I рода приходим к разложению

$$\Delta(x) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{t_i} \Delta_{ij}(x). \quad (9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Разложение (9) классом полускалярно эквивалентных матриц $\{CA(x)Q(x)\}$ определяется однозначно.

Доказательство легко провести, используя предложение 4 из [2, § 2, разд. II] и определение 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Множители $\Delta_{ij}(x)$ ($i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, t_i$) разложения (9) характеристического многочлена $\Delta(x)$ называются *обобщенными элементарными делителями* II рода матрицы $A(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Матрица $F(x)$ без кратных корней характеристического многочлена $\Delta(x)$ с ОЭД I рода $\Delta_i(x)$ ($i = 1, \dots, k$) и ОЭД II рода $\Delta_{ij}(x)$ ($i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, t_i$) называется *канонической* в классе полускалярно эквивалентных матриц, если она имеет вид

$$F(x) = \bigoplus_{i=1}^k F_i(x) \oplus E_{n-t}, \quad (10)$$

где

$$F_i(x) = \left\| \frac{E_{n_i-1}}{f_1^{(i)}(x) \dots f_{n_i-1}^{(i)}(x)} \middle| \begin{matrix} 0 \\ \Delta_i(x) \end{matrix} \right\|, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\deg f_m^{(i)} < \deg \Delta_i, \quad m = 1, \dots, n_i - 1, \quad n_i = \text{rank } M_{F_*(x)}(\Delta_i), \quad t = \text{rank } M_{F_*(x)}(\Delta),$$

и матрица

$$\left\| \begin{matrix} M_{\tilde{f}^{(i)}(x)}(\Delta_{i1}) \\ \dots \\ M_{\tilde{f}^{(i)}(x)}(\Delta_{it_i}) \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{f}^{(i)}(x) = \left\| f_1^{(i)}(x) \dots f_{n_i-1}^{(i)}(x) \ f_{n_i}^{(i)}(x) \right\|,$$

$$f_{n_i}^{(i)}(x) = 1 - \sum_{m=1}^{n_i-1} f_m^{(i)}(x),$$

в которой первые n_i линейно независимых строк образуют единичную матрицу F_{n_i} , является канонической в классе псевдостochasticеских диагонально эквивалентных матриц.

ТЕОРЕМА 1. В классе полускалярно эквивалентных матриц без кратных характеристических корней существует, причем единственная с точностью до порядка прямых слагаемых, каноническая матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_i(x), \Delta_{ij}(x)$ ($i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, t_i$) – соответственно ОЭД I и II рода матрицы $A(x)$, которая согласно предложению 3 полускалярно эквивалентна матрице (3). Построим матрицу $L_i = M_{\bar{c}(x)}(\Delta_{i1} \cdots \Delta_{it_i})$ ($i = 1, \dots, k$), где $\bar{c}(x) = \|c_1(x) \dots c_{t-1}(x) c_t(x)\|$. Обозначим через n_i число ее ненулевых столбцов, а через $\bar{c}^{(i)}(x)$ строку, состоящую из тех элементов строки $\bar{c}(x)$, которые соответствуют этим n_i ненулевым столбцам матрицы L_i ($i = 1, \dots, k$). Поскольку $\text{rank} \|L_1^T \dots L_k^T\|^T = t$ и матрицы L_i ($i = 1, \dots, k$) попарно несвязанные, то $n_1 + \dots + n_k = t$ и строки $\|\bar{c}^{(1)}(x) \dots \bar{c}^{(k)}(x)\|, \bar{c}(x)$ различаются, возможно, лишь размещением элементов. Приведем строки $\bar{c}^{(i)}(x)$ ($i = 1, \dots, k$) по модулю $\Delta_i(x)$:

$$\bar{c}^{(i)}(x) \equiv \bar{d}^{(i)}(x) \pmod{\Delta_i(x)}, \quad \bar{d}^{(i)}(x) = \|\bar{d}_1^{(i)}(x) \dots \bar{d}_{n_i-1}^{(i)}(x) \bar{d}_{n_i}^{(i)}(x)\|,$$

и построим матрицу

$$D(x) = \bigoplus_{i=1}^k \left\| \begin{array}{c|c} E_{n_i-1} & 0 \\ \hline \bar{d}_0^{(i)}(x) & \Delta_i(x) \end{array} \right\| \oplus E_{n-t},$$

где $\bar{d}_0^{(i)}(x) = \|\bar{d}_1^{(i)}(x) \dots \bar{d}_{n_i-1}^{(i)}(x)\|$. Покажем, что $C(x) \sim D(x)$. Доказательство этого факта достаточно провести для $k = 2$. Так как $\text{НОД}(\Delta_1(x), \Delta_2(x)) = 1$, то существуют $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ такие, что $u_1(x)\Delta_1(x) + u_2(x)\Delta_2(x) = 1$, $\deg u_1 < \deg \Delta_2$, $\deg u_2 < \deg \Delta_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{c|c|c|c} E_{n_i-1} & & & 0 \\ \hline \bar{d}_0^{(1)}(x) & \Delta_1(x) & \bar{d}_0^{(2)}(x) & \Delta_2(x) \\ \hline & & E_{n_2-1} & 0 \\ \hline 0 & & \bar{d}_0^{(2)}(x) & \Delta_2(x) \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} E_{n_i-1} & 0 \\ \hline u_1(x) & -\Delta_2(x) \\ & 1 \\ & \ddots \\ & 1 \\ u_2(x) & \Delta_1(x) \end{array} \right\| \\ & \sim \left\| \begin{array}{c|c} E_{t-1} & 0 \\ \hline g_1^{(1)}(x) \dots g_{n_1}^{(1)}(x) & g_1^{(2)}(x) \dots g_{n_2-1}^{(2)}(x) \\ \hline & \Delta(x) \end{array} \right\|, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_p^{(1)}(x) &\equiv u_2(x)\Delta_2(x)d_p^{(1)}(x) \pmod{\Delta(x)}, & p = 1, \dots, n_1, \\ g_m^{(2)}(x) &\equiv u_1(x)\Delta_1(x)d_m^{(2)}(x) \pmod{\Delta(x)}, & m = 1, \dots, n_2 - 1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что строки

$$\|g_1^{(1)}(x) \dots g_{n_1}^{(1)}(x) \ g_1^{(2)}(x) \dots g_{n_2-1}^{(2)}(x)\|, \quad \|c_1(x) \dots c_{t-1}(x)\|$$

имеют степени меньше чем $\deg \Delta$ и принимают одинаковые значения на системе корней многочлена $\Delta(x)$. Поэтому они равны и нужное доказано. Учитывая предложение 3, можем считать, что первые n_i линейно независимых строк матрицы

$$\tilde{L}_i = M_{\bar{d}^{(i)}(x)}(\Delta_{i1} \cdots \Delta_{it_i}), \quad i = 1, \dots, k,$$

образуют единичную матрицу E_{n_i} . Далее, для каждой из матриц $\tilde{L}_i$ в классе псевдостochasticеских диагонально эквивалентных матриц находим каноническую N_i и по интерполяционным формулам строим строки $\bar{f}^{(i)}(x) = \|\bar{f}_1^{(i)}(x) \dots \bar{f}_{n_i}^{(i)}(x)\|$ такие, что $N_i = M_{\bar{f}^{(i)}(x)}(\Delta_{i1} \dots \Delta_{it_i})$. Затем по элементам $\bar{f}_m^{(i)}(x)$ строим матрицу вида (10), имеющую каноническую форму. Последняя согласно предложению 4 полускалярно эквивалентна матрице $D(x)$.

Единственность следует из предложений 2, 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Строки $\|\bar{f}_1^{(i)}(x) \dots \bar{f}_{n_i-1}^{(i)}(x) \bar{f}_{n_i}^{(i)}(x)\|$ ($i = 1, \dots, k$), где

$$f_{n_i}^{(i)}(x) = 1 - \sum_{m=1}^{n_i-1} f_m^{(i)}(x)$$

и все $\bar{f}_m^{(i)}(x)$ взяты из канонического вида (10) матрицы $F(x)$, называются *инвариантными многочленными строками* матрицы $A(x) \sim F(x)$.

4. Подобие матричных многочленов. Рассмотрим набор из s квадратных матриц над $\mathbb{C}$ порядка n :

$$\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_s). \quad (11)$$

Сопоставим ему матричный многочлен

$$A(x) = E_n x^s - A_1 x^{s-1} - \dots - A_s. \quad (12)$$

Будем предполагать, что все корни характеристического многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ просты. Цель этого пункта – построение канонической формы набора числовых матриц (11) в классе подобных наборов $\{(PA_1P^{-1}, \dots, PA_sP^{-1})\}$, $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ или, что то же самое, построение канонической формы матричного многочлена (12) в классе подобных многочленов $\{PA(x)P^{-1}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Матричный многочлен $I(x) = E_n x^s - I_1 x^{s-1} - \dots - I_s$ без кратных характеристических корней называется *канонической клеткой*, если он имеет лишь один ОЭД I рода, соответственно одну инвариантную многочленную строку $\bar{f}(x)$, и ОЭД II рода $\Delta_{11}(x), \dots, \Delta_{1t_1}(x)$, с которыми он связан следующим образом:

$$\left\| \begin{array}{c} I_s \\ \dots \\ I_1 \end{array} \right\| = \left\| M_{x^0 \bar{f}(x)}(\Delta_{11} \dots \Delta_{1t_1}) \mid \dots \mid M_{x^{s-1} \bar{f}(x)}(\Delta_{11} \dots \Delta_{1t_1}) \right\|^{-1} \\ \times M_{x^s \bar{f}(x)}(\Delta_{11} \dots \Delta_{1t_1}). \quad (13)$$

Напомним, что матричный многочлен называется *приводимым*, если преобразованием подобия он приводится к квазитреугольному виду. В противном случае говорят, что многочлен неприводимый.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Каноническая клетка к квазидиагональному виду не приводится. Она либо является неприводимым матричным многочленом, если число t_1 ОЭД II рода равно 1, либо имеет квазитреугольный вид с t_1 неприводимыми диагональными блоками, если $t_1 > 1$. В последнем случае ОЭД II рода являются характеристическими многочленами диагональных блоков квазитреугольного вида канонической клетки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана каноническая клетка $I(x)$ степени s порядка n и $\bar{f}(x)$ – ее инвариантная многочленная строка. Предположим сначала вопреки заключению предложения, что преобразованием подобия многочлен $I(x)$ приводится к квазидиагональному виду с двумя диагональными блоками порядков p_1, p_2 и характеристическими многочленами $\Delta_1(x), \Delta_2(x)$ соответственно. Тогда $\deg \Delta_i = sp_i$ и, применяя предложение 4 из [2, § 2, разд. II] и теорему 5 из [13], получаем

$$\text{rank } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_i) = \text{rank } M_{I_*(x)}(\Delta_i) = p_i, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Это значит, что система строк матрицы $M_{\bar{f}(x)}(\Delta_1 \Delta_2)$ несвязанная, что невозможно, ибо $I(x)$ имеет лишь один ОЭД I рода.

Допустим теперь, что многочлен $I(x)$ с одним лишь ОЭД II рода ($t_1 = 1$) преобразованием подобия приводится к квазитреугольному виду с двумя диагональными блоками порядков p_1, p_2 и характеристическими многочленами $\Delta_1(x), \Delta_2(x)$ соответственно. Тогда $\deg \Delta_i = sp_i, i = 1, 2$, и на основании теоремы I из [2, § 3, разд. V] имеет место одно из равенств (14) (для $i = 1$ или $i = 2$). Поэтому для одной из строчных подматриц $M_{\bar{f}(x)}(\Delta_i)$ ($i = 1, 2$) матрицы $M_{\bar{f}(x)}(\Delta_1 \Delta_2)$ выполняется условие

$$\text{st } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_i) = \left(\frac{1}{s}, sp_i \right) < \left(\frac{1}{s}, sn \right) = \text{st } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_1 \Delta_2),$$

что влечет за собой существование по крайней мере двух ОЭД II рода.

Оставшуюся часть предложения достаточно доказать для $t_1 = 2$. Пусть $\Delta_{11}(x), \Delta_{12}(x)$ – ОЭД II рода матрицы $I(x)$, $\deg \Delta_{11} = d, d = sp + h, 0 \leq h < s$. Поскольку $\text{st } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11}) < \text{st } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11} \Delta_{12})$, то

$$\frac{1}{d} \text{rank } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11}) \leq \frac{1}{sn} \text{rank } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11} \Delta_{12}). \quad (15)$$

Следовательно,

$$\text{rank } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11}) \leq \text{rank } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11} \Delta_{12}).$$

Если $\text{rank } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11}) = p_1$, то согласно определениям 8, 9 матрица $M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11})$ содержит p_1 первых строк единичной матрицы E_n ; следовательно, ее последние $n - p_1$ столбцов нулевые. Из теоремы 3 из [2, § 2, разд. III] имеем, что $\text{rank } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11} \Delta_{12}) = n$. Поэтому из неравенства (15) получаем $p_1/(sp + h) < 1/s$, откуда $p_1 < p$. Снова обращаясь к теореме 3 из [2, § 2, разд. III], имеем

$$\text{rank} \left\| M_{x^0 \bar{f}(x)}(\Delta_{11} \Delta_{12}) \mid \dots \mid M_{x^{s-1} \bar{f}(x)}(\Delta_{11} \Delta_{12}) \right\| = sn.$$

Таким образом, $p = p, h = 0$ и на самом деле $d = sp$. Из вида матриц

$$\left\| M_{x^0 \bar{f}(x)}(\Delta_{11} \Delta_{12}) \mid \dots \mid M_{x^{s-1} \bar{f}(x)}(\Delta_{11} \Delta_{12}) \right\|^{-1}, \quad M_{x^s \bar{f}(x)}(\Delta_{11} \Delta_{12})$$

и формулы (13) вытекает, что коэффициенты $I_1, \dots, I_s$ многочлена $I(x)$ имеют одинаковую квазитреугольную структуру, поэтому

$$I(x) = \left\| \begin{array}{cc} D_1(x) & 0 \\ * & D_2(x) \end{array} \right\|,$$

где $D_1(x) - (p \times p)$ -матрица, $\det D_i(x) = \Delta_{1i}(x)$, $i = 1, 2$. Если один из диагональных блоков матрицы $I(x)$ приводимый, то, принимая во внимание теорему 1 из [2, § 3, разд. V], либо матрица $M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11})$ имеет собственную строчную подматрицу степени меньше чем $\text{st } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11})$, либо матрица $M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{12})$ имеет собственную строчную подматрицу такую, что в совокупности с матрицей $M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11})$ ее степень меньше чем $\text{st } M_{\bar{f}(x)}(\Delta_{11}\Delta_{12})$. В обоих случаях получаем противоречие с условием, что $I(x)$ имеет лишь два ОЭД II рода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Матричный многочлен без кратных характеристических корней называется *каноническим*, если он является прямой суммой канонических клеток.

ТЕОРЕМА 2. В классе подобных матричных многочленов существует, причем единственный с точностью до перестановки канонических клеток, канонический матричный многочлен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Пусть $\Delta_i(x)$ и $\Delta_{ij}(x)$ – ОЭД I и II рода соответственно матричного многочлена (12),

$$\bar{f}^{(i)}(x) = \left\| \bar{f}_1^{(i)}(x) \ \dots \ \bar{f}_{n_i-1}^{(i)}(x) \ \bar{f}_{n_i}^{(i)}(x) \right\|, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, t_i,$$

– его инвариантные многочленные строки ($n_1 + \dots + n_k = n$). Построим матрицу

$$F(x) = \bigoplus_{i=1}^k F_i(x),$$

где

$$F_i(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_{n_i-1} & 0 \\ \hline f_1^{(i)}(x) \ \dots \ f_{n_i-1}^{(i)}(x) & \Delta(x) \end{array} \right\|.$$

Очевидно, $F_i(x)$ – каноническая в классе полускалярно эквивалентных матриц, причем $\Delta_i(x)$, $\Delta_{ij}(x)$ ($j = 1, \dots, t_i$) и $\bar{f}^{(i)}(x)$ – ее ОЭД I, II рода и инвариантная многочленная строка соответственно. Поэтому матричный многочлен

$$I^{(i)}(x) = E_{n_i}x^s - I_1^{(i)}x^{s-1} - \dots - I_s^{(i)},$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} I_s^{(i)} \\ \vdots \\ I_1^{(i)} \end{array} \right\| &= \left\| M_{x^0 \bar{f}^{(i)}(x)}(\Delta_{i1} \dots \Delta_{it_i}) \mid \dots \mid M_{x^{s-1} \bar{f}^{(i)}(x)}(\Delta_{i1} \dots \Delta_{it_i}) \right\|^{-1} \\ &\quad \times M_{x^s \bar{f}^{(i)}(x)}(\Delta_{i1} \dots \Delta_{it_i}), \end{aligned}$$

является канонической клеткой, а матричный многочлен

$$I(x) = \bigoplus_{i=1}^k I^{(i)}(x)$$

– каноническим матричным многочленом в классе подобных. Очевидно, $A(x) \sim F(x)$, и согласно теореме 2 из [2, § 3, разд. III] $F(x) \sim I(x)$. Следовательно, $A(x) \sim I(x)$ и в силу [9] $A(x) = P I(x) P^{-1}$.

Единственность канонического матричного многочлена в классе подобных следует из единственности канонической формы в классе полускалярно эквивалентных матриц и однозначности определения формулой (13) коэффициента канонической клетки. Теорема доказана.

Таким образом, по набору числовых матриц $\mathcal{A}$ и соответствующему ему матричному многочлену $A(x)$ мы построили канонический матричный многочлен $I(x)$, подобный $A(x)$. Набор коэффициентов многочлена $I(x)$ – подобный набору $\mathcal{A}$. Он является каноническим в классе подобных, поскольку имеет наиболее простую форму и определяется однозначно.

В заключение отметим, что ОЭД I рода многочленной матрицы являются характеристическими многочленами канонических клеток ее канонической формы, а ОЭД II рода – характеристическими многочленами неприводимых диагональных блоков квазистреугольного вида этих клеток. Заметим также, что в случае, когда набор состоит из одной лишь матрицы, построенная здесь каноническая форма является диагональной, следовательно, совпадает с формой Жордана этой матрицы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кравчук М. П. Про квадратичні форми та лінійні перетворення // Тр. фіз.-мат. відділу УАН. 1924. Т. 1. № 3. С. 1–91.
- [2] Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. Київ: Наукова думка, 1981.
- [3] Gohberg I, Lancaster P., Rodman L. Matrix Polynomials. New York: Acad. Press, 1982.
- [4] Friedland S. Simultaneous similarity of matrices // Adv. Math. 1983. V. 50. P. 189–265.
- [5] Baratchart L. Un theoreme de factorisation et son application à la representation des systèmes cyclique causaux // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1982. V. 295. № 3. P. 223–226.
- [6] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
- [7] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
- [8] Казимирский П. С., Петричкович В. М. К выделению из полиномиальной матрицы линейного множителя с заданной системой инвариантных многочленов // III Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы докл. Тарту, 1976. С. 19.
- [9] Казімірський П. С., Петричкович В. М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. Київ: Наукова думка, 1977. С. 61–66.
- [10] Казимирский П. С., Мельник О. М. Подобие и строение унитарных матричных квадратных трехчленов с попарно различными характеристическими корнями // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1989. Т. 175. С. 63–68.
- [11] Казимирский П. С., Билонога Д. М. Полускалярная эквивалентность многочленных матриц с взаимно простыми элементарными делителями // Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. Т. 4. С. 8–9.
- [12] Шаваровский Б. З. Полускалярная эквивалентность полиномиальных матриц с попарно различными корнями их характеристического многочлена // Матем. методы и физ.-мех. поля. Вып. 19. Киев: Наукова думка, 1984. С. 33–37.
- [13] Шаваровский Б. З. О приводимости матричных многочленов к блочно-треугольному и блочно-диагональному видам // Материалы 10-й конференции молодых ученых Института прикладных проблем механики и математики АН УССР. Ч. 2. Львов, 1984. С. 225–228. Деп. ВИНТИ № 7197-84.