Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Буте де Монвель, С. Ю. Доброхотов, О случайных возмущениях инвариантных лагранжевых торов гамильтоновых векторных полей, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 783–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1454>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:51:39

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ИНВАРИАНТНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ ТОРОВ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

А. Буте де Монвель, С. Ю. Доброхотов

В теории интегрируемых гамильтоновых систем торы Лиувилля (см., например, [1]), играют важную роль: области финитных движений в фазовом пространстве расслаиваются на такие торы, причем движение по ним оказывается условно-периодическим. Если $x = (p, q)$ – координаты в фазовом пространстве $\mathbb{R}_x^{2n}$ с симплектической структурой, заданной формой $dp \wedge dq$, то в некоторой области финитного движения в силу гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(p, q)$ эти n -мерные торы задаются уравнениями: $\Lambda = (x \in \mathbb{R}_x^{2n}, x = X(\varphi))$. Здесь $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\varphi_j \in [0, 2\pi]$, – угловые переменные и

$$X(\varphi) = \begin{pmatrix} P(\varphi) \\ Q(\varphi) \end{pmatrix}$$

– гладкие 2π -периодические $2n$ -мерные вектор-функции всех переменных φ_j , $j = 1, \dots, n$, также зависящие гладким образом от n параметров $I = (I_1, \dots, I_n) \in \Omega$ (переменных действия), Ω – некоторая область из $\mathbb{R}_I^n$. Траектории соответствующей гамильтоновой системы определяются вектором частот $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ и вектор-функцией $X(\varphi)$:

$$x = X(\varphi + \omega t). \quad (1)$$

Торы Λ являются лагранжевыми многообразиями (см., например, [1]–[4]): на них обращается в 0 форма $dp \wedge dq$. Требование существования семейства таких торов эквивалентно требованию интегрируемости гамильтоновой системы с гамильтонианом H (в некоторой области фазового пространства) и является весьма жестким. В то же время и у неинтегрируемых гамильтоновых систем могут существовать отдельные (индивидуальные) торы, движение по которым также условно-периодическое с частотами ω и которые также обладают свойством лагранжевости (см. [4]). Именно такие инвариантные лагранжевы торы Λ (в том числе и торы Лиувилля) мы будем рассматривать в дальнейшем.

Угловые переменные $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ порождают на Λ инвариантную меру $d\mu = d\varphi_1 \cdots d\varphi_n$, которая позволяет определить δ -функцию $\delta_{(\Lambda, d\mu)}$ тора Λ , т.е. обобщенную функцию (см. [5, т. 1]) такую, что для любой функции $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^{2n})$

$$(\delta_{(\Lambda, d\mu)} \psi(x)) = \int_{\Lambda} \psi|_{\Lambda} d\mu.$$

Тот факт, что Λ и мера $d\mu$ инвариантны относительно гамильтонова векторного поля, порожденного H (т.е. относительно соответствующей гамильтоновой системы), означает, что (см. [5, т. 3])

$$\frac{d}{dt} \delta_{(\Lambda, d\mu)} \equiv \{H, u\} = 0.$$

Здесь $\{H, u\}$ – скобка Пуассона между H и u . Иными словами, задача Коши уравнения Лиувилля для плотности $u(x, t)$ нахождения частиц на Λ в момент времени t

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \{H, u\} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \delta_{(\Lambda, d\mu)} \quad (3)$$

имеет постоянное решение $u = \delta_{(\Lambda, d\mu)}$. Пусть теперь на частицы, находящиеся на Λ , начиная с момента времени $t = 0$ действуют малые случайные возмущения. Наиболее простая и естественная ситуация описывается уравнением (см., например, [6], [7])

$$\dot{x}^\varepsilon = \hat{J}Hx + \sqrt{\varepsilon}\sigma(x^\varepsilon)\dot{w}_t, \quad x^\varepsilon|_{t=0} = x \in \Lambda^n, \quad (4)$$

где w_t – винеровский процесс, $\sigma(x)$ есть $(2n \times 2n)$ -матричнозначная функция, $\varepsilon > 0$ – малый параметр,

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} O_n & -E_n \\ E_n & O_n \end{pmatrix}$$

и мы обозначили через E_n единичную $(n \times n)$ -матрицу и через O_n $(n \times n)$ -матрицу. Ограничимся рассмотрением двух простейших ситуаций

$$1) \quad \sigma(x) = E_{2n}, \quad 2) \quad \sigma(x) = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ O_n & E_n \end{pmatrix}.$$

В случае 1) случайное возмущение действует как по координате q , так и по импульсам (скоростям) p , в случае 2) – только по координатам. Хорошо известно, что диффузионный процесс x^ε , задаваемый (4), порождает дифференциальный оператор

$$L = b(x) \cdot \nabla + \frac{\varepsilon}{2} \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \equiv \begin{cases} \Delta_q + \Delta_p & \text{в случае 1),} \\ \Delta_q & \text{в случае 2).} \end{cases}$$

Здесь $b(x) = \hat{J}Hx$, Δ_q и Δ_p – операторы Лапласа по переменным q и p соответственно. Теперь вместо задачи (2), (3) для функции $u(x, t)$ возникает задача (3) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu. \quad (5)$$

Заметим, что в случае 2) мы имеем “вырожденную диффузию”.

Цель этой заметки – изучить “степенную” или “аддитивную” асимптотику при $\varepsilon \rightarrow \infty$ этой задачи, которая в теории вероятности соответствует “нормальным отклонениям”. Наш основной результат состоит в наблюдении о том, что главный член асимптотики (нормальное отклонение) для лагранжевых торов (независимо от интегрируемости соответствующей гамильтоновой системы) полностью определяется тором Λ : траекториями (1) и касательными векторами к Λ .

Задачи, близкие по постановке и по идеологии, апеллирующей к траекториям предельного при $\varepsilon \rightarrow +0$ гамильтонова векторного поля, изучались, в частности, в монографии [7] для уравнения (5) в случае 1) и в работах [8], [9] для уравнения (5) в случае 2). В [7] изучена асимптотика вероятности перехода под действием случайных возмущений с одной замкнутой траектории одномерной гамильтоновой системы на другую замкнутую траекторию (компоненту связности) этой системы. В работах [8], [9] получена мультипликативная асимптотика фундаментального решения для многомерного уравнения (5) с вырожденным оператором диффузии. Упомянутые задачи относятся к классу задач “о больших отклонениях” или о “мультипликативных” и “экспоненциальных” асимптотиках, и полученные в работах [7]–[9] результаты оказываются весьма тонкими и требуют выполнения достаточно жестких условий. Полученные в нашей работе “грубые” асимптотические формулы имеют простой и явный вид и справедливы при весьма общих и слабых предположениях. В любом случае приводимые ниже формулы нам не удалось найти в литературе. Заметим также, что инвариантные торы Λ гамильтоновых систем не могут быть асимптотически устойчивыми (даже

как геометрические объекты в $\mathbb{R}_x^{2n}$), так как $\nabla \cdot \hat{J} \nabla H = 0$, поэтому у оператора L нет асимптотических собственных функций, локализованных в окрестности торов Λ и построенных в [10] для инвариантных асимптотически устойчивых торов.

Прежде чем сформулировать основной результат статьи, приведем несколько необходимых вспомогательных утверждений. Обозначим через Q_φ и P_φ ($n \times n$)-матрицы Якоби с элементами

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right)_{ij} = \frac{\partial Q_j}{\partial \varphi_i}, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\partial Q_j}{\partial \varphi_i}$$

и через x_φ ($2n \times n$)-матрицу Якоби

$$X_\varphi(\varphi) = \begin{pmatrix} P_\varphi(\varphi) \\ Q_\varphi(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Введем ($n \times n$)-матрицы-функции

$$R_1(\varphi) = {}^t Q_\varphi Q_\varphi + {}^t P_\varphi P_\varphi, \quad R_2(\varphi) = {}^t P_\varphi P_\varphi.$$

Очевидно, R_1 и R_2 неотрицательны для всех φ .

ЛЕММА 1. Матрица R_1 строго положительна для всех φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что R_1 вырождена в какой-либо точке φ^0 . Тогда существует вектор a такой, что $Q_\varphi a = P_\varphi a = 0$. Это означает, что касательная плоскость к Λ в точке φ^0 имеет размерность меньше n , что противоречит предположению о том, что $\dim \Lambda = n$.

В отличие от R_1 матрица R_2 не строго положительна. Обозначим через Γ множество точек, в которых матрица P_φ имеет неполный ранг, и потребуем, чтобы было выполнено следующее условие:

- (n) существует число δ_Γ такое, что траектории гамильтонова векторного поля $\hat{J} \nabla H_\alpha$, выпущенные из Γ , покидают некоторую замкнутую окрестность Γ за время δ_Γ . (Такое число всегда существует, если Λ находится в общем положении и если частоты ω линейно независимы над кольцом целых чисел. Тогда любая траектория (1) всюду плотно покрывает тор Λ , а коразмерность Γ не меньше 1, см. [1].)

Следующие леммы 2–4 получаются с помощью элементарных рассуждений.

ЛЕММА 2. В случае 1) существует константа $C_1 > 0$ такая, что

$$G(\varphi, t) = \int_0^t R_1(\varphi + \omega\tau) d\tau > C_1 E_n t.$$

Пусть в случае 2) выполнено условие (n). Тогда существует константа $C_2 > 0$ такая, что при $t > \delta_\Gamma$

$$G(\varphi, t) = \int_0^t R_2(\varphi + \omega\tau) d\tau > C_2 E_n \delta_\Gamma.$$

Лемма 2 позволяет построить функцию u_Λ , определяющую асимптотику решения задачи (5), (3). Пусть U_Λ – некоторая замкнутая окрестность многообразия Λ . Обозначим через $\varphi(x)$ решение по мод 2π следующей системы уравнений в окрестности U_Λ :

$$\langle x - X(\varphi), X_{\varphi_j}(\varphi) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $\delta > 0$ – некоторое малое число, не зависящее от ε в случае 1), и $\delta = \delta_\Gamma$ в случае 2); T – некоторое фиксированное число, не зависящее от ε , $T > \delta$. Введем при $\delta < t < T$ гладкую функцию

$$u_\Lambda = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n} \frac{1}{\sqrt{\det G(t, \varphi - \omega t)}} \times \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \langle {}^t X_\varphi \hat{J}(x - X(\varphi)), G^{-1}(\varphi - \omega t, t) {}^t X_\varphi \hat{J}(x - X(\varphi)) \rangle\right) \Big|_{\varphi=\varphi(x)} \quad (6)$$

при $x \in U_\Lambda$, $u_\Lambda = 0$ вне некоторой окрестности большей чем U_Λ .

Рассмотрим далее в $4n$ -мерном (евклидовом) фазовом пространстве $\mathbb{R}_{x,\xi}^{4n}$ с координатами (x, ξ) множество, задаваемое уравнениями

$$\tilde{\Lambda}t = ((x, \xi) \in \mathbb{R}_{x,\xi}^{4n} : x = X(\varphi + \omega t), \xi = \hat{J}X_\varphi(\varphi + \omega t)\alpha, \varphi \in [0, 2\pi]^n, \alpha \in \mathbb{R}^n).$$

ЛЕММА 3. При каждом $t \in \mathbb{R}$ множество $\tilde{\Lambda}_t$ есть $2n$ -мерное (гладкое) лагранжево многообразие, инвариантное вместе с мерой $d\tilde{\mu} = d\varphi d\varphi$ относительно фазового потока, задаваемого функцией Гамильтона $\langle \hat{J}H_x, \xi \rangle$; для всех t $\tilde{\Lambda}_t \equiv \tilde{\Lambda}_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Задание многообразия $\tilde{\Lambda}$ эквивалентно заданию конормального расслоения, ассоциированного с Λ (см. [3]).

Рассмотрим теперь на многообразии $\tilde{\Lambda}_t$ $2n$ -мерные вектор-функции $w(\varphi, \alpha, t) = 0$,

$$z(\varphi, \alpha, t) = i \left(\int_0^t ({}^tX_\varphi \hat{J} \sigma X_\varphi)(\varphi + \omega \tau) d\tau \right) \alpha$$

и функцию $D = \langle \hat{J}X_\varphi \alpha, \sigma \hat{J}X_\varphi \alpha \rangle$.

ЛЕММА 4. Совокупность Λ_t и $r_t^{2n} = (w, z)$ есть лагранжево многообразие с комплексным ростком (Λ, r^{2n}) (см. [2, гл. 4, 5], [11], а также [3, гл. 10, 11]). Функция D есть диссипация на $(\tilde{\Lambda}_t, r_t^{2n})$.

Построим теперь по формулам [2, гл. 4, 5] канонический оператор Маслова $K_{(\tilde{\Lambda}_t, r_t^{2n}, d\tilde{\mu})}^\varepsilon$ на комплексном ростке $(\tilde{\Lambda}_t, r_t^{2n})$.

ТЕОРЕМА. Обобщенная функция $\tilde{u} = K_{(\tilde{\Lambda}_t, r_t^{2n}, d\tilde{\mu})}^\varepsilon \cdot 1$ есть главный член асимптотического решения задачи (5), (3) в следующем смысле: для любой гладкой функции $\psi(x)$ $(u - \tilde{u}, \psi) = O(\varepsilon^{1/2})$ и $\tilde{u}|_{t=0} = \delta_{(\Lambda, d\mu)}$.

С точностью до слагаемого $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ в норме $C(\mathbb{R}_x^{2n})$ функция $\tilde{u}$ совпадает с функцией u_Λ из (6) при $t > \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое не зависящее от ε число в случае 1) и $\delta = \delta_\Gamma$ в случае 2). В случае 2) предполагается выполненным условие (п).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть вектор частот $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ удовлетворяет условию линейной независимости над кольцом целых чисел (условию несоизмеримости частот, см. [1]). Тогда существует среднее

$$\overline{G} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(\varphi + \omega \xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} G d\varphi$$

и при $t \gg 1$ $G = t(\overline{G} + o(1))$, $\det G = t^n(\det \overline{G} + o(1))$. Это означает, что при малых ε и больших t частицы в окрестности тора Λ распределяются по нормальному закону с не зависящей от точек на торе матрицей дисперсии.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Доказательство получается в результате применения к задаче (5), (3) теории комплексного ростка [2], а также результатов [11]–[15] и состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Сначала задача (5), (3) представляется в стандартном с точки зрения [2] виде

$$-i\varepsilon u_t + \mathcal{H} \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0, \quad u|_{t=0} = K_{(\tilde{\Lambda}_0, d\tilde{\mu})}^\varepsilon \cdot 1. \quad (7)$$

Здесь $\mathcal{H}(\xi, x) = \langle \hat{J} \nabla H(x), \xi \rangle - \frac{i}{2} \langle \xi, \sigma \xi \rangle$ и $K_{(\tilde{\Lambda}_0, d\tilde{\mu})}^\varepsilon$ – вещественный канонический оператор Маслова на вещественном лагранжевом многообразии $\tilde{\Lambda}_0$ с мерой $d\tilde{\mu}$.

Шаг 2. Так как символ $\mathcal{H}(x, \xi)$ оператора $\mathcal{H}(x, -ih \cdot \partial/\partial x)$ является комплекснозначной функцией, решение задачи (7) дается с помощью (комплексного) канонического оператора Маслова на лагранжевом многообразии с комплексным ростком $(\tilde{\Lambda}_t, \tilde{r}_t^{2n})$, полученным из $(\tilde{\Lambda}_0, r_0^{2n})$, $r_0^{2n} = (w_0 \equiv 0, z_0 \equiv 0)$, каноническим преобразованием, заданным функцией $\mathcal{H}$. Рассуждения, аналогичные [14], [15], показывают, что комплексный росток $\tilde{r}_t^{2n}$ задается вектор-функциями $w = 0$ и $z(\varphi, \alpha, t)$, где z определяется как решение неоднородного уравнения в вариациях

$$\dot{z} = \hat{J}H_{xx}(X(\varphi + \omega t))z + i\sigma \hat{J}X_\varphi(\varphi + \omega t)\alpha, \quad z|_{t=0} = 0.$$

Построение решения z опирается на следующий факт, который следует из известных свойств линейных гамильтоновых систем и лагранжевых многообразий.

ЛЕММА 5. Фундаментальная матрица Φ системы $\dot{\Phi} = \hat{J}H_{xx}(X(\varphi + \omega t))\Phi$ может быть представлена в виде

$$\Phi = (X_\varphi(\varphi'), \hat{J}X_\varphi(\varphi')) \begin{pmatrix} E_n & N(\varphi', t) \\ 0 & ({}^tX_\varphi(\varphi')X_\varphi(\varphi'))^{-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\varphi' = \varphi + \omega t$ и N — гладкая симметричная $(n \times n)$ -матричнозначная функция (интеграл от некоторой комбинации от $H_{xx}(X)$ и X_φ на $[0, 2\pi]^n \times \mathbb{R}^n$, $N(\varphi', 0) = O_n$ и Φ симплектична, т.е. ${}^t\Phi\hat{J}\Phi = \hat{J}$.

Используя лемму 5, легко выразить $z(\varphi, \alpha, t)$ через матрицы $X_\varphi(\varphi')$ и $N(\varphi', t)$. Затем подбирая $(n \times n)$ -матричнозначную функцию $R(\varphi', t)$ и производя замену $\tilde{\varphi} = \varphi' + R(\varphi', t)\alpha$, $\tilde{\alpha} = \alpha$ на $(\tilde{\Lambda}, \tilde{r}^{2n})$, удастся показать, что $(\tilde{\Lambda}, \tilde{r}^{2n})$ эквивалентно (см. [11]) лагранжеву многообразию с комплексным ростком $(\tilde{\Lambda}_t, r_t^{2n})$, приведенным в теореме; при этом мера $d\tilde{\varphi} d\tilde{\alpha} = d\varphi d\alpha$. Эти рассуждения позволяют получить при $t \in [0, T]$ формулу для главного члена решения $\tilde{y}$ задачи (7), выразив его через $Q(\varphi)$ и $Q_\varphi(\varphi + \omega t)$ (и исключив из ответа матрицу N).

Шаг 3. Если выполнены условия второй части теоремы, то лагранжево многообразие с комплексным ростком $(\tilde{\Lambda}_t, r_t^{2n})$ покрывается только неособыми картами. В этом случае реализация канонического оператора с учетом симплектичности матрицы $(X_\varphi, \hat{J}X_\varphi({}^tX_\varphi X_\varphi)^{-1})$ приводит к формуле (6).

Шаг 4. Доказательство теоремы завершается выводом оценок для разности между точным и асимптотическим решением. Этот вывод опирается на результаты [12], [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
2. Maslov V. P. Operational Methods. Moscow: Mir Publ., 1976.
3. Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 2. М.: Мир, 1982.
4. Lasutkin V. F. KAM-Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions. Berlin: Springer, 1993.
5. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции. Т. 1, 3. М.: Физматлит, 1958.
6. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
7. Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random Perturbations of Hamiltonian Systems. Mem. Amer. Math. Soc. № 523. V. 109. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1994.
8. Albeverio S., Hilbert A., Kolokoltsov V. N. Sur le comportement asymptotique du noyan associé à une diffusion dégénérée. Preprint № 320. Bochum: Inst. Math. Ruhr Universitat Bochum, 1996.
9. Kolokoltsov V. N. Semiclassical Asymptotics for Diffusion. I. Research Report № 1/97. Nottingham: Nottingham Trent University, 1997.
10. Доброхотов С. Ю., Колокольцов В. Н., Оливе В. М. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 301–306.
11. Данилов В. Г., Маслов В. П. Квазиобратимость функций от упорядоченных операторов в теории псевдодифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1976. С. 5–132.
12. Маслов В. П., Шишмарев И. А. О T -произведении гипоеллиптических операторов // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1979. С. 7–20.
13. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки и техн. Матем. анализ 1969. М.: ВИНТИ, 1971. С. 7–20.
14. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
15. Доброхотов С. Ю., Оливе В. М. // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 4. С. 45–68.