Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбачевич, Количественный аспект теоремы о стабилизации, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 788–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:14:49

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АСПЕКТ ТЕОРЕМЫ О СТАБИЛИЗАЦИИ

В. В. Горбачевич

Статья посвящена явному вычислению значений констант, входящих в теорему о стабилизации, доказанную автором в [1] (см. также [2]). Теорема о стабилизации сводит изучение вырождений конечномерных алгебр Ли (рассматриваемых с точностью до стабильного изоморфизма) к рассмотрению сжатий алгебр Ли некоторой, вообще говоря, большей размерности. Вкратце опишем используемые здесь понятия, отсылая за более подробным их изложением к работам [1], [2]. При этом мы будем рассматривать не только алгебры Ли, но и произвольные антикоммутативные конечномерные алгебры (как это было в [2]).

Пусть A – конечномерная алгебра на поле K , которое мы будем предполагать алгебраически замкнутым и имеющем характеристику 0 (обычно $K = \mathbb{C}$). Если в алгебре A выбрать некоторый базис, то эта алгебра определяется своим структурным тензором a_{ij}^k , где $a_{ij}^k \in K$ – структурные константы. Через $\text{Alg}_n(K)$ обозначим пространство всех структурных тензоров n -мерных алгебр над K . Через $\text{Skew}_n(K)$ и $\text{Lien}(K)$ обозначим подпространства в $\text{Alg}_n(K)$, состоящие из антикоммутативных алгебр и алгебр Ли соответственно. На каждом из этих трех пространств естественным образом действует группа $\text{GL}_n(K)$, орбиты которой состоят из всех изоморфных между собой алгебр (точнее, их структурных тензоров). Пространство $\text{Alg}_n(K)$ и оба указанных его подпространства можно рассматривать как алгебраические подмножества в K^N , где $N = n^3$, поэтому на них естественным образом вводится топология Зариского. Далее, пространства $\text{Alg}_n(K)$ при всевозможных $n \in \mathbb{N}$ образуют индуктивную систему (относительно естественных вложений $\text{Alg}_n(K) \hookrightarrow \text{Alg}_{n+1}(K)$, соответствующих переходу от алгебры A к $A \oplus K$). Прямой предел этой системы обозначим через $\text{Alg}_\infty(K)$. Аналогично вводятся пространства $\text{Skew}_n(K)$ и $\text{Lien}(K)$. На каждом из полученных трех пространств вводится топология, являющаяся прямым пределом топологий Зариского на пространствах из исходных систем. Две алгебры $A \in \text{Alg}_n(K)$ и $B \in \text{Alg}_m(K)$ называются *стабильно изоморфными*, если они становятся изоморфными при прибавлении к ним некоторых конечномерных прямых слагаемых, имеющих тривиальное умножение (и потому изоморфных алгебрам вида $K \oplus K \oplus \dots \oplus K$, где K рассматривается не как поле, а как абелева алгебра Ли, т.е. алгебра с тривиальным умножением). Ясно, что пространство $\text{Alg}_n(K)$ состоит из всех конечномерных алгебр над K , рассматриваемых с точностью до стабильного изоморфизма; так же можно описать и два других введенных выше предельных пространства. На этих пространствах имеется естественное действие группы $\text{GL}_\infty(K)$ – прямого предела групп $\text{GL}_n(K)$ (образующих индуктивную систему относительно очевидным образом определенных вложений), причем если на этой группе ввести топологию прямого предела топологий Зариского, то указанное действие будет непрерывно. Для алгебры $A \in \text{Alg}_n(K)$ мы через $O_n(A)$ обозначим ее орбиту относительно действия группы $\text{GL}_n(K)$. Орбита любой алгебры с нетривиальным умножением не будет замкнутой; любую алгебру, лежащую в замыкании этой орбиты, называют *сжатием* исходной алгебры. Алгебру A можно рассматривать и как лежащую в $\text{Alg}_\infty(K)$; через $O_\infty(A)$ обозначим ее орбиту относительно действия группы $\text{GL}_\infty(K)$. Алгебры, лежащие в замыкании этой орбиты, называются *вырождениями* исходной алгебры A . Ясно, что любое сжатие алгебры A можно рассматривать и как ее вырождение, обратное же, вообще говоря, неверно. Например, для двумерной неабелевой разрешимой алгебры Ли R_2 (такая алгебра над данным полем K единственна с точностью до изоморфизма) имеет вырождение в трехмерную нильпотентную неабелеву алгебру Ли N_3 (см., например, [1]), это вырождение соответствует сжатию алгебры Ли $R_2 \oplus K$ в N_3 , а сжатия любой алгебры в алгебру большей размерности невозможны просто по определению. Можно было бы предполагать, что, прибавляя к исходной алгебре A прямые слагаемые с тривиальным умножением все большей размерности (что не меняет эту алгебру как элемент пространства $\text{Alg}_\infty(K)$), мы будем получать все более и более сложные замыкания орбит и тем самым все новые и новые вы-

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант RO 4300, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-101263.

рождения этой алгебры A . Однако, как было доказано в [1], начиная с некоторого момента в этом процессе наступает стабилизация. A именно, имеет место следующая теорема о стабилизации.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть $A \in \text{Alg}_\infty(K)$ некоторая n -мерная алгебра. Тогда если имеет-ся ее вырождение в некоторую алгебру $B \in \text{Alg}_\infty(K)$, то существует сжатие алгеб-ры $A \oplus K^n$ в некоторую алгебру B' , стабильно изоморфную A .

Другими словами, для n -мерной алгебры A любое сжатие алгебры вида $A \oplus K^m$ при $m \geq n$ “пропускается” через некоторое сжатие алгебры $A \oplus K^n$ в алгебру B' , стабильно изоморфную алгебре B . Эта теорема дает возможность описывать замыкания орбит в $\text{Alg}_\infty(K)$. Для этого в [1], [2] было введено и изучено понятие уровня алгебр (который характеризует сложность опера-ции умножения в алгебре) и классифицированы антикоммутативные алгебры первых трех уровней. Данная заметка посвящена количественному уточнению формулировки теоремы о стабилизации, что позволит применить ее более эффективно.

Обозначим через p_n наименьшее из таких натуральных чисел p , что для любой алгебры A раз-мерности $\leq n$ любое сжатие алгебры $A \oplus K^m$ при произвольном $m \in \mathbb{N}$ пропускается через не-которое сжатие алгебры $A \oplus K^p$ (рассматриваемое с точностью до стабильного изоморфизма). В силу теоремы 1 имеем $p_n \leq n$. Следующее утверждение дает точное выражение p_n через n в слу-чае, если рассматриваются только алгебры Ли. Соответствующее число p_n мы обозначим p_n^{Lie} . Из теоремы 1 следует, что $p_n^{\text{Lie}} \leq n$.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы соотношения*

$$p_n^{\text{Lie}} = \begin{cases} n-1 & \text{при } n = 1, 2, 4, \\ n & \text{при } n = 0, 3 \text{ и } n \geq 5. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – некоторая n -мерная алгебра Ли над полем K . Если $n \leq 1$, то A – нулевая алгебра Ли $\{0\}$ или одномерная (которая изоморфна K). Очевидно, что тут $p_n = 0$. Если $n = 2$, то A изоморфна K^2 или алгебре Ли R_2 , описанной выше. В [2] доказано, что алгебра Ли $R_2 \oplus K^m$ может быть сжата только в алгебры Ли вида $A' \oplus K^{m'}$, где алгебра Ли A' изоморфна $\{0\}$, R_2 или N_3 , а $m' = m + 2 - \dim A'$. Отсюда видно, что любое сжатие алгебры Ли $R_2 \oplus K^m$ пропускается через сжатие алгебры Ли $R_2 \oplus K$, а потому $p_2^{\text{Lie}} \leq 1$. Так как имеется сжатие алгебры Ли $R_2 \oplus K$ в N_3 , получаем, что $p_1^{\text{Lie}} = 1$.

Пусть теперь $n \geq 3$. Предположим, что алгебра Ли A такова, что $[A, A] = A$. В [2] для произ-вольной антикоммутативной конечномерной алгебры Ли A построена такая 2-нильпотентная (т.е. класс nilпотентности которой равен двум) алгебра Ли $m(A)$, в которую может быть сжата алгебра Ли $A \oplus K^n$. Из условия $[A, A] = A$ следует, что эта алгебра Ли $m(A)$ будет несократима, т.е. она не изоморфна никакой алгебре Ли вида $B \oplus K^l$ при $l > 0$. Из этого следует, что $p_n^{\text{Lie}} \geq n$. В силу теоремы 1 имеем $p_n^{\text{Lie}} \leq n$, поэтому $p_n^{\text{Lie}} = n$. Но это равенство мы получили только для тех значений n , для которых существует n -мерная алгебра Ли с условием $[A, A] = A$. Нетрудно пока-зать, что это имеет место только при $n = 3$ и $n \geq 5$. А именно, положим $A_n = \text{sl}_2(K) + \varphi K^{n-3}$, где $\varphi = \varphi_{n-3}: \text{sl}_2(K) \rightarrow \text{gl}_{n-3}(K)$ – неприводимое представление трехмерной простой алгебры Ли $\text{sl}_2(K)$. Легко проверить, что при $n \neq 4$ имеем $[A_n, A_n] = A_n$. Поэтому при $n = 3$ и $n \geq 5$ приходим к равенству $p_n^{\text{Lie}} = n$. Остается рассмотреть случай $n = 4$. Имеем $p_4 \leq 4$. Покажем вначале, что $p_4 \geq 3$. Для этого рассмотрим алгебру Ли вида $A = K + \varphi K^3$, где φ – линейное ото-бражение такое, что $\varphi(1) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и числа $\lambda_i \in K$ попарно различны. Из результатов работы [2] следует, что существует сжатие алгебры Ли $A \oplus K^3$ в алгебру Ли вида $B = K + \psi K^6$, где $\psi(1)$ – nilпотентная матрица шестого порядка, равная прямой сумме трех жордановых кле-ток $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что эта алгебра Ли B несократима, а потому должно быть $p_4^{\text{Lie}} \geq 3$. Докажем теперь, что $p_4^{\text{Lie}} \leq 3$. Для этого заметим, что четырехмерная алгебра Ли A над алгебраически зам-кнутым полем характеристики 0 или разрешима, или изоморфна алгебре Ли вида $\text{sl}_2(K) \oplus K$. Как в том, так и в другом случае $\dim[A, A] \leq 3$. Если при этом еще справедливо неравенство $\dim[A, A] \geq \dim Z(A)$, где $Z(A)$ обозначает центр алгебры Ли A , то из теоремы 3 (см. далее) сле-дует, что для таких алгебр Ли $p_4 \leq 3$. Если же алгебра Ли A такова, что $\dim[A, A] < \dim Z(A)$,

то обязательно $\dim Z(A) \leq 2$. Если $\dim[A, A] = 0$ или 1, то A будет изоморфна K^4 или $R_2 \oplus K^2$, а для этих алгебр, очевидно, можно взять $p = 0$. Если же $\dim[A, A] = 2$, то $\dim Z(A) \geq 3$, откуда сразу следует, что A должна быть абелевой (что невозможно в данном случае). Из сказанного следует, что при $n = 4$ во всех возможных случаях можно брать $p = 3$. Но тогда в сочетании с $p_4 \leq 4$ это приводит к равенству $p_4^{\text{Lie}} = 3$.

Отметим, что кроме чисел p_n^{Lie} можно рассматривать аналогичные числа применительно к пространству $\text{Alg}_\infty(K)$ всех конечномерных алгебр и к пространству $\text{Skew}_\infty(K)$ всех конечномерных антикоммутативных алгебр над K . При этом если $n = 3$ или $n \geq 5$, то $p_n = n$ и для этих двух пространств, ибо это максимально возможные (в силу теоремы 1) значения для p_n , а они достигаются уже для алгебр из пространства $\text{Lie}_\infty(K)$, содержащегося в каждом из двух других пространств. Что касается значений p_n при $n = 1, 2, 4$, то для $\text{Alg}_\infty(K)$ они равны 1, 2, 4 соответственно (и потому $p_n = n$ при всех значениях n), а для $\text{Skew}_\infty(K)$ эти значения равны 0, 1, 4 соответственно. Покажем это. Рассмотрим вначале пространство $\text{Alg}_\infty(K)$. Через A_1 обозначим такую одномерную алгебру, которая для некоторого своего образующего элемента e_1 удовлетворяет соотношению $e_1^2 = e_1$. Положим $A_n = A_1 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_1$ (всего n слагаемых). Ясно, что $A_n^2 = A_n$, поэтому из рассуждения, приведенного при доказательстве теоремы 2, следует, что при любом значении числа $n \geq 1$ (ибо указанные выше алгебры имеются при любом таком n) выполнено равенство $p_n = n$. Что касается пространства $\text{Skew}_\infty(K)$, то равенство $p_1 = 0$ для него следует из того, что одномерная антикоммутативная алгебра обязательно абелева (в частности, она будет ливевой). Далее, легко проверить, что и любая двумерная антикоммутативная алгебра является ливевой. Поэтому значения p_n при $n = 1, 2$ для пространств $\text{Skew}_\infty(K)$ и $\text{Lie}_\infty(K)$ будут одинаковы. Что же касается размерности 4, тут рассмотрим такую четырехмерную антикоммутативную алгебру C_4 , которая в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4 задается соотношениями $e_i e_j = e_{i+j}$ при $i > j$ (остальные соотношения либо следуют из антикоммутативности или же являются нулевыми), причем сумма $i + j$ берется по модулю 4. Ясно, что для так построенной алгебры имеем $C_4^2 = C_4$, а потому снова из рассуждения, приведенного при доказательстве теоремы 2, получаем, что $p_4 = 4$ для пространства $\text{Skew}_\infty(K)$. Тем самым, значения p_n вычислены для всех трех пространств, хотя наиболее интересным для нас является случай пространства конечномерных алгебр Ли.

Значения p_n , рассмотренные выше, относились ко всем конечномерным алгебрам рассматриваемого класса. Теперь мы введем более индивидуализированные величины. А именно, для произвольной конечномерной алгебры A над полем K рассмотрим число $p(A)$, равное наименьшему из таких чисел $p \in \mathbb{N}$, для которых произвольное сжатие алгебры вида $A \oplus K^m$ при любом m может быть пропущено через сжатие алгебры $A \oplus K^p$. Из теоремы 1 следует, что всегда $p(A) \leq n$. Далее, в [1, теорема 3] было фактически доказано (хотя там рассмотрены только антикоммутативные алгебры и не используется введенное в данной статье обозначение $p(A)$), что если алгебра A такова, что $A^2 = Z(A)$, то $p(A) = 0$ (здесь $Z(A) = \{X \in A \mid XY = YX = 0 \text{ для всех } Y \in A\}$ – центр алгебры A). Из этого утверждения в [1] было выведено, что если A – произвольная несократимая 2-нильпотентная алгебра Ли, то для нее тоже $p(A) = 0$. Эти результаты позволяют доказать следующее общее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – произвольная антикоммутативная конечномерная алгебра над полем K . Тогда если $\dim A^2 \geq \dim Z(A)$ (это условие эквивалентно несократимости алгебры A), то $p(A) = \dim A^2 - \dim Z(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $l = \dim A^2 - \dim Z(A)$ и рассмотрим алгебру $A_1 = A \oplus K^l$. Для полученной алгебры A_1 имеем, очевидно, равенство $\dim A_1^2 = \dim Z(A_1)$. Отсюда в силу сформулированного результата из [1] имеем $p(A_1) = 0$. Но это равенство означает, что $p(A) \leq \dim A^2 - \dim Z(A)$. Для доказательства обратного неравенства рассмотрим 2-нильпотентную алгебру $m(A)$, построенную в [2], и ее редукцию, т.е. разложение в прямую сумму вида $m(A) = B \oplus K^t$, где алгебра B несократима. Из [2, предложение 1] следует, что $t = \dim A/A^2 + \dim Z(A)$. Но тогда ясно, что $p(A) \geq \dim A - t = \dim A^2 - \dim Z(A)$. В сочетании с неравенством, доказанным выше, это приводит к равенству $p(A) = \dim A^2 - \dim Z(A)$.

Если A – несократимая 2-нильпотентная алгебра Ли, то для нее $\dim[A, A] = \dim Z(A)$; поэтому в силу теоремы 3 имеем $p(A) = 0$, т.е. приходим к указанному выше результату из [1]. В дополнение

к теореме 3 укажем, что для произвольной антикоммутативной алгебры A всегда имеет место неравенство $p(A) \geq \dim A^2 - \dim Z(A)$. Дело в том, что при $\dim A^2 < \dim Z(A)$ оно тривиальным образом выполнено, а при $\dim A^2 \geq \dim Z(A)$ вытекает из утверждения теоремы 3.

Пусть A – некоторая конечномерная антикоммутативная алгебра над K . Вообще говоря, алгебра A сократима. В силу ее конечномерности существует такое разложение в прямую сумму $A = A_1 \oplus K^m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, что алгебра F_1 уже будет несократимой. Алгебра A_1 называется *редукцией* алгебры A , она определяется алгеброй A однозначно с точностью до изоморфизма (см. [2]). Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – некоторая конечномерная антикоммутативная алгебра, а A_1 – ее редукция. Тогда $p(A) = \dim(A_1)^2 - \dim Z(A_1)$.

Алгебру A будем называть *монолитной*, если $A^2 = A$ и $Z(A) = \{0\}$. Например, монолитной будет любая полупростая алгебра Ли. Для алгебр Ли вместо A^2 обычно пишется $[A, A]$. Разрешимая алгебра Ли не может быть монолитной, а если монолитна некоторая неразрешимая алгебра Ли, то ее радикал должен быть нильпотентным. Монолитность алгебры Ли означает, что попытки построить для нее ряд коммутантов или центральный ряд (верхний или нижний) приведут к тривиальному результату.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A – монолитная конечномерная алгебра. Тогда $p(A) = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев В. В. // Изв. вузов. Матем. 1992. № 2. С. 24–32.
2. Горбачев В. В. // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 3. С. 100–118.