Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Коммутативная теория вероятностей, отвечающая парастатистикам, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 791–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:42:53

КОММУТАТИВНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ОТВЕЧАЮЩАЯ ПАРАСТАТИСТИКАМ

В. П. Маслов

Прежде всего дадим интерпретацию классической вероятностной меры. Пусть $P(\omega_1, \dots, \omega_n)$ – симметрическая вероятностная плотность в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Среднее значение $f(\omega) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ равно

$$\langle f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} P(\omega) f(\omega) d\omega.$$

Пусть $\hat{f}$ – ограниченный оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$ умножения на $f(\omega)$ и $\hat{P}_\varepsilon$ – интегральный оператор

$$(\hat{P}_\varepsilon \Psi)(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} d\omega' P(\omega') f(\omega') \frac{e^{-(\omega - \omega')^2 / (2\varepsilon)}}{(2\pi\varepsilon)^{n/2}}.$$

Тогда очевидно, что

$$\langle f \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (2\pi\varepsilon)^{n/2} \text{Tr}(\hat{P}_\varepsilon \hat{f}) = \text{reg Tr}(\hat{P} \hat{f})$$

является регуляризованным следом (Tr) произведения операторов $\hat{P}$ и $\hat{f}$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01544.

Отметим, что ответ не зависит от способа регуляризации следа. Так, в работе [1] проводилась регуляризация с помощью решетчатой аппроксимации операторов умножения на функцию P и f .

Рассмотрим ограничения этих операторов на подпространстве Гильберта $L_2^{\text{para}}(\mathbb{R}^n)$ функций, инвариантных относительно действия некоторой подгруппы симметрической группы и отвечающей заданной парастатистике, например, для “фермионов” – антисимметрических функций, а для “бозонов” – симметрических.

В силу того, что $P(\omega)$ – симметрическая функция, умножение на $P(\omega)$ оставляет инвариантным $L_2^{\text{para}}(\mathbb{R}^n)$. Ограничение $\hat{P}_\epsilon$ и $\hat{f}$ определяет след и среднее значение как регуляризованный след в $L_2^{\text{para}}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle f \rangle_{\text{para}} = \text{reg Tr}_{\text{para}}(\hat{P}\hat{f}),$$

поскольку $\hat{P}$ и $\hat{f}$ инвариантны в $L_2^{\text{para}}(\mathbb{R}^n)$.

Эта процедура была применена в работе [1] для вероятностной плотности

$$P(p_1 q_1, \dots, p_n q_n) = C \exp \left(- \sum_k \frac{H(p_k, q_k)}{\Theta} \right),$$

где $\omega_k = \{p_k, q_k\}$ и $f(p, q) = \sum_k f_0(p_k, q_k)$, $\omega \in \mathbb{R}^{2m}$.

Геометрическое осреднение с параметром μ (имеющим смысл химического потенциала) приводит к известным формулам температурного распределения по парастатистике, где вместо $p^2/2m$ надо поставить гамильтониан $H(p, q)$, подобно тому, как в [1] это же привело к распределению Ферми–Дирака для антисимметрических функций.

Суммирование следа по всем парастатистикам приведет к классическому распределению Гиббса–Больцмана.

Эта концепция позволяет перенести понятия классической теории вероятностей на коммутативную теорию вероятностей, отвечающую данной парастатистике.

Оказывается, что квантовые частицы, отвечающие данной парастатистике, переходят при $\hbar \rightarrow 0$ ($\hbar$ – постоянная Планка) в приведенную теорию паравероятностей.

Эта концепция позволяет решать по-новому и классические задачи. Например, задача о числе разбиений N одинаковых шаров по G ящикам, приведенная в [2, с. 184] в качестве иллюстрации Бозы-статистики, никакого отношения не имеет к квантовой статистике. Это пример классической статистики, отвечающий приведенной классической коммутативной, но не стандартной теории вероятностей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maslov V. P. // Russian J. Math. Phys.. V. 5. № 4. P. 529–534.
2. Ландау Л. Л., Лифшиц Е. Статистическая физика. Т. 5. М.: Наука, 1964.