Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Описание члена E_2 спектральной последовательности нестабильных гомотопических групп топологических пространств, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 792–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1457>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:17:23

ОПИСАНИЕ ЧЛЕНА E_2 СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕСТАБИЛЬНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В. А. Смирнов

В работе [1] нами был предложен метод для описания члена E_2 спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп топологических пространств. Было показано, что на E_2 имеется A_∞ -структура; найдены образующие и соотношения. Здесь мы рассмотрим вопрос об описании члена E_2 спектральной последовательности Масси–Петерсона неустойчивых гомотопических групп топологических пространств [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант MNJ 300.

© В. А. Смирнов 1998

Пусть K обозначает коалгебру Милнора (двойственную к алгебре Стивенса), являющуюся алгеброй многочленов от образующих ξ_i размерности $2^i - 1$. Коумножение $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$ на этих образующих задается формулой

$$\nabla(\xi_i) = \sum_{k=0}^i \xi_{i-k}^{2^k} \otimes \xi_k.$$

На произведениях элементов из K коумножение ∇ определяется из условия, что K является алгеброй Хопфа. Для элементов x коалгебры Милнора определено понятие *избыточности* $e(x)$. Избыточность элементов ξ_i считается равной единице. Избыточность произведения считается равной сумме избыточностей сомножителей [3].

Для градуированного модуля L обозначим через $K \times L$ подмодуль тензорного произведения $K \otimes L$, порожденный элементами $x \otimes y$, для которых избыточность x меньше или равна размерности y , т.е. $e(x) \leq \dim(y)$. Аналогично, через $K \times K \times L$ будем обозначать подмодуль тензорного произведения $K \otimes K \otimes L$, порожденный элементами $x_1 \otimes x_2 \otimes y$, для которых $e(x_2) \leq \dim(y)$, $e(x_1) \leq \dim(x_2) + \dim(y)$, и т.д. Градуированный модуль L называется *нестабильным комодулем над коалгеброй K* , или просто *K -комодулем*, если задано отображение $\tau: L \rightarrow K \times L$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\tau} & K \times L \\ \tau \downarrow & & \downarrow \nabla \times 1 \\ K \times L & \xrightarrow{1 \times \tau} & K \times K \times L \end{array}.$$

Для неустойчивого K -комодуля L рассмотрим ко- B -конструкцию

$$F(K, L): L \rightarrow K \times L \rightarrow K \times K \times L \rightarrow \cdots \rightarrow K^{\times n} \times L \rightarrow \cdots.$$

Элементы этой ко- B -конструкции, как обычно, будем обозначать через $[x_1, \dots, x_n]x$, где $x_i \in K$, $x \in L$. Дифференциал на этих элементах определен формулой

$$d([x_1, \dots, x_n]x) = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, x'_i, x''_i, \dots, x_n]x + [x_1, \dots, x_n, x']x'',$$

где $\nabla(x_i) = \sum x'_i \times x''_i$, $\tau(x) = \sum x' \times x''$.

В случае, когда X – тривиальный K -комодуль, соответствующую ко- B -конструкцию будем обозначать через $F(K)(X)$.

Если X – топологическое пространство, то его гомологии $X_* = H_*(X)$ (с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$) являются неустойчивым K -комодулем, и если X – хорошее в смысле Масси–Петерсона топологическое пространство, то гомологии ко- B -конструкции $F(K, X_*)$ изоморфны члену E_2 спектральной последовательности Масси–Петерсона неустойчивых гомотопических групп пространства X . В частности, если X является n -мерной сферой S^n , то гомологии $F(K)(S^n)$ дают член E_2 спектральной последовательности неустойчивых гомотопических групп n -мерной сферы.

Для гомологий ко- B -конструкции $H_*F(K, S^n)$ имеет место композиционное умножение

$$\gamma: H_k F(K, S^m) \otimes H_m F(K, S^n) \rightarrow H_k F(K, S^n)$$

и композиционное действие

$$\mu: H_k F(K, S^m) \otimes H_m F(K, L) \rightarrow H_k F(K, L).$$

Кроме этого, как и в стабильном случае, имеются высшие композиционные умножения, определяющие на $H_*F(K, S^*)$ структуру A_∞ -алгебры и на $H_*F(K, L)$ структуру A_∞ -модуля над A_∞ -алгеброй $H_*F(K, S^*)$ (см. [4]). Однако, в неустойчивом случае этих операций уже не хватает для описания гомологий ко- B -конструкции $F(K, L)$ и, следовательно, члена E_2 спектральной последовательности неустойчивых гомотопических групп топологических пространств. Например, элемент в гомологиях ко- B -конструкции $F(K, S^7)$, определяемый циклом $[\xi_1^8, \xi_1]u_7$, где u_7 – образующая в S^7 , оказывается неразложимым.

Наша задача состоит в нахождении такой A_∞ -структуры, которой было бы достаточно для описания гомологий ко- B -конструкции $F(K, L)$, и, следовательно, для описания члена E_2 спектральной последовательности нестабильных гомотопических групп топологических пространств.

Для этого заметим, что соответствие $X \mapsto F(K)(X)$ определяет функтор $F(K)$ из категории градуированных модулей в категорию дифференциальных модулей. Однако, область его определения не удастся распространить на категорию дифференциальных модулей прежде всего потому, что для дифференциальных модулей X не удастся естественным образом определить произведение $K \times X$. Для того чтобы обойти эту трудность, мы рассмотрим биградуированные дифференциальные модули. А именно, *биградуированным дифференциальным модулем* будем называть биградуированный модуль $X = \{X_{n,m}\}$, дифференциал в котором понижает первую градуировку на единицу и сохраняет вторую градуировку, т.е. $d_{n,m}: X_{n,m} \rightarrow X_{n-1,m}$. Для биградуированных дифференциальных модулей естественным образом определяются понятия тензорного произведения

$$(X \otimes Y)_{n,m} = \sum_{\substack{i+j=n \\ p+q=m}} X_{i,p} \otimes Y_{j,q},$$

надстройки $(SX)_{n,m} = X_{n-1,m}$, денадстройки $(S^{-1}X)_{n,m} = X_{n+1,m}$, цепного отображения, цепной гомотопии, цепной эквивалентности, гомологий и т.д.

Будем считать коалгебру Милнора K биградуированным дифференциальным модулем с нулевым дифференциалом, первая градуировка в котором равна 0, а вторая совпадает с обычной градуировкой коалгебры Милнора.

Для биградуированного дифференциального модуля X обозначим через $K \times X$ биградуированный дифференциальный модуль, являющийся подмодулем тензорного произведения $K \otimes X$, порожденный такими элементами $x \otimes y_{n,m}$, для которых $e(x) \leq m$. Если L – биградуированный дифференциальный K -комодуль, то ко- B -конструкция $F(K, L)$ как биградуированный модуль совпадает с $\sum_n S^{-n}(K^{\times n} \times L)$, и дифференциал на элементах $[x_1, \dots, x_n]x$ определен формулой

$$\begin{aligned} d([x_1, \dots, x_n]x) &= \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, d(x_i), \dots, x_n]x + [x_1, \dots, x_n]d(x) \\ &+ \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, x'_i, x''_i, \dots, x_n]x + [x_1, \dots, x_n, x']x'', \end{aligned}$$

где $\nabla(x_i) = \sum x'_i \times x''_i$, $\tau(x) = \sum x' \times x''$. Тогда $F(K, L)$ будет также являться биградуированным дифференциальным модулем. В случае, когда X является тривиальным K -комодулем, соответствующую ко- B -конструкцию будем обозначать через $F(K)(X)$. Соответствие $X \mapsto F(K)(X)$ определяет функтор в категории биградуированных дифференциальных модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функтор $F(K)$ является монадой в категории биградуированных дифференциальных модулей. Если L – биградуированный дифференциальный K -комодуль, то $F(K, L)$ является алгеброй над монадой $F(K)$.*

Действительно, легко видеть, что структура монады $\gamma: F(K) \circ F(K) \rightarrow F(K)$ задается формулой

$$\gamma([x_1, \dots, x_n]([x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]x)) = [x_1, \dots, x_{n+m}]x.$$

Аналогичной формулой на $F(K, L)$ задается структура алгебры над монадой $F(K)$,

$$\mu: F(K)(F(K, L)) \rightarrow F(K, L).$$

Заметим, что задание последнего отображения равносильно заданию семейства отображений $F_{p,q}(K, S^m) \otimes F_{n,m}(K, L) \rightarrow F_{n+p,q}(K, L)$, перестановочных с дифференциалом.

Для произвольной монады A в категории биградуированных дифференциальных модулей рассмотрим B -конструкцию $B(A)$. Если X – биградуированный модуль, то $B(A)(X)$ как биградуированный модуль совпадает с модулем $\sum_n S^n(A^{\circ n}(X))$. Если биградуированный модуль M является алгеброй над монадой A , то определена B -конструкция $B(A, M)$, которая как биградуированный модуль совпадает с $\sum_n S^n(A^{\circ n}(M))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для коалгебры Милнора K и нестабильного K -комодуля L имеют место цепные эквивалентности

$$B(F(K)) \simeq K, \quad B(F(K), F(K, L)) \simeq L.$$

Искомая цепная гомотопия индуцируется стандартной цепной гомотопией для обычных ко- B -конструкций.

Таким образом, в категории биградуированных дифференциальных модулей справедливы все предложения, необходимые для применения разработанного ранее аппарата описания A_∞ -алгебр и A_∞ -модулей над A_∞ -алгеброй. А именно, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Гомологии A_* монады $A = F(K)$ являются A_∞ -монадой, а гомологии M_* биградуированного дифференциального модуля $F(K, L)$ являются A_∞ -алгеброй над A_∞ -монадой A_* .

Для определения неразложимых элементов и соотношений между их произведениями в A_* нужно рассмотреть короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{i} BA_* \xrightarrow{p} B^1 A_* = BA_*/A_* \rightarrow 0$$

и длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \xrightarrow{i_*} K \cong H_*(BA_*) \xrightarrow{p_*} H_*(B^1 A_*) \xrightarrow{\mu_*} A_* \xrightarrow{i_*} K \cong H_*(BA_*) \xrightarrow{p_*} \dots$$

Тогда разложимыми элементами в A_* будут элементы из образа гомоморфизма μ_* , а модуль неразложимых элементов JA_* будет изоморфен образу гомоморфизма $i_*: A_* \rightarrow K$.

Легко видеть, что такими образами в K являются элементы вида $\xi_1^{2^i} \in K$. Соответствующие неразложимые элементы обозначаются через h_i . Таким образом, для градуированного модуля X_* неразложимыми элементами в $A_*(X_*)$ являются элементы вида $h_i \otimes x_n$, для которых $2^i \leq n$.

Соотношения определяются ядром гомоморфизма $\mu_*: H_*(B^1 A_*) \rightarrow A_*$ или, что то же самое, образом гомоморфизма $p_*: K \cong H_*(BA_*) \rightarrow H_*(B^1 A_*)$. Для нахождения этого образа рассмотрим проекцию $p: K \rightarrow JA_*$ на неразложимые элементы, полагая $p(\xi_1^{2^i}) = h_i$ и $p(x) = 0$ во всех остальных случаях. Тогда требуемые соотношения в A_* порождаются элементами $x \in K$ и имеют вид

$$\sum_{i \geq 2} \gamma_{i-2}(p(x^i) \otimes \dots \otimes p(x^1)) = 0,$$

где $\nabla(i)(x) = \sum x^i \otimes \dots \otimes x^1$, $\nabla(i)$ – итерация коумножения $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$.

Аналогично, для определения неразложимых элементов для A_∞ -алгебры M_* над A_∞ -монадой A_* нужно рассмотреть короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow M_* \xrightarrow{i_*} B(A_*, M_*) \xrightarrow{p_*} B^1(A_*, M_*) = B(A_*, M_*)/M_* \rightarrow 0$$

и соответствующую длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \xrightarrow{p_*} H_*(B^1(A_*, M_*)) \xrightarrow{\mu_*} M_* \xrightarrow{i_*} L \cong H_*(B(A_*, M_*)) \xrightarrow{p_*} \dots$$

Тогда разложимыми элементами в M_* будут элементы из образа гомоморфизма μ_* , а модуль неразложимых элементов JM_* будет изоморфен образу гомоморфизма i_* .

Соотношения определяются ядром гомоморфизма $\mu_*: H_*(B^1(A_*, M_*)) \rightarrow M_*$ или, что то же самое, образом гомоморфизма

$$p_*: L \cong H_*(B(A_*, M_*)) \rightarrow H_*(B^1(A_*, M_*)).$$

В случае, когда X – топологическое пространство и X_* – его гомологии, биградуированный модуль $M_{n,m}(X_*)$ изоморфен члену $E_2^{n,m}(X)$ спектральной последовательности гомотопических групп пространства X . Структура A_∞ -монады в A_* и структура A_∞ -алгебры над A_∞ -монадой в M_* применительно к члену E_2 дают операции

$$\begin{aligned} \gamma_{i-2}: E_2^{n_i, m_i}(S^{m_{i-1}}) \otimes \dots \otimes E_2^{n_1, m_1}(S^m) &\rightarrow E_2^{n_1 + \dots + n_i, m_i}(S^m), \\ \mu_{i-2}: E_2^{n_i, m_i}(S^{m_{i-1}}) \otimes \dots \otimes E_2^{n_1, m_1}(L) &\rightarrow E_2^{n_1 + \dots + n_i, m_i}(L), \end{aligned} \quad i \geq 2.$$

Из сказанного выше следует

ТЕОРЕМА 1. Член $E_2(S^*)$ спектральной последовательности нестабильных гомотопических групп сфер, рассматриваемый как A_∞ -монада, в качестве неразложимых элементов имеет элементы вида $h_i \otimes u^n$, для которых $2^i \leq n$.

Если в число рассматриваемых операций включить имеющийся для сфер гомоморфизм надстройки, то неразложимыми элементами будут только элементы вида $h_i \otimes u^{2^i}$.

Если же в число рассматриваемых операций дополнительно включить $\cup_1$ -произведение, для которого $h_i \cup_1 h_i = h_{i+1}$, то среди неразложимых элементов члена E_2 останется единственный элемент вида $h_0 \otimes u^1$. Все остальные элементы получаются из него применением $\cup_1$ -произведения, гомоморфизма надстройки и произведений Масси.

ТЕОРЕМА 2. Соотношения в члене $E_2(S^*)$ спектральной последовательности нестабильных гомотопических групп сфер, рассматриваемом как A_∞ -монада, порождаются элементами $x \in K$ и имеют вид

$$\sum_{i \geq 2} \gamma_{i-2}(p(x^i) \otimes \cdots \otimes p(x^1))(u^n) = 0, \quad e(x) \leq n.$$

В частности, элементам $\xi_i \in K$ соответствуют порождающие соотношения, которые имеют вид

$$\gamma_{i-2}(h_{i-1} \otimes \cdots \otimes h_0)(u^n) = 0.$$

Все остальные соотношения получаются как произведения порождающих соотношений.

Если в число рассматриваемых операций включить надстройку, то порождающими соотношениями будут только соотношения вида

$$\gamma_{i-2}(h_{i-1} \otimes \cdots \otimes h_0)(u^1) = 0.$$

Теоремы 1 и 2 дают полное описание члена E_2 как A_∞ -монады.

Тем же образом можно поступать для описания члена $E_2(X)$ спектральной последовательности гомотопических групп топологического пространства X , рассматриваемого как A_∞ -алгебра над A_∞ -монадой $E_2(S^*)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В. А. // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 4. С. 441–443.
2. Massey W. S., Peterson F. P. The mod 2 cohomology structure of certain fibre spaces. Mem. Amer. Math. Soc. V. 74. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1967.
3. Стинрод Н., Эпштейн Д. Когомологические операции. М.: Наука, 1983.
4. Смирнов В. А. // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 80–96.