Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Чернышов, Об обратимости линейных дифференциальных операторов первого порядка, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 796–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-

зумекает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:08:42

ОБ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

М. К. Чернышов

Введение. Пусть X – комплексное банахово пространство, $L(X)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X , $L_p(\mathbb{R}, X) = L_p$, $p \in [1, \infty]$, – банахово пространство измеримых и интегрируемых по Бохнеру со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций, определенных на вещественной оси $\mathbb{R}$ со значениями в X . Через $C(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство $L_\infty(\mathbb{R}, X)$ непрерывных функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-01035, и программы “Университеты России”.

В статье приводятся необходимые и достаточные условия обратимости линейного дифференциального оператора первого порядка вида

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - A(t): W_p^1(\mathbb{R}, X) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, X),$$

где $A: \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ – операторнозначная функция, определенная соотношениями

$$A(t) = \begin{cases} A_- & \text{при } t \leq 0, \\ A_+ & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

и $W_p^1(\mathbb{R}, X)$ – пространство Соболева, которое является областью определения оператора $\mathcal{L}$.

В случае, когда операторы A_+ и A_- различны, в качестве области определения $\mathcal{L}$ удобно выбирать плотное в банаховом пространстве $C(\mathbb{R}, X)$ подпространство дифференцируемых всюду, за исключением нуля, функций $x(t)$, имеющих в нуле обе односторонние производные $x'_-(0)$, $x'_+(0)$ и подчиняющихся равенству $(A_+ - A_-)x(0) = x'_-(0) - x'_+(0)$.

В лемме 2 доказано, что необходимыми условиями обратимости оператора $\mathcal{L}$ являются условия

$$\sigma(A_{\pm}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset, \quad (1)$$

где $\sigma(B)$ – спектр оператора $B \in L(X)$ и $i\mathbb{R}$ – мнимая ось в $\mathbb{C}$. Следовательно, каждое из множеств $\sigma(A_{\pm})$ представимо в виде $\sigma(A_{\pm}) = \sigma_{\pm} \cup \sigma'_{\pm}$, где σ_+ и σ_- – спектральные компоненты операторов A_+ и A_- , лежащие в левой полуплоскости, а σ'_+ и σ'_- – спектральные компоненты тех же операторов, находящиеся в правой полуплоскости.

Пусть $P_- = P(\sigma_-, A_-)$, $P'_+ = P(\sigma'_+, A'_+)$ – проекторы Рисса, построенные по спектральным компонентам σ_- и σ'_+ операторов A_- и A'_+ соответственно, а $X'_+ = \text{Im } P'_+$, $X_- = \text{Im } P_-$.

Представление об обратном операторе дается здесь путем построения ограниченного решения на всей оси. Оно, в свою очередь, возникает в процессе изучения двух схожих по структуре задач Коши с ограниченными операторами A_+ и A_- и последующей “склейки” ограниченных на соответствующих полуосях ветвей этих решений.

Основной результат статьи составляет следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Для обратимости оператора $\mathcal{L}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (1), оператор $P'_+ - P_-$ был инъективным и $\text{Im}(P'_+ - P_-) = X'_+ \oplus X_-$.

Если $\dim X < \infty$, то для обратимости оператора $\mathcal{L}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (1) и оператор $P'_+ - P_-$ был обратимым.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для конечномерного пространства $X = \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел) условия обратимости оператора $\mathcal{L}$ были приведены в монографии Д. Хенри [1, лемма 1, с. 154] в терминах пересечения спектральных компонентов с мнимой осью и выполнения условия $X'_+ \oplus X_- = X$, однако, с нашей точки зрения, являлись необходимыми, но не достаточными.

1. Вспомогательные утверждения. Пусть P_1 и P_2 – два проектора из алгебры $L(X)$ и $X_k = \text{Im } P_k$, $k = 1, 2$, – подпространства из X , являющиеся образами этих проекторов.

ЛЕММА 1. Для того чтобы выполнялись следующие два условия:

- 1) $X_1 \cap X_2 = \{0\}$;
- 2) система уравнений

$$\begin{cases} P_1 x = y_1, \\ P_2 x = y_2 \end{cases} \quad (2)$$

имеет единственное решение для любых векторов $y_1 \in \text{Im } P_1$, $y_2 \in \text{Im } P_2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

- 1') $\text{Ker}(P_1 - P_2) = \{0\}$;
- 2') $\text{Im } P_1 \oplus \text{Im } P_2 = \text{Im}(P_1 - P_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть выполнены условия 1) и 2). Докажем вначале, что $\text{Ker}(P_1 - P_2) = \{x \in X : (P_1 - P_2)x = 0\} = \{0\}$. Если $x \in \text{Ker}(P_1 - P_2)$, то $P_1x = P_2x$, т.е. $P_1x \in X_1$ и $P_2x \in X_2$. Поэтому из условия 1) получаем, что $P_1x = P_2x = 0$. В силу единственности решения системы уравнений (2) (при $y_1 = y_2 = 0$) получаем, что $x = 0$.

Докажем, что $\text{Im}(P_1 - P_2) = X$. Пусть y — произвольный вектор из X . В силу свойства 1) он может быть представлен в виде $y = y_1 - y_2$, где $y_i \in X_i$, $i = 1, 2$. Пусть x — решение системы уравнений (2) с указанными правыми частями. Очевидно, что $(P_1 - P_2)x = y$. Итак, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия $\text{Ker}(P_1 - P_2) = \{0\}$ и $\text{Im } P_1 \oplus \text{Im } P_2 = \text{Im}(P_1 - P_2)$. Докажем, что $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Пусть $x \in X_1 \cap X_2$. Тогда существует вектор $y \in X$ такой, что имеют место равенства $x = P_1y = P_1(P_1y) = P_1x$, т.е. $x = P_1x$. Аналогично доказывается, что $x = P_2x$. Следовательно, $(P_1 - P_2)x = 0$. Так как оператор $P_1 - P_2$ инъективен, то $x = 0$.

Рассмотрим произвольные векторы $y_1 \in X_1$ и $y_2 \in X_2$. Пусть $y = y_1 - y_2$ и x — вектор из X такой, что $(P_1 - P_2)x = y = y_1 - y_2$. Ясно, что $x = (P_1 - P_2)^{-1}y = (P_1 - P_2)^{-1}(P_1y - P_2y)$, поэтому $P_1x = P_1(P_1 - P_2)^{-1}y$. Из условия 1) следует, что x — решение системы (2) (единственность решения следует из условия $\text{Ker}(P_1 - P_2) = \{0\}$). Лемма доказана.

2. Условия обратимости оператора $\mathcal{L}$. Имеет место следующая

ЛЕММА 2. Если оператор $\mathcal{L} = d/dt - A(t)$ обратим, то выполнены условия (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(n): L_p \rightarrow L_p$, $(S(m)x)(t) = x(t + m)$ — изометрический оператор сдвига функций из $L_p(\mathbb{R}, X)$ на число m . Рассмотрим последовательность функций $A_n(t) = A(t + n)$, $n \geq 1$. Поскольку имеют место равенства

$$S(n)\mathcal{L}S(-n) = \frac{d}{dt} - A(t + n), \quad n \geq 1,$$

то все операторы $\mathcal{L}_n = S(n)\mathcal{L}S(-n)$, $n \geq 1$, обратимы, причем $\|\mathcal{L}_n^{-1}\| = \|\mathcal{L}^{-1}\|$. Так как $A_n(t) = A_+$ для всех $t \in (-n, \infty)$, то $\varphi(\mathcal{L}_n x - \mathcal{L}_+ x) = 0$, где $\mathcal{L}_+ = d/dt - A_+$, для любой непрерывной функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойством $\text{supp } \varphi \subset [-n, n]$ и любой функции $x \in W_p^1(\mathbb{R}, X)$. Поскольку

$$\inf_{n \geq 1} \|\mathcal{L}_n x\| \geq \|x\| \cdot \|\mathcal{L}_n^{-1}\|^{-1} = \|x\| \cdot \|\mathcal{L}^{-1}\|^{-1},$$

справедливо неравенство $\|\mathcal{L}_+ x\| \geq \|x\| \cdot \|\mathcal{L}^{-1}\|^{-1}$.

Это влечет корректность оператора $\mathcal{L}_+$ (в терминологии авторов монографии [2]), т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|x\|_p \leq C\|\mathcal{L}_+ x\|_p$ для любого $x \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Теперь из результатов статьи [3] (см. также [2, гл. 10, § 4, п. 6]) следует, что оператор $\mathcal{L}_+$ обратим и, следовательно, [4, с. 233] выполнено условие $\sigma(A_+) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Аналогично доказывается выполнение условия $\sigma(A_-) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Необходимость. Пусть оператор $\mathcal{L}$ обратим. Условие (1) доказано в лемме 2. Докажем, что оператор $P'_+ - P_-$ инъективен.

Пусть существует ненулевой вектор $x \in \text{Im } P'_+ \cap \text{Im } P_-$ и $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow X$ — решение уравнения $\mathcal{L}x = 0$, удовлетворяющее условию $\varphi(0) = x$. Если $x \in \text{Im } P'_+$, то решение φ ограничено вправо, если $x \in \text{Im } P_-$, то решение φ ограничено влево. Таким образом, построенная функция φ является ненулевым решением однородного уравнения, что противоречит обратимости оператора $\mathcal{L}$.

Если оператор $\mathcal{L}$ обратим, то для решения уравнения $\mathcal{L}x = f$ при $t > 0$ справедлива формула

$$x(t) = e^{A_+ t} x(0) + \int_0^t e^{A_+(t-s)} f(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Тогда

$$P'_+ x(t) = e^{A_+ t} \left(P'_+ x(0) + \int_0^t e^{-A_+ s} P'_+ f(s) ds \right), \quad t \geq 0.$$

Поскольку решение $x(t)$ является ограниченной функцией, то справедливо условие

$$P'_+ x(0) = - \int_0^\infty e^{-A_+ s} P'_+ f(s) ds.$$

Рассмотрев аналогичную ситуацию при $t \leq 0$, получим условие ограниченности функции x при $t \leq 0$:

$$P_- x(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-A_- s} P_- f(s) ds.$$

Рассмотрим правую часть $f(t)$ исходного операторного уравнения $\mathcal{L}x = f$ вида

$$\begin{cases} y_1 \in X'_+, & t > 0, \\ y_2 \in X_-, & t \leq 0, \end{cases}$$

и заметим, что

$$\int_0^\infty e^{-A_+ s} P'_+ y_1 ds = -(A'_+)^{-1} (e^{-A_+ s} - I) y_1 \Big|_0^\infty = (A'_+)^{-1} y_1,$$

где $A'_+ = A_+ \upharpoonright X'_+$.

Таким образом, взяв в качестве $y_1 = A'_+ y'_1$, где y'_1 — произвольный вектор из X , и аналогично, выбрав в качестве $y_2 = A'_- y'_2$, где $A'_- = A_- \upharpoonright X_-$ и y'_2 — произвольный вектор из X , получим разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} P'_+ x = y_1, \\ P_- x = y_2, \end{cases}$$

где $y_1 \in X'_+$, $y_2 \in X_-$, что, в свою очередь, влечет за собой выполнение условия $\text{Im}(P'_+ - P_-) = X'_+ \oplus X_-$. Необходимость доказана.

Достаточность. Из условия теоремы следует (см. [4, с. 119]) существование постоянных M, M', α, α' таких, что

$$\begin{cases} \|e^{A_+ t} P_+\| \leq M e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ \|e^{A_+ t} P'_+\| \leq M e^{\alpha t}, & t < 0, \\ \|e^{A_+ t} P'_+ x\| \geq M' e^{\alpha' t} \|P'_+ x\|, & t \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Докажем обратимость оператора $\mathcal{L}$ в банаховом пространстве $C(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим уравнение $\mathcal{L}x = f$, $f \in C(\mathbb{R}, X)$, и будем искать решение $x \in C(\mathbb{R}, X)$ на полуоси $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$. При $t > 0$ оно имеет вид

$$x(t) = e^{A_+ t} x(0) + \int_0^t e^{A_+(t-s)} f(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Тогда

$$P'_+ x(t) = e^{A_+ t} \left(P'_+ x(0) + \int_0^t e^{-A_+ s} P'_+ f(s) ds \right), \quad t \geq 0.$$

Поскольку $\|e^{A_+ t} P'_+ x(0)\| \geq M' e^{\alpha' t} \|P'_+ x(0)\|$, необходимым условием ограниченности функции $x(t)$ является условие

$$P'_+ x(0) + \int_0^\infty e^{-A_+ s} P'_+ f(s) ds = 0. \quad (4)$$

Рассмотрев аналогичную ситуацию при $t \leq 0$, получим условие ограниченности функции x при $t \leq 0$:

$$P_- x(0) - \int_{-\infty}^0 e^{-A_- s} P_- f(s) ds = 0. \quad (5)$$

Докажем, что $x \in C(\mathbb{R}, X)$, если $x(0)$ удовлетворяет условиям (4), (5). При $t > 0$ получаем равенства

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_+ t} x(0) + \int_0^t e^{A_+(t-s)} f(s) ds \\ &= e^{A_+ t} (P_+ + P'_+) x(0) + \int_0^t e^{A_+(t-s)} (P_+ + P'_+) f(s) ds \\ &= e^{A_+ t} P_+ x(0) + \int_0^t e^{A_+(t-s)} P_+ f(s) ds + e^{A_+ t} \left(P'_+ x(0) + \int_0^t e^{-A_+ s} P'_+ f(s) ds \right) \\ &= e^{A_+ t} P_+ x(0) + \int_0^t e^{A_+(t-s)} P_+ f(s) ds \\ &\quad + e^{A_+ t} \left(P'_+ x(0) + \int_0^\infty e^{-A_+ s} P'_+ f(s) ds - \int_t^\infty e^{-A_+ s} P'_+ f(s) ds \right) \\ &= e^{A_+ t} P_+ x(0) + \int_0^t e^{A_+(t-s)} P_+ f(s) ds - e^{A_+ t} \int_t^\infty e^{-A_+ s} P'_+ f(s) ds \\ &= e^{A_+ t} P_+ x(0) + \int_0^t e^{A_+(t-s)} P_+ f(s) ds - \int_t^\infty e^{A_+(t-s)} P'_+ f(s) ds. \end{aligned}$$

Ввиду оценок (3) функция x ограничена при $t > 0$. Аналогично, условие (5) обеспечивает ограниченность $x(t)$ при $t \leq 0$.

Обозначив соответственно

$$-\int_0^\infty e^{-A_+ s} P'_+ f(s) ds = x'_+ \in X'_+ = \text{Im } P'_+, \quad \int_{-\infty}^0 e^{-A_- s} P_- f(s) ds = x_- \in X_- = \text{Im } P_-,$$

получим, что уравнения (4), (5) можно переписать в виде $P'_+ x(0) = x'_+$, $P_- x(0) = x_-$. Их одновременная разрешимость вытекает из леммы 1.

Из проведенных рассуждений следует, что если $\mathcal{L}x = 0$, то одновременно имеют место равенства $P'_+ x(0) = P_- x(0) = 0$ и поэтому (в силу леммы 1) $x(0) = 0$. Таким образом, оператор $\mathcal{L}$ обратим в пространстве $C(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, решение однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$ (см. [2]). Отсюда немедленно следует его обратимость во всех пространствах $L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$. Теорема доказана.

Отметим, что эквивалентность обратимости дифференциальных операторов во всех пространствах $L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, и $C(\mathbb{R}, X)$ установлена в статье А. Г. Баскакова [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
2. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
3. Жиков В. В., Тюрин В. М. // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 1. С. 201–207.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
5. Баскаков А. Г. // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 3. С. 295–298.

Воронежский государственный университет
E-mail: max@chern.vrn.ru

Поступило
29.01.96
Исправленный вариант
12.05.98