Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Анисова, Квадрики коразмерности 4 в пространстве $\mathbb{C}^7$ и их автоморфизмы, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 803–811

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:54:57

УДК 517.55

КВАДРИКИ КОРАЗМЕРНОСТИ 4 В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^7$ И ИХ АВТОМОРФИЗМЫ

Е. Г. Анисова

В работе изучаются автоморфизмы невырожденных квадрик типа $(4, 3)$. Из всех квадрик этого типа выделены квадрики, имеющие нелинейные автоморфизмы, произведена их классификация и найдены размерности групп автоморфизмов.

Библиография: 8 названий.

Пусть $M \subset \mathbb{C}^{n+k}$ – вещественно-аналитическое CR-многообразие коразмерности k и CR-размерности n . Тогда в подходящих координатах (z, w) ($z \in \mathbb{C}^n$, $w = u + iv \in \mathbb{C}^k$, $u, v \in \mathbb{R}^k$) в окрестности начала координат уравнение поверхности M записывается в виде $v = F(z, \bar{z}, u)$, где F – вещественно-аналитическая функция со значениями в $\mathbb{R}^k$, причем $F|_0 = 0$, $dF|_0 = 0$. Выделим у функции F компоненту степени 1 по z , степени 1 по $\bar{z}$ и степени 0 по u . Обозначим ее через $\langle z, z \rangle = (\langle z, z \rangle^1, \dots, \langle z, z \rangle^k)$, $\langle z, z \rangle^p = {}^t \bar{z} H^p z$, где H^p – эрмитова матрица порядка n , $p = 1, \dots, k$. Тогда уравнение поверхности M примет вид

$$v = \langle z, z \rangle + F_1(z, \bar{z}, u).$$

Таким образом, с поверхностью M связана поверхность Q , определяемая уравнением $v = \langle z, z \rangle$. Поверхность Q называется *касательной квадрикой* поверхности M . В статье [1] В. К. Белошанка доказал, что размерность группы голоморфных автоморфизмов поверхности M , сохраняющих на месте начало координат, не превосходит размерности аналогичной группы автоморфизмов касательной квадрики. Изучение поверхностей вида $v = \langle z, z \rangle$ представляет также и самостоятельный интерес.

Поверхность Q , заданная уравнением $v = \langle z, z \rangle$, называется (k, n) -*квадрикой*. Квадрика называется *невырожденной*, если выполняются следующие условия:

- 1) $\langle z, z \rangle^1, \dots, \langle z, z \rangle^k$ линейно независимы;
- 2) из того, что $\langle z, e \rangle = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$, следует, что $e = 0$.

В дальнейшем мы не будем различать квадрику, заданную уравнением $v = \langle z, z \rangle$, и соответствующие ей эрмитовы матрицы H^j , $j = 1, \dots, k$ ($\langle z, z \rangle^j = {}^t \bar{z} H^j z$).

С каждой квадрикой связана локальная группа Ли $G(Q)$ голоморфных автоморфизмов, сохраняющих начало координат, и алгебра Ли $g(Q)$ инфинитезимальных автоморфизмов. Группа автоморфизмов квадрики конечномерна тогда и только тогда, когда квадрика невырождена (см. [1]). Мы будем рассматривать только невырожденные квадрики.

В случае $n = k = 1$ Пуанкаре в статье [2] нашел формулу для автоморфизмов квадрики $v = |z|^2$:

$$z^* = \frac{c(z + aw)}{1 - 2iz\bar{a} - (r + ia\bar{a})w}, \quad w^* = \frac{sw}{1 - 2iz\bar{a} - (r + ia\bar{a})w}.$$

Белошапка получил следующую формулу (см. [3]) для алгебры $g(Q)$ невырожденной (k, n) -квадрики Q :

$$g(Q) = \left\{ (Cz + aw + A(z, z) + B(z, w)) \frac{\partial}{\partial z} + (sw + 2i\langle z, a\bar{w} \rangle + r(w, w)) \frac{\partial}{\partial w} \right\},$$

где все выражения линейны, причем

$$2 \operatorname{Re}\langle Cz, z \rangle = s\langle z, z \rangle, \quad (1)$$

$$\langle A(z, z), z \rangle = 2i\langle z, a\langle z, z \rangle \rangle, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re}\langle B(z, u), z \rangle = r(\langle z, z \rangle, u), \quad \operatorname{Im}\langle B(z, \langle z, z \rangle), z \rangle = 0. \quad (3)$$

Приписывая z вес 1, $\partial/\partial z$ вес -1 , w вес 2 и $\partial/\partial w$ вес -2 , получим разложение $g(Q)$ в сумму градуированных компонент:

$$g(Q) = s(Q) + c(Q) + a(Q) + b(Q),$$

где

$$\begin{aligned} s(Q) &= \left\{ \mu z \frac{\partial}{\partial z} + 2 \operatorname{Re} \mu \cdot w \frac{\partial}{\partial w} : \mu \in \mathbb{C} \right\}, \\ c(Q) &= \left\{ Cz \frac{\partial}{\partial z} + sw \frac{\partial}{\partial w} : C \in L(n, \mathbb{C}), s \in L(k, \mathbb{R}), \text{ выполняется (1)} \right\}, \\ a(Q) &= \left\{ (aw + A(z, z)) \frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, a\bar{w} \rangle \frac{\partial}{\partial w} : \text{ выполняется (2)} \right\}, \\ b(Q) &= \left\{ B(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + r(w, w) \frac{\partial}{\partial w} : \text{ выполняются (3)} \right\}. \end{aligned}$$

При этом $c(Q) + s(Q)$ отвечает за наличие линейных автоморфизмов, а $a(Q) + b(Q)$ – за наличие нелинейных.

Локально биголоморфно эквивалентные невырожденные квадрики линейно эквивалентны, поэтому под *эквивалентностью квадрик* Q_1 и Q_2 можно понимать существование пары матриц $(D, \rho) \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{C}) \times \operatorname{GL}(k, \mathbb{R})$ такой, что $\langle z, z \rangle_1 = \rho^{-1} \langle Dz, Dz \rangle_2$ (здесь $v = \langle z, z \rangle_j$ – уравнение Q_j , $j = 1, 2$). Пусть $\langle z, z \rangle_j^r = {}^t \bar{z} H_j^r z$, $j = 1, 2, r = 1, \dots, k$. Тогда переход от Q_1 к Q_2 с помощью пары матриц (D, ρ) можно осуществить в два этапа: сначала при помощи пары (D, E) перейти к квадрике Q_3 , заданной матрицами H_3^r , затем при помощи пары (E, ρ) от Q_3 перейти к Q_2 . Тогда на первом этапе $H_1^r = D^* H_3^r D$, а на втором этапе $H_2^r = \rho_{r1} H_3^1 + \dots + \rho_{rk} H_3^k$. Таким образом, замены вида $H^r \mapsto T H^r T^*$

(назовем ее *замена первого типа*) и $H \mapsto \rho H$ (*замена второго типа*) приводят к эквивалентным квадратикам ($T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\rho \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$).

В статье [4] приведена классификация $(2, n)$ -квадрик и вычислены их алгебры автоморфизмов, а в статье [5] аналогичная работа проделана для $(3, 3)$ -квадрик. Случай квадратик типа $(3, 3)$ интересен тем, что это самая маломерная ситуация, в которой квадратика общего положения является жесткой (т.е. автоморфизмы, сохраняющие начало координат, имеют вид $z \mapsto \mu z$, $w \mapsto |\mu|^2 w$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; см. [3]). Таким образом, рассмотрение случая $(4, 3)$ -квадрик является естественным продолжением работы [5].

В данной работе мы найдем все (с точностью до эквивалентности) $(4, 3)$ -квадрики, обладающие нелинейными автоморфизмами, а также вычислим их алгебры автоморфизмов. Таким образом, задача классификации $(4, 3)$ -квадрик будет полностью рассмотрена. Частный случай этой задачи – случай так называемых *нуль-квадрик* – был рассмотрен автором в статье [6]. Для нуль-квадрик были также вычислены группы автоморфизмов.

Для квадратика Q , заданной эрмитовыми матрицами H^j , $j = 1, \dots, k$, можно рассмотреть *характеристический многочлен* $P_H(r) = \det(r_1 H^1 + \dots + r_k H^k)$.

Квадрика коразмерности k в $\mathbb{C}^{n+k}$ называется *нуль-квадрикой*, если ее характеристический многочлен $P_H(r)$ тождественно равен 0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть квадратика Q_1 и Q_2 задаются эрмитовыми матрицами H_1^j и H_2^j соответственно, $j = 1, \dots, k$ (т.е. $\langle z, z \rangle_l^j = {}^t \bar{z} H_l^j z$, $l = 1, 2$). Тогда если квадратика Q_1 и Q_2 эквивалентны, то их характеристические многочлены связаны соотношением

$$P_{H_1}(r) = |\det D|^2 \cdot P_{H_2}({}^t(\rho^{-1})r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, обозначая ρ^{-1} через p , получим

$$\begin{aligned} P_{H_1} &= \det(r_1(p_{11}D^*H_2^1D + \dots + p_{1k}D^*H_2^kD) + \dots \\ &\quad + r_k(p_{k1}D^*H_2^1D + \dots + p_{kk}D^*H_2^kD)) \\ &= \det(D^*(H_2^1(p_{11}r_1 + \dots + p_{k1}r_k) + \dots + H_2^k(p_{1k}r_1 + \dots + p_{kk}r_k))D) \\ &= |\det D|^2 \cdot P_{H_2}({}^t(p)r) = |\det D|^2 \cdot P_{H_2}({}^t(\rho^{-1})r). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Из предложения 1 получаем два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Квадрика, эквивалентная нуль-квадрике, также является нуль-квадрикой.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если характеристический многочлен некоторой квадратика раскладывается на линейные множители, то и характеристический многочлен эквивалентной ей квадратика также раскладывается на линейные множители.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Любая невырожденная $(4, 3)$ -квадрика, обладающая нелинейными автоморфизмами, эквивалентна одной из следующих попарно неэквивалентных квадрик:

$$\begin{aligned}
 Q_1 : v^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3, & v^2 &= 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z}^3, & v^3 &= 2 \operatorname{Im} z^1 \bar{z}^3, & v^4 &= 2 \operatorname{Im} z^2 \bar{z}^3, \\
 Q_2 : v^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3, & v^2 &= 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z}^3, & v^3 &= |z^3|^2, & v^4 &= 2 \operatorname{Im} z^2 \bar{z}^3, \\
 Q_3 : v^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3, & v^2 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^3 &= |z^2|^2, & v^4 &= |z^1|^2, \\
 Q_4 : v^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^2 &= -2 \operatorname{Im} z^1 \bar{z}^2, & v^3 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3, & v^4 &= |z^2|^2, \\
 Q_5 : v^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^2 &= -2 \operatorname{Im} z^1 \bar{z}^2, & v^3 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3, & v^4 &= |z^1|^2 + |z^2|^2, \\
 Q_6 : v^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^2 &= -2 \operatorname{Im} z^1 \bar{z}^2, & v^3 &= |z^1|^2, & v^4 &= |z^3|^2, \\
 Q_7 : v^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^2 &= -2 \operatorname{Im} z^1 \bar{z}^2, & v^3 &= |z^1|^2, & v^4 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3 + |z^2|^2, \\
 Q_8 : v^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^2 &= |z^1|^2, & v^3 &= |z^2|^2, & v^4 &= |z^3|^2, \\
 Q_9 : v^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^2 &= 2 \operatorname{Im} z^1 \bar{z}^2, & v^3 &= |z^1|^2 - |z^2|^2, & v^4 &= |z^3|^2.
 \end{aligned}$$

При этом Q_1, Q_2 – нуль-квадрики.

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся следующим утверждением о приведении к каноническому виду пары матриц при помощи одной и той же невырожденной матрицы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [7, теорема 4.5.19]. Пусть H^1 и H^2 – эрмитовы матрицы, $\det H^1 \neq 0$. Тогда существует невырожденная матрица T такая, что

$$T(rH^1 - H^2)T^* = \operatorname{diag}\{\varepsilon_1 R_1, \dots, \varepsilon_s R_s, R_0\},$$

где $r \in \mathbb{R}$,

$$R_j = \begin{pmatrix} 0 & & -1 & r - \lambda_j \\ & \ddots & \ddots & \\ -1 & & \ddots & \\ r - \lambda_j & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad j = 1, \dots, s,$$

$$R_0 = \operatorname{diag}\{R_{01}, \dots, R_{0p}\},$$

$$R_{0t} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & -1 & r - \mu_t \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -1 & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right),$$

$$\operatorname{Im} \mu_t \neq 0, \quad t = 1, \dots, p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Случай нуль-квадрик рассмотрен в работе [6]. Таким образом, нужно рассмотреть только квадрики, не являющиеся нуль-квадриками.

Так как для рассматриваемой квадрики $P_H(r) \neq 0$, существует невырожденная линейная комбинация матриц H^j . Поэтому (применяя в случае необходимости замену второго типа) можно считать, что $\det H^1 \neq 0$, и использовать предложение 2. Приведем пару матриц H^1, H^2 к каноническому виду. При этом H_3 и H_4 имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_j & d_j - ip_j & t_j - im_j \\ d_j + ip_j & b_j & l_j - ik_j \\ t_j + im_j & l_j + ik_j & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

где $a_j, d_j, p_j, t_j, m_j, b_j, l_j, k_j, c_j \in \mathbb{R}$, а матрица $T(rH^1 - H^2)T^*$ имеет вид

а) $\text{diag}\{\varepsilon_1 R_1, R_0\}$, где

$$R_1 = r - \lambda, \quad R_0 = \begin{pmatrix} 0 & r - \mu \\ r - \bar{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{Im } \mu \neq 0;$$

в этом случае, обозначая TH^1T^* и TH^2T^* через $\hat{H}^1$ и $\hat{H}^2$ соответственно, получим

$$\hat{H}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \bar{\mu} & 0 \end{pmatrix};$$

б) $\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & r - \lambda \\ -1 & r - \lambda & 0 \\ r - \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \pm 1, \lambda \in \mathbb{R}$; в этом случае

$$\hat{H}^1 = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}^2 = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

в) $\text{diag}\{\varepsilon_1 R_1, \varepsilon_2 R_2\}$, где

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & r - \lambda_1 \\ r - \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = r - \lambda_2, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2;$$

в этом случае

$$\hat{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_2 \end{pmatrix};$$

г) $\text{diag}\{\varepsilon_1 R_1, \varepsilon_2 R_2, \varepsilon_3 R_3\}$, где $R_j = r - \lambda_j, \varepsilon_j = \pm 1, \lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$; в этом случае

$$\hat{H}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Применяя к этим квадратикам замену второго типа, мы получим одну из следующих квадратик:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_j & -ip_j & -im_j \\ ip_j & b_j & l_j - ik_j \\ im_j & l_j + ik_j & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -ip_j & t_j - im_j \\ ip_j & b_j & l_j - ik_j \\ t_j + im_j & l_j + ik_j & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -ip_j & t_j - im_j \\ ip_j & b_j & l_j - ik_j \\ t_j + im_j & l_j + ik_j & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & d_j - ip_j & t_j - im_j \\ d_j - ip_j & 0 & l_j - ik_j \\ t_j + im_j & l_j + ik_j & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_j & d_j - ip_j & t_j - im_j \\ d_j + ip_j & b_j & 0 \\ t_j + im_j & 0 & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_j & d_j - ip_j & t_j - im_j \\ d_j + ip_j & b_j & 0 \\ t_j + im_j & 0 & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

Квадрики вида а) эквивалентны (8) и (9) (для $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = -1$ соответственно), квадрики вида б) эквивалентны (4), квадрики вида с) эквивалентны (5) и (6), а квадрики вида д) эквивалентны (7).

Пусть про один из параметров матрицы H^3 (например, про параметр a_1) известно, что он ненулевой, и при этом значение ни одного ненулевого параметра в матрице H^3 не фиксировано. Тогда с помощью замены второго типа параметр a_1 можно сделать равным 1, а соответствующий параметр в матрице H^4 (т.е. параметр a_2) – равным 0. Аналогичное преобразование можно сделать, меняя местами матрицы H^3 и H^4 .

В работе [8] доказано, что если $a(Q) = 0$, то и $b(Q) = 0$. Поэтому если у квадрики есть нелинейные автоморфизмы, то $a(Q) \neq 0$. Найдем те квадрики, для которых $a(Q) \neq 0$. Для этого воспользуемся соотношением (2). В работе [5] соотношение (2) преобразовано к следующему виду (в случае $\det H^1 \neq 0$):

$$\begin{aligned} & (\alpha_1^T H^1 z) H^j z + (\alpha_2^T H^1 z) H^j (H^1)^{-1} H^2 z \\ & + (\alpha_3^T H^1 z) H^j (H^1)^{-1} H^3 z + (\alpha_4^T H^1 z) H^j (H^1)^{-1} H^4 z \\ & = (\alpha_1^T H^j z) H^1 z + (\alpha_1^T H^j z) H^2 z + (\alpha_1^T H^j z) H^3 z + (\alpha_1^T H^j z) H^4 z, \quad j = 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь α_j означает j -й столбец матрицы $\bar{a}$. Расписывая (10) по координатам и приравнявая выражения при $z^j z^r$, мы получим систему линейных однородных уравнений, неизвестными в которой являются элементы матрицы $\bar{a}$ ($\bar{a}_{jr} = a_{jr}$). Размерность пространства решений этой системы совпадает с $\dim a(Q)$.

Выполняя вычисления для (4)–(9) так же, как и в работе [5], мы получим следующие квадрики (те квадрики, для которых $\dim a(Q) \neq 0$):

$$\begin{aligned}
 Q_1^* &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 Q_2^* &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 Q_3^* &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
 Q_4^* &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 Q_5^* &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 Q_6^* &: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 Q_7^* &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 Q_8^* &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \pm 1, \\
 Q_9^* &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & d-ip & 0 \\ d+ip & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 Q_{10}^* &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l-ik \\ 0 & l+ik & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 Q_{11}^* &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

При этом для квадрик Q_4^* и Q_5^* имеем $\dim a(Q) = 4$, а для остальных $\dim a(Q) = 2$.

Квадрики $Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*, Q_4^*, Q_5^*$ эквивалентны квадратикам Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7 соответственно.

Заметим, что квадрики Q_9^* и Q_{10}^* переводятся друг в друга с помощью замены второго типа. Кроме того, квадрики Q_{11}^* и Q_7^* являются частными случаями квадрики Q_9^* . При $p = 0$ квадрика Q_9^* эквивалентна Q_8 . При $p \neq 0$ возьмем a и b такие, что $pa - qb = 1$, $pb + qa = 0$ (при $p \neq 0$ решение этой системы существует), и рассмотрим замену $z^1 = (a + ib)z^{*1}$, $z^2 = z^{*2}$, $z^3 = z^{*3}$. Тогда квадрика Q_9^* также перейдет в квадратик Q_8 .

Квадрика Q_6^* переводится в Q_8 с помощью замены $z^1 = z^{*1}, z^2 = z^{*2} - iz^{*1}, z^3 = z^{*3}$.

Квадрика Q_8^* при $c = 1$ с помощью замены $z^1 = z^{*1}, z^2 = z^{*2} + iz^{*3}, z^3 = z^{*2} - iz^{*3}$ переводится в Q_8 , а при $c = -1$ она эквивалентна Q_9 .

Прямыми вычислениями по формулам (1)–(3) для $Q_j, j = 1, \dots, 9$, получаем

$$\begin{aligned} \dim(c(Q_1) + s(Q_1)) &= 10, & \dim a(Q_1) &= 6, & \dim b(Q_1) &= 4, \\ \dim(c(Q_2) + s(Q_2)) &= 11, & \dim a(Q_2) &= 6, & \dim b(Q_2) &= 4, \\ \dim(c(Q_3) + s(Q_3)) &= 8, & \dim a(Q_3) &= 2, & \dim b(Q_3) &= 1, \\ \dim(c(Q_4) + s(Q_4)) &= 8, & \dim a(Q_4) &= 2, & \dim b(Q_4) &= 1, \\ \dim(c(Q_5) + s(Q_5)) &= 7, & \dim a(Q_5) &= 2, & \dim b(Q_5) &= 1, \\ \dim(c(Q_6) + s(Q_6)) &= 10, & \dim a(Q_6) &= 4, & \dim b(Q_6) &= 4, \\ \dim(c(Q_7) + s(Q_7)) &= 8, & \dim a(Q_7) &= 4, & \dim b(Q_7) &= 2, \\ \dim(c(Q_8) + s(Q_8)) &= 7, & \dim a(Q_8) &= 2, & \dim b(Q_8) &= 2, \\ \dim(c(Q_9) + s(Q_9)) &= 7, & \dim a(Q_9) &= 2, & \dim b(Q_9) &= 1. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что полученные квадрики $Q_j, j = 1, \dots, 9$, попарно неэквивалентны.

У эквивалентных квадрик совпадают размерности компонент алгебры $g(Q)$. Поэтому полученные квадрики попарно неэквивалентны кроме, быть может, пар Q_3, Q_4 и Q_5, Q_9 .

Найдем характеристические многочлены квадрик Q_5, Q_9 :

$$P_5(r) = r_1^2(r_1 + r_2), \quad P_9(r) = r_4(r_2r_3 - r_1^2).$$

Многочлен P_5 раскладывается на линейные множители, а многочлен P_9 не раскладывается, значит в силу следствия 2 квадрики Q_5, Q_9 неэквивалентны.

Для квадрики Q рассмотрим множество *изотропных векторов* $V(Q) = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, z \rangle = 0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если квадрики Q и Q' эквивалентны посредством пары невырожденных матриц (D, ρ) (т.е. $\langle z, z \rangle = \rho^{-1} \langle Dz, Dz \rangle'$), то соответствующие им множества $V = V(Q)$ и $V' = V(Q')$ получают одно из другого невырожденным линейным преобразованием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} V' &= \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, z \rangle' = 0\} = \{Dz \in \mathbb{C}^n : \langle Dz, Dz \rangle' = 0\} \\ &= D\{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, z \rangle = 0\} = DV. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Для квадрик Q_3, Q_4 множества изотропных векторов равны

$$V_3 = \{z^1 = z^2 = 0\}, \quad V_4 = \{z^2 = 0, \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3 = 0\}.$$

Множество V_4 не является линейным подпространством $\mathbb{C}^3$, а V_3 является. Поэтому одно из них нельзя перевести в другое линейным преобразованием. Значит, согласно предложению 3 квадрики Q_3 и Q_4 неэквивалентны.

Мы доказали, что любая обладающая нелинейными автоморфизмами $(4, 3)$ -квадрика эквивалентна одной из неэквивалентных между собой квадрик Q_j , $j = 1, \dots, 9$, и вычислили размерности групп автоморфизмов этих квадрик.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белошাপка В. К. Конечномерность группы автоморфизмов вещественно-аналитической поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 48. № 2. С. 437–442.
- [2] Poincaré H. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. P. 185–220.
- [3] Белошاپка В. К. О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 2. С. 203–219.
- [4] Шевченко С. Н. Описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов квадрик коразмерности два и их классификация // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 142–153.
- [5] Палинчак Н. Ф. Вещественные квадрики коразмерности 3 в $\mathbb{C}^6$ и их нелинейные автоморфизмы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 3. С. 159–178.
- [6] Анисова Е. Г. Нуль-квадрики коразмерности 4 в пространстве $\mathbb{C}^7$ // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 657–665.
- [7] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [8] Палинчак Н. Ф. О квадриках высокой коразмерности // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 110–115.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: liza@mcme.ru

Поступило
19.05.98