Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ониани, О возможных значениях верхней и нижней производных относительно выпуклых дифференциальных базисов, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 762–775

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:38:19

УДК 517.51

О ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ПРОИЗВОДНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ БАЗИСОВ

Г. Г. Ониани

Доказано, что если выпуклый плотностный дифференциальный базис B является центрированным и инвариантным относительно сдвига и гомотетии, то интегральные средние неотрицательной суммируемой функции, взятые по B , могут расходиться ограниченно лишь на множестве меры нуль (тем самым, дано обобщение соответствующей теоремы Гусмана и Менаргеса), причем установлено, что инвариантность ни относительно сдвига, ни относительно гомотетии не является излишним условием.

Библиография: 14 названий.

Определения и обозначения. Отображение B , определенное на $\mathbb{R}^n$, называется *дифференциальным базисом* в $\mathbb{R}^n$, если для каждой $x \in \mathbb{R}^n$ $B(x)$ является семейством открытых ограниченных множеств, содержащих точку x , таких, что существует последовательность $\{R_k\} \subset B(x)$ с $\text{diam } R_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Для базиса B через $\overline{B}$ будем обозначать семейство $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} B(x)$.

Пусть B – базис в $\mathbb{R}^n$. Для $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ верхний и нижний предел интегральных средних $\frac{1}{|R|} \int_R f$, где R – произвольное множество из $B(x)$ и $\text{diam } R \rightarrow 0$, называются *верхними и нижними производными интеграла от f в точке x* и обозначаются через $\overline{D}_B(\int f, x)$ и $\underline{D}_B(\int f, x)$ соответственно. Если они равны, то их общее значение называют *производным интеграла от f в точке x* и обозначают через $D_B(\int f, x)$. В дальнейшем, ради краткости, интеграл в записях производных будем опускать.

Говорят, что *базис B дифференцирует $\int f$* , если $\overline{D}_B(f, x) = \underline{D}_B(f, x) = f(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Максимальный оператор M_B , соответствующий базису B , определяется равенством

$$M_B(f)(x) = \sup_{R \in B(x)} \frac{1}{|R|} \int_R |f|, \quad f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

обозначим также для $r > 0$

$$M_B^{(r)}(f)(x) = \sup_{R \in B(x), \text{diam } R < r} \frac{1}{|R|} \int_R |f|,$$

$$\overline{M}_B^{(r)}(f)(x) = \sup_{R \in B(x), \text{diam } R < r} \frac{1}{|R|} \int_R f.$$

Базис B назовем

- *образованным множествами из некоторого класса Δ* , если $\overline{B} \subset \Delta$;
- *выпуклым*, если он образован из выпуклых множеств;
- *плотностным*, если для каждого измеримого множества E базис B дифференцирует $\int \chi_E$;
- *инвариантным относительно сдвига*, если $B(x) = \{R + x : R \in B(O)\}$ для каждой $x \in \mathbb{R}^n$, где O – начало координат в $\mathbb{R}^n$;
- *инвариантным относительно гомотетии*, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$, $R \in B(x)$ и гомотетии H с центром в x имеем $H(R) \in B(x)$;
- *буземан-феллеровским*, если для каждого $R \in \overline{B}$ имеем $R \in B(x)$ для каждого $x \in R$;
- *измеримым*, если для каждого $f \in L(\mathbb{R}^n)$ и $r > 0$ функция $\overline{M}_B^{(r)}(f)$ измерима.

Заметим, что

- 1) если B – плотностный базис, то B дифференцирует интеграл от каждой измеримой ограниченной функции (см., например, [1, гл. III, § 2]);
- 2) измеримость базиса B влечет за собой измеримость функций $\overline{D}_B(f, \cdot)$, $\underline{D}_B(f, \cdot)$, $M_B(f)$ и $M_B^{(r)}(f)$ для каждого $f \in L(\mathbb{R}^n)$ и $r > 0$;
- 3) если базис B инвариантен относительно сдвига или является буземан-феллеровским, то B измерим;
- 4) если базис B является буземан-феллеровским и инвариантен относительно гомотетии, то B инвариантен и относительно сдвига.

Утверждения 2)–4) проверяются непосредственно.

Через $\mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$ обозначим базис, для которого $\mathbb{I}(\mathbb{R}^n)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, состоит из всех n -мерных интервалов, содержащих x . Дифференцирование относительно $\mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$ принято называть *сильным дифференцированием*.

Прямоугольным репером в $\mathbb{R}^n$ назовем множество, состоящее из n взаимноортогональных прямых, проходящих через начало координат. Пусть E – некоторое семейство прямоугольных реперов в $\mathbb{R}^n$. Через $\mathbb{I}_E(\mathbb{R}^n)$ обозначим базис, для которого $\mathbb{I}_E(\mathbb{R}^n)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, состоит из всех n -мерных прямоугольных параллелепипедов, содержащих x , ребра которых параллельны соответствующим прямым некоторого репера из E .

Базисы B_1 и B_2 назовем *эквивалентными (положительно эквивалентными)*, если для каждой $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ($f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$) $\underline{D}_{B_1}(f, x) = \underline{D}_{B_2}(f, x)$ и $\overline{D}_{B_1}(f, x) = \overline{D}_{B_2}(f, x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть E – выпуклое ограниченное открытое множество и $x \in E$. Для единичного вектора e рассмотрим числа $\sup\{t > 0 : x + te \in E\}$, $\sup\{t > 0 : x - te \in E\}$ и отношение минимального к максимальному среди них обозначим через $c_e(x, E)$; $c(x, E)$ определим как $\inf_e c_e(x, E)$, где инфимум берется по всем единичным векторам; $c(x, E)$ выражает “коэффициент центрирования” множества E в точке x .

Выпуклый базис B назовем *центрированным*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $E \in B(x)$ существует сдвиг T , для которого $T(E) \in B(x)$ и $c(x, T(E)) \geq \varepsilon$.

Нетрудно проверить, что *каждый выпуклый буземан-феллеровский базис является центрированным*.

Через $\mathbb{G}^n$ будем обозначать единичный куб в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\mathbb{G}^n = [0, 1]^n$.

Результаты. Отвечая на вопрос, поставленный Саксом [2] Безикович [3] (см. также [1, гл. IV, § 3]) доказал, что *сильные интегральные средние суммируемой на плоскости функции могут расходиться ограниченно только на множестве меры нуль; точнее, для каждой $f \in L(\mathbb{R}^2)$ оба множества*

$$\{-\infty < \underline{D}_{\mathbb{I}(\mathbb{R}^2)}(f, \cdot) < f\}, \quad \{f < \overline{D}_{\mathbb{I}(\mathbb{R}^2)}(f, \cdot) < \infty\}$$

имеют меру нуль. Многомерный аналог этого результата был установлен Вардом [4] (см. также [5, гл. IV, § 11]).

Целью настоящей работы является изучение следующей задачи, поставленной Гусманом [6, с. 389]: *на какие базисы можно распространить теорему Безиковича?*

В дальнейшем будем говорить, что базис B в $\mathbb{R}^n$ имеет *свойство Безиковича* (слабое свойство Безиковича), если множества $\{-\infty < \underline{D}_B(f, \cdot) < f\}$, $\{f < \overline{D}_B(f, \cdot) < \infty\}$ имеют меру нуль для каждой $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ($f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$).

Класс известных базисов, имеющих свойство Безиковича, небогат. В частности, кроме $\mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$, свойством Безиковича обладает и любой плотностный базис $\mathbb{I}_E(\mathbb{R}^n)$. Это можно доказать, пользуясь многомерным аналогом леммы Рисса “о восходящем солнце”, установленной в [7], и рассуждая по схеме из [3]. Здесь же заметим, что Зерекидзе [8], [9] указал класс базисов, образованных из n -мерных интервалов, которые эквивалентны $\mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, имеют свойство Безиковича.

Что же касается базисов со слабым свойством Безиковича, для них известна следующая довольно общая

ТЕОРЕМА (Гусман–Менаргес [1, гл. IV, § 3]). *Если выпуклый плотностный базис B в $\mathbb{R}^n$, образованный из центрально-симметричных множеств, является буземан-феллеровским и инвариантным относительно гомотетии, то B имеет слабое свойство Безиковича.*

Усилением этого результата является

ТЕОРЕМА 1. *Если выпуклый плотностный базис B в $\mathbb{R}^n$ одновременно является:*

- 1) *инвариантным относительно сдвига,*
- 2) *инвариантным относительно гомотетии,*
- 3) *центрированным,*

то B имеет слабое свойство Безиковича.

Нижеприведенные утверждения показывают, в частности, что условия 1) и 2) в теореме 1 не являются излишними.

ТЕОРЕМА 2. *Существует инвариантный относительно гомотетии центрированный базис B , образованный из двумерных интервалов, для которого найдется функция $f \in L(\mathbb{G}^2)$, $f \geq 0$, такая, что*

$$f(x) < \overline{D}_B(f, x) < \infty \quad \text{почти всюду на } \mathbb{G}^2.$$

ТЕОРЕМА 3 [10]. *Существует инвариантный относительно сдвига буземан-феллеровский базис B , образованный из двумерных интервалов, для которого найдется функция $f \in L(\mathbb{G}^2)$, $f \geq 0$, такая, что*

$$f(x) < \overline{D}_B(f, x) < \infty \quad \text{почти всюду на } \mathbb{G}^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 в случае требования буземан-феллеровости вместо условия центрированности, а теорема 2 без требования центрированности были установлены в [11].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нам не известен ответ на вопрос: *является ли условие центрированности в теореме 1 излишним, т.е. имеет ли каждый выпуклый плотностный и инвариантный относительно сдвига и гомотетии базис свойство Безиковича.*

Доказательства. Пусть B – выпуклый базис в $\mathbb{R}^n$ такой, что множества из $\overline{B}$ попарно сравнимы, т.е. для любых $E_1, E_2 \in \overline{B}$ существует сдвиг одного из них, который помещает его внутрь другого. Тогда (см. [1, гл. I, § 3, замечание (1)]) для B справедлива теорема о покрытии типа теоремы Витали, откуда с помощью стандартной техники (см., например, [1, гл. I, § 3, замечание (9)]) выводится, что B дифференцирует $L(\mathbb{R}^n)$. Из этого замечания непосредственно вытекает

ЛЕММА 1. Пусть B – инвариантный относительно сдвига выпуклый базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда найдется его подбазис B' , дифференцирующий $L(\mathbb{R}^n)$, и, следовательно, для каждой $f \in L(\mathbb{R}^n)$

$$\underline{D}_B(f, x) \leq f(x) \leq \overline{D}_B(f, x) \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R}^n.$$

Действительно, B' можно опеределить следующим образом: $B'(x) = \{x + R_k : k \in \mathbb{N}\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $\{R_k\} \subset B(0)$, $\text{diam } R_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и $R_1 \supset R_2 \supset \dots$.

ЛЕММА 2. Пусть B – плотностный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждой $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, имеем $|\{\underline{D}_B(f, \cdot) < f\}| = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L(\mathbb{R}^n)$ и $f \geq 0$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$, а $\alpha > 0$ подберем так, чтобы $\int_{\{f > \alpha\}} f < \varepsilon^2$. Обозначим $f_* = f\chi_{\{f \leq \alpha\}}$, $f^* = f\chi_{\{f > \alpha\}}$. Ясно, что $\{\underline{D}_B(f^*, \cdot) < f^* - \varepsilon\} \subset \{f^* > \varepsilon\}$, откуда

$$|\{\underline{D}_B(f^*, \cdot) < f^* - \varepsilon\}| \leq |\{f^* > \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} f^* < \varepsilon. \quad (1)$$

Так как плотностные базисы дифференцируют интегралы от ограниченных измеримых функций, то B дифференцирует $\int f_*$. Следовательно, с учетом (1) легко видеть, что

$$|\{\underline{D}_B(f, \cdot) < f - \varepsilon\}| = |\{\underline{D}_B(f^*, \cdot) < f^* - \varepsilon\}| < \varepsilon.$$

Откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем справедливость леммы. Лемма 2 доказана.

Ниже, ради краткости, вместо прямоугольного параллелепипеда будем писать просто прямоугольник.

Если E – центрально-симметричное множество в $\mathbb{R}^n$ с центром в x и $\alpha > 0$, то через αE будем обозначать раздутье E в α раз, т.е. множество $\{x + \alpha(t - x) : t \in E\}$.

ЛЕММА 3. Пусть E – открытое ограниченное и выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда

- а) существует прямоугольник R такой, что $R \subset E \subset n^2 R$;
- б) для каждой точки $x \in E$ существует прямоугольник R_x , гомотетичный R и с центром в x , такой, что

$$R_x \subset E \subset \frac{4n^2}{c(x, E)} R_x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Известно, что (см., например, [1, гл. VI, § 2]) найдется открытый эллипсоид T такой, что $T \subset E \subset nT$. Далее, выбирая в качестве R прямоугольник $\frac{1}{n}R'$, где R' – минимальный среди открытых прямоугольников, содержащих T и имеющих ребра, параллельные главным осям T , легко видеть, что $R \subset T \subset nR$, а следовательно, $R \subset E \subset n^2 R$.

б) В силу уже доказанного пункта а) найдется прямоугольник R такой, что

$$R \subset E \subset n^2 R. \quad (2)$$

Пусть y – центр R и $z = x - c(x, E)(y - x)$. Из выпуклости E и определения $c(x, E)$ следует, что $z \in E$. Рассмотрим гомотетию H с центром в z и с коэффициентом $c(x, E)/(1 + c(x, E))$. Так как $H(y) = x$, центром прямоугольника $H(R)$ является x . В силу выпуклости E имеем

$$H(R) \subset E. \quad (3)$$

Из (2), (3) и определения H легко видеть, что

$$E \subset n^2 R \subset n^2 \left[2 \frac{1 + c(x, E)}{c(x, E)} H(R) \right] \subset \frac{4n^2}{c(x, E)} H(R).$$

Таким образом, прямоугольник $R_x = H(R)$ удовлетворяет всем нужным условиям. Лемма доказана.

Нам понадобится следующая теорема, по существу принадлежащая Буземану и Феллеру [12] (см. также [1, гл. III, § 1]).

ТЕОРЕМА. Пусть B является измеримым базисом. Два следующих свойства эквивалентны:

- а) B есть плотностный базис;
- б) для каждого λ , $0 < \lambda < 1$, для каждой последовательности ограниченных измеримых множеств $\{A_k\}$ таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $|A_k| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и для каждой последовательности чисел $\{r_k\}$ таких, что $r_1 > r_2 > \dots$ и $r_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, имеем $|\{M_B^{(r_k)}(\chi_{A_k}) > \lambda\}| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Заметим, что это утверждение в [1] доказано при предположении буземан-феллеровости базиса B , однако, как видно из доказательства, такое требование нужно только ради обеспечения измеримости $\overline{D}_B(f, \cdot)$, $\underline{D}_B(f, \cdot)$ и $M_B^{(r)}(f)$. Так что утверждение справедливо и для любых измеримых базисов.

Пусть B – базис со свойствами 1)–3) из теоремы 1 и пусть для каждого $E \in B(O)$ с $\text{diam } E = 1$ R_E – прямоугольник такой, что $R_E \subset E \subset n^2 R_E$ (такой прямоугольник существует в силу леммы 3). Рассмотрим семейство Δ всех множеств вида $(T \circ H)(R_E)$, где T – некоторый сдвиг, H – некоторая гомотетия с центром в O , $E \in B(O)$ и $\text{diam } E = 1$. Через B^* обозначим базис, определенный следующим образом:

$$B^*(x) = \{R : R \in \Delta, R \ni x\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для B и B^* справедлива

ЛЕММА 4. а) B^* является буземан-феллеровским плотностным базисом, инвариантным относительно сдвига и гомотетии.

б) Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$,

$$\overline{D}_B(f, \cdot) \leq \left(\frac{12n^2}{\varepsilon}\right)^n \overline{D}_{B^*}(f, \cdot) \quad \text{и} \quad \overline{D}_{B^*}(f, \cdot) \leq \left(\frac{12n^2}{\varepsilon}\right)^n \overline{D}_B(f, \cdot).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, B^* является буземан-феллеровским базисом, инвариантным относительно сдвига и гомотетии.

Из свойств B и определения B^* с учетом леммы 3 нетрудно проверить, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

- i) для каждого $E \in B(x)$ найдется $R \in B^*(x)$ и сдвиг T такие, что $T(R) \subset E \subset (12n^2/\varepsilon)R$;
- ii) для каждого $R \in B^*(x)$ найдется $E \in B(x)$ и сдвиг T такие, что $R \subset 3E$ и $E \subset (4n^2/\varepsilon)T(R)$.

Из i) и ii) заключаем, что для каждых $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$

$$M_B^{(r)}(f)(x) \leq \left(\frac{12n^2}{\varepsilon}\right)^n M_{B^*}^{((12n^2/\varepsilon)r)}(f)(x), \quad (4)$$

$$M_{B^*}^{(r)}(f)(x) \leq \left(\frac{12n^2}{\varepsilon}\right)^n M_B^{((12n^2/\varepsilon)r)}(f)(x). \quad (5)$$

Из (4) и (5) вытекают нужные нам оценки для верхних производных.

И, наконец, из (5) в силу вышеотмеченной теоремы Буземана и Феллера заключаем, что B^* является плотностным базисом. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть базис B^* определен так же, как в лемме 4. Очевидно, B^* удовлетворяет всем условиям теоремы Гусмана и Менаргеса, поэтому B^* имеет слабое свойство Безиковича.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$. В силу лемм 1 и 2

$$\underline{D}_B(f, x) = \underline{D}_{B^*}(f, x) = f(x) \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Обозначим $A_1 = \{x : \overline{D}_{B^*}(f, x) = \infty\}$, $A_2 = \{x : \overline{D}_{B^*}(f, x) = f(x)\}$. Из леммы 1 и из того, что B^* имеет слабое свойство Безиковича, заключаем

$$|\mathbb{R}^n \setminus (A_1 \cup A_2)| = 0. \quad (7)$$

На основании леммы 4 пишем

$$\overline{D}_B(f, x) = \overline{D}_{B^*}(f, x) = \infty \quad \text{при } x \in A_1. \quad (8)$$

Теперь покажем, что

$$\overline{D}_B(f, x) = \overline{D}_{B^*}(f, x) = f(x) \quad \text{почти всюду на } A_2. \quad (9)$$

Рассмотрим произвольное $\delta > 0$. Число α подберем так, чтобы

$$\frac{1}{\delta} \left(\frac{12n^2}{\varepsilon} \right)^n \int_{\{f > \alpha\}} f < \delta,$$

где $\varepsilon > 0$ – число из леммы 4. Обозначим $f^* = f\chi_{\{f > \alpha\}}$, $f_* = f\chi_{\{f \leq \alpha\}}$. Так как B^* является плотностным, то B^* дифференцирует $\int f_*$, откуда с учетом леммы 4 легко видеть, что

$$\begin{aligned} |\{x \in A_2 : \delta < \overline{D}_B(f^*, x)\}| &\leq \left| \left\{ x \in A_2 : \delta < \left(\frac{12n^2}{\varepsilon} \right)^n D_{B^*}(f^*, x) \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ x \in A_2 : \delta < \left(\frac{12n^2}{\varepsilon} \right)^n f^*(x) \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{12n^2}{\varepsilon} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f^* < \delta. \end{aligned} \quad (10)$$

Базис B является плотностным, поэтому B дифференцирует $\int f_*$. Следовательно, из (10) пишем

$$\begin{aligned} |\{x \in A_2 : f(x) + \delta < \overline{D}_B(f, x)\}| \\ \leq |\{x \in A_2 : f^*(x) + \varepsilon < \overline{D}_B(f^*, x)\}| + |\{x \in A_2 : f_*(x) < \overline{D}_B(f_*, x)\}| < \delta + 0 = \delta. \end{aligned}$$

Этим, очевидно, (9) доказано.

Из (6)–(9) заключаем справедливость теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При доказательстве теоремы 1 мы дополнительно установили, что существует инвариантный относительно сдвига и гомотетии буземан-феллеровский базис B^* , образованный из n -мерных прямоугольников, который положительно эквивалентен B .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Можно доказать следующую теорему, которая выражает общий принцип, которым мы пользовались для доказательства теоремы 1.

ТЕОРЕМА. Пусть B – плотностный базис, B^* имеет слабое свойство Безиковича и для каждой $f \in L(\mathbb{R}^n)$

$$\underline{D}_B(f, x) \leq f(x) \leq \overline{D}_B(f, x) \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R}^n.$$

Если, кроме того, для каждой $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, найдется $c = c(f) \geq 1$ такое, что для каждого $\lambda > 0$

$$|\{\overline{D}_B(f, \cdot) > \lambda\}| \leq c \left| \left\{ \overline{D}_{B^*}(f, \cdot) > \frac{\lambda}{c} \right\} \right|, \quad |\{\overline{D}_{B^*}(f, \cdot) > \lambda\}| \leq c \left| \left\{ \overline{D}_B(f, \cdot) > \frac{\lambda}{c} \right\} \right|,$$

то B положительно эквивалентен B^* и, следовательно, имеет слабое свойство Безиковича.

Приведенные ниже леммы нам понадобятся для доказательства теоремы 2.

Всюду ниже мы рассматриваем двумерные интервалы.

Пусть для интервала I :

- α_I – длина большей стороны I , β_I – длина меньшей стороны I и $r(I)$ – коэффициент регулярности I , т.е. число α_I/β_I ;
- $\Lambda(I, h)$, $h > 1$, – семейство всех интервалов J со свойствами: $J \supset I$, $|J| = h|I|$ и одна из вершин J совпадает с одной из вершин I ;

$$R(I, h) = (3 \operatorname{pr}_1 I \times (2h - 1) \operatorname{pr}_2 I) \cup ((2h - 1) \operatorname{pr}_1 I \times 3 \operatorname{pr}_2 I), \quad h > 1,$$

где pr_1 и pr_2 – проекции в $\mathbb{R}^2$.

Ниже вместо $\mathbb{I}(\mathbb{R}^2)$ будем писать просто $\mathbb{I}$.

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

ЛЕММА 5. Пусть $I = [\alpha_1, \alpha_1] \times [-\alpha_2, \alpha_2]$, где $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ и $h > 1$. Тогда

- 1) $\{M_{\mathbb{I}}(h\chi_I) > 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x^1| < (2h - 1)\alpha_1, |x^2| < (2h - 1)\alpha_2, (|x^1| + \alpha_1) \times (|x^2| + \alpha_2) < 4h\alpha_1\alpha_2\}$;
- 2) $\{M_{\mathbb{I}}(h\chi_I) > 1\} \subset (2h - 1)I$;
- 3) $|\{M_{\mathbb{I}}(h\chi_I) > 1\}| = (4h \ln h + 1)|I|$.

Учитывая лемму 5, нетрудно убедиться, что справедлива

ЛЕММА 6. Пусть I – интервал и $h > 1$. Тогда

$$\{M_{\mathbb{I}}(h\chi_I) > 1\} = \bigcup_{J \in \Lambda(I, h)} J.$$

ЛЕММА 7. Пусть I – интервал и $h > 1$. Тогда для каждого $J \in \Lambda(I, h)$

$$\frac{r(I)}{h} \leq r(J) \leq hr(I).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $I \subset J$ и $|J| = h|I|$, то $\beta_J \geq \beta_I$ и $\alpha_J \geq \alpha_I$, $r(J)\beta_J^2 = hr(I)\beta_I^2$ и $\alpha_J^2/r(J) = h\alpha_I^2/r(I)$. Откуда получаем, что $r(J) \leq hr(I)$ и $r(J) \geq r(I)/h$.

ЛЕММА 8. Пусть I и J – интервалы и $h > 1$. Если

$$r(J) \notin \left[\frac{r(I)}{h}, hr(I) \right] \quad \text{и} \quad \frac{h|J \cap I|}{|J|} > 1,$$

то $J \subset R(I, h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $|J| < h|I|$. Таким образом, $\alpha_J^2/r(J) < h\alpha_I^2/r(I)$ и $r(J)\beta_J^2 < hr(I)\beta_I^2$, откуда в силу того, что $r(J) \notin [r(I)/h, hr(I)]$, получаем

$$\alpha_J < \alpha_I \quad \text{или} \quad \beta_J < \beta_I,$$

откуда, в свою очередь, с учетом того, что $J \cap I \neq \emptyset$ и $\{M_{\mathbb{I}}(h\chi_I) > 1\} \subset (2h-1)I$ (см. лемму 5), заключаем $J \subset R(I, h)$.

ЛЕММА 9. Пусть I – интервал, $h > 1$ и пусть $J \in \Lambda(I, h)$, $x \in J$ и $x \notin 3I$. Тогда для каждой гомотетии H с центром в x справедливо неравенство

$$\frac{h|H(J) \cap I|}{|H(J)|} \leq 4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – коэффициент гомотетии H .

1. Если $\alpha \geq 1$, то $|H(J)| \geq |J| = h|I|$; следовательно,

$$\frac{h|H(J) \cap I|}{|H(J)|} \leq 1.$$

2. Если $1/2 \leq \alpha < 1$, то $|H(J)| \geq |J|/4 = h|I|/4$; следовательно,

$$\frac{h|H(J) \cap I|}{|H(J)|} \leq 4.$$

3. Если же $\alpha < 1/2$, то легко видеть, что $H(J) \cap I = \emptyset$, и, следовательно,

$$\frac{h|H(J) \cap I|}{|H(J)|} = 0.$$

Через $\overline{L}(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс всех функций $f \in L(\mathbb{R}^n)$, для каждой из которых при любом $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная на $\mathbb{R}^n$ функция $g \in L(\mathbb{R}^n)$ такая, что $|g(x)| \leq |f(x)|$ п.в. на $\mathbb{R}^n$ и $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

Следующее утверждение является частным случаем одной леммы из [13] (см. также [11, с. 52]).

ЛЕММА 10. Пусть $f_k \in \overline{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ и пусть при $k, m \in \mathbb{N}$ и $k \neq m$ выполнены условия

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f_k \cap \operatorname{supp} f_m &= \emptyset, & \operatorname{supp} f_k \cap \{M_{\mathbb{I}}(f_m) > \lambda\} &= \emptyset, \\ \{M_{\mathbb{I}}(f_k) > \lambda\} \cap \{M_{\mathbb{I}}(f_m) > \lambda\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left\{ M_{\mathbb{I}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) > \lambda \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{M_{\mathbb{I}}(f_k) > \lambda\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\{h_k\}$ – последовательность со свойствами

$$1 < h_1 < h_2 < \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h_k} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln h_k}{h_k} = \infty. \quad (11)$$

Рассмотрим также возрастающие последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ такие, что

$$n_k < m_k, \quad (12)$$

$$\frac{1}{2^{n_{k+1}}} < \frac{1}{h_k 2^{m_{k+1}}}, \quad (13)$$

$$2^{m_{k+1}-n_{k+1}} > h_{k+1} h_k 2^{m_k-n_k}. \quad (14)$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ разобьем $\mathbb{G}^2$ на $q_k = 2^{n_k+m_k}$ конгруэнтных интервалов $Q_{k,q}$, $q \in \overline{1, q_k}$, длины горизонтальных сторон которых равны $1/2^{n_k}$, а длины вертикальных сторон – $1/2^{m_k}$. При $k \in \mathbb{N}$, $q \in \overline{1, q_k}$ обозначим

$$I_{k,q} = \frac{1}{2h_k} Q_{k,q}, \quad S_{k,q} = \{M_{\mathbb{I}}(h\chi_{I_{k,q}}) > 1\}.$$

Согласно лемме 6

$$S_{k,q} = \bigcup_{J \in \Lambda(I_{k,q}, h_k)} J.$$

Положим

$$\tilde{S}_{k,q} = \bigcup_{J \in \Lambda(I_{k,q}, h_k)} \frac{1}{2} J.$$

Если $\{I_t\}_{t \in \Delta}$ – произвольное семейство n -мерных интервалов и $\alpha \geq 1$, то, учитывая очевидное включение

$$\bigcup_{t \in \Delta} \alpha I_t \subset \left\{ M_{\mathbb{I}}(\chi_E) > \frac{1}{\alpha} \right\},$$

где $E = \bigcup_{t \in \Delta} I_t$, из известного неравенства Йессена–Марцинкевича–Зигмунда [14] (см. также [1, гл. II, § 3, замечание (3)]) пишем

$$\left| \bigcup_{t \in \Delta} \alpha I_t \right| \leq c(\alpha) \left| \bigcup_{t \in \Delta} I_t \right|,$$

где $c(\alpha)$ зависит от n и α . С учетом этого факта заключаем, что $|\tilde{S}_{k,q}| \geq |S_{k,q}|/c(\alpha)$.

В силу леммы 5 имеем $S_{k,q} \subset (2h_k - 1)I_{k,q} \subset Q_{k,q}$, $|S_{k,q}| > h_k \ln h_k |I_{k,q}|$. Следовательно, при $k \in \mathbb{N}$ пишем

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{q=1}^{q_k} \tilde{S}_{k,q} \right| &= \sum_{q=1}^{q_k} |\tilde{S}_{k,q}| \geq \sum_{q=1}^{q_k} \frac{1}{c(\alpha)} |S_{k,q}| > \sum_{q=1}^{q_k} \frac{1}{c(\alpha)} h_k \ln h_k |I_{k,q}| \\ &= \sum_{q=1}^{q_k} \frac{1}{c(\alpha)} h_k \ln h_k \frac{|Q_{k,q}|}{4h_k^2} = \frac{\ln h_k}{4c(\alpha)h_k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим те интервалы $Q_{k+1,q}$, $q \in \overline{1, q_{k+1}}$, которые содержатся в $\bigcup_{q=1}^{q_k} \tilde{S}_{k,q}$ и их объединение обозначим через O_k . Легко видеть, что если $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ достаточно быстро стремятся к ∞ , то

$$|O_k| \geq \frac{1}{2} \left| \bigcup_{q=1}^{q_k} \tilde{S}_{k,q} \right|. \quad (16)$$

Будем считать, что $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ подобраны так, что выполняется (16). Легко убедиться, что $\{O_k\}$ является последовательностью независимых множеств. Следовательно, из (11), (15) и (16) в силу леммы Бореля–Кантелли заключаем: $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} O_k$ имеет полную меру в $\mathbb{G}^2$. Тем более

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{q=1}^{q_k} \tilde{S}_{k,q} \quad \text{имеет полную меру в } \mathbb{G}^2. \quad (17)$$

Пусть для $x \in \tilde{S}_{k,q}$ $\Delta_k(x) = \{I \in \Lambda(I_{k,q}, h_k) : I \ni x\}$ и пусть $B_k(x)$ – семейство всех интервалов вида $H(I)$, где H – гомотетия с центром в x и $I \in \Delta_k(x)$. Обозначим

$$N(x) = \left\{ k \in \mathbb{N} : x \in \bigcup_{q=1}^{q_k} \tilde{S}_{k,q} \right\}, \quad x \in \mathbb{G}^2.$$

Теперь базис B определим следующим образом:

$$B(x) = \begin{cases} \bigcup_{k \in N(x)} B_k(x) & \text{при } x \in \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{q=1}^{q_k} \tilde{S}_{k,q}, \\ \mathbb{I}(x) & \text{при } x \notin \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{q=1}^{q_k} \tilde{S}_{k,q}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что B является инвариантным относительно гомотетии и центрированным.

Положим

$$f_k = \sum_{q=1}^{q_k} h_k \chi_{I_{k,q}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. При $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|f_k\|_1 = h_k \left| \bigcup_{q=1}^{q_k} I_{k,q} \right| = h_k \sum_{q=1}^{q_k} \frac{|Q_{k,q}|}{4h_k^2} = \frac{1}{4h_k},$$

откуда в силу (11) заключаем, что $f \in L(\mathbb{G}^2)$.

Очевидно, B дифференцирует $\int f_k$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. множество A_k , состоящие из всех точек x , для которых $D_B(\int f_k, x) = f_k(x)$, имеет полную меру в $\mathbb{R}^2$.

Обозначим

$$A = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \cap \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{q=1}^{q_k} \tilde{S}_{k,q} \right) \setminus \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} R(I_{k,q}, h_k).$$

Нетрудно видеть, что

$$\left| \bigcup_{q=1}^{q_k} R(I_{k,q}, h_k) \right| \leq 12h_k \sum_{q=1}^{q_k} |I_{k,q}| = 12h_k \sum_{q=1}^{q_k} \frac{|Q_{k,q}|}{4h_k^2} = \frac{3}{h_k}.$$

Следовательно, в силу (11)

$$\left| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{q=1}^{q_k} R(I_{k,q}, h_k) \right| = 0,$$

откуда на основании (17) заключаем, что A имеет полную меру в $\mathbb{G}^2$.

Пусть $x \in A$. Ясно, что найдется $k_x \in \mathbb{N}$, для которого

$$x \notin \bigcup_{q=1}^{q_k} R(I_{k,q}, h_k) \quad \text{при } k > k_x. \quad (18)$$

Очевидно, при $\text{diam } I \rightarrow 0$, $I \in B(x)$

$$\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{k=1}^{k_x} f_k \rightarrow \sum_{k=1}^{k_x} f_k(x) = f(x). \quad (19)$$

Рассмотрим произвольный интервал $I \in B(x)$. Обозначим

$$k(I) = \min \left\{ k > k_x : I \cap \bigcup_{q=1}^{q_k} I_{k,q} \neq \emptyset \right\}.$$

Пусть $q \in \overline{1, q_{k(I)}}$ такова, что x принадлежит замыканию $Q_{k(I),q}$. Тогда, учитывая, что $S_{k(I),\nu}$, $\nu \in \overline{1, q_{k(I)}}$, попарно не пересекаются, на основании леммы 10 заключаем

$$\frac{1}{|I|} \int_I (f_{k(I)} - h_k \chi_{I_{k(I),q}}) \leq 1. \quad (20)$$

Если $x \in S_{k(I),q}$ и $I \in B_{k(I)}(x)$, то, учитывая (18) и лемму 9, напишем

$$\frac{h|I \cap I_{k(I),q}|}{|I|} \leq 4. \quad (21)$$

Если же $I \in B_k(x)$, где $k \neq k_x$, то, заметив $r(I_{k,q}) = 2^{m_k - n_k}$, из определения $B_k(x)$ и из леммы 7 нетрудно видеть, что

$$r(I) \in \left[\frac{2^{m_k - n_k}}{h_k}, h_k 2^{m_k - n_k} \right].$$

Следовательно, на основании (14) пишем

$$r(I) \notin \left[\frac{2^{m_{k(I)} - n_{k(I)}}}{h_{k(I)}}, h_{k(I)} 2^{m_{k(I)} - n_{k(I)}} \right],$$

откуда, учитывая, что $x \notin R(I_{k(I),q}, h_k)$ (см. (18)), в силу леммы 8 заключаем

$$\frac{h|I \cap I_{k(I),q}|}{|I|} \leq 1. \quad (22)$$

Из (20)–(22) следует, что

$$\frac{1}{|I|} \int_I f_{k(I)} \leq 5. \quad (23)$$

Так как $x \in I$ и $x \notin R(I_{k(I),q}, h_k)$, то $\beta_I \geq \beta_{I_{k(I),q}} = 1/h_{k(I)} 2^{m_{k(I)}+1}$, откуда в силу (12) и (13)

$$\beta_I \geq \frac{1}{2^{n_k}} = \alpha_{I_{k,q}} \quad \text{при } k > k(I) \text{ и } q \in \overline{1, q_k}. \quad (24)$$

Пусть P_k , $k \in \mathbb{N}$, – множество всех вершин интервалов $Q_{k,q}$, $q \in \overline{1, q_k}$. Тогда в силу (24) при $k > k(I)$ найдется интервал J с вершинами, принадлежащими P_k , такой, что $I \subset J \subset 3I$, откуда, учитывая очевидное равенство

$$\left| J \cap \bigcup_{q=1}^{q_k} I_{k,q} \right| = |J| \left| \bigcup_{q=1}^{q_k} I_{k,q} \right|,$$

напишем

$$\left| I \cap \bigcup_{q=1}^{q_k} I_{k,q} \right| \leq 9|I| \left| \bigcup_{q=1}^{q_k} I_{k,q} \right|.$$

Следовательно, для каждой $k > k(I)$

$$\frac{1}{|I|} \int_I f_k = \frac{1}{|I|} h_k \left| I \cap \bigcup_{q=1}^{q_k} I_{k,q} \right| \leq 9h_k \left| \bigcup_{q=1}^{q_k} I_{k,q} \right| = 9\|f_k\|_1.$$

Стало быть,

$$\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{k > k(I)} f_k \leq \sum_{k > k(I)} 9\|f_k\|_1 \leq 9\|f\|_1. \quad (25)$$

Очевидно также, что

$$\int_I f_k = 0 \quad \text{при } k_x < k < k(I). \quad (26)$$

Из (19), (23), (25) и (26) легко заключаем

$$\overline{D}_B(f, x) \leq f(x) + 5 + 9\|f\|_1. \quad (27)$$

Так как $x \in A$, найдутся последовательности $\{k(j)\}$, $k(j) \rightarrow \infty$, и $\{q(j)\}$, $1 \leq q(j) \leq q_{k(j)}$, для которых $x \in S_{k(j),q(j)}$ при каждом $j \in \mathbb{N}$. В силу леммы 6 при каждом $j \in \mathbb{N}$ найдется интервал $R_j \in \Lambda(I_{k(j),q(j)}, h_{k(j)})$, который содержит x . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \{R_j\} \subset B(x), \quad \frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} f_{k(j)} &\geq \frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} h_{k(j)} \chi_{I_{k(j),q(j)}} = 1, \\ \text{diam } I &\leq \text{diam } Q_{k(j),q(j)} < \frac{1}{2^{n_{k(j)}-1}}, \end{aligned}$$

откуда с учетом (19) легко видеть, что $\overline{D}_B(f, x) \geq f(x) + 1$. Так как A имеет полную меру в $\mathbb{G}^2$ и точка $x \in A$ была выбрана произвольно, учитывая (27) заключаем справедливость теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
- [2] Saks S. Remarks on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral // Fund. Math. 1934. V. 22. P. 257–261.
- [3] Безикович А. С. On differentiation of Lebesgue double integrals // Fund. Math. 1935. V. 25. P. 209–216.
- [4] Ward A. On the derivation of additive functions of intervals in m -dimensional space // Fund. Math. 1937. V. 28. P. 265–279.
- [5] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [6] de Guzmán M. Real Variable Methods in Fourier Analysis. V. 46. Amsterdam: North-Holland Math. Stud., 1981.
- [7] Korenovsky A., Lerner A., Stokolos A. On multidimensional F. Riesz's "rising sun" lemma // E-print [arXiv:math.CA/0308211v1](https://arxiv.org/abs/math.CA/0308211v1) (22 August), 2003.
- [8] Zerekidze T. Differentiation of integrals by bases of type Π // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2003. V. 133. P. 119–130.
- [9] Zerekidze T. On the equivalence and nonequivalence of some differential bases // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2003. V. 133. P. 166–169.
- [10] Ониани Г. Г. О возможных значениях верхней и нижней производных // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 107–114.
- [11] Ониани Г. Г. Дифференцирование интегралов Лебега. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1998.
- [12] Busemann H., Feller W. Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale // Fund. Math. 1934. V. 22. P. 226–256.
- [13] Oniani G. On strong maximal operators corresponding to different frames (II) // Georgian Math. J. 1999. V. 6. № 2. P. 149–168.
- [14] Jessen B., Marcinkiewitz J., Zygmund A. Note on the differentiability of multiple integrals // Fund. Math. 1935. V. 25. P. 217–234.

Кутаисский государственный университет им. А. Церетели, Грузия
E-mail: tava73@mail.ru

Поступило
20.01.2003