Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Бахтин, Закон повторного логарифма для решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 812–823

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:37:29

УДК 519.21

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Ю. Ю. Бахтин

Для решения одномерного уравнения Бюргерса в случае, когда начальный потенциал описывается дробовым шумом нулевого радиуса взаимодействия, устанавливается закон повторного логарифма.

Библиография: 14 названий.

При изучении поведения нелинейных волн в средах без дисперсии эталонным является многомерное уравнение Бюргерса. А именно, изучается задача Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v &= \kappa \Delta v, \\ v(0, x) &= -2\kappa \nabla \xi(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad v(t, x) \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\kappa > 0$ – параметр вязкости. Это уравнение и его аналоги описывают волновые явления различной физической природы: нелинейные акустические и оптические волны, гидродинамические потоки частиц, турбулентные явления. Оно играет центральную роль в гидродинамическом подходе к изучению неоднородного распределения материи во Вселенной. При этом по физическим соображениям наибольший интерес представляет потенциальный случай, когда $v(t, x) = \nabla \Phi(t, x)$, где ∇ – градиент по x (см., например, монографию [1] и указанную в ней библиографию).

В последние годы многочисленные исследования посвящены асимптотическому поведению решений или преобразованных решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными различных типов (см. [2]–[8] и ссылки в этих работах).

Нас будет интересовать характер флуктуаций решений одномерного ($d = 1$) уравнения Бюргерса в случае, когда начальные данные описываются процессом дробового шума. Это направление инициировано работой [2] и получило дальнейшее развитие в [3], [4], где установлена центральная предельная теорема для преобразованных решений задачи (1). Основное содержание этой работы – доказательство закона повторного логарифма, т.е. определение точных границ, описывающих с вероятностью 1 характер флуктуаций исследуемого случайного процесса, когда начальные данные задаются дробовым шумом с нулевым радиусом взаимодействия.

Нам понадобятся некоторые определения и вспомогательные утверждения.

Пусть $\mathcal{B}$ – борелевская σ -алгебра на прямой, а $\mathcal{B}_b$ – семейство ограниченных борелевских множеств. На множестве M всех мер μ , определенных на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ и конечных на ограниченных множествах, определим σ -алгебру $\mathcal{M}$, порожденную множествами $\{\mu \in M : \mu(A) \leq r\}$ для $A \in \mathcal{B}_b, r \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Случайная мера μ – измеримое отображение из вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в $(M, \mathcal{M})$. Таким образом, для любого $A \in \mathcal{B}_b$ $\mu(A)$ – неотрицательная случайная величина в обычном смысле.

Пусть $\lambda > 0$ и случайная мера μ удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) для любых непересекающихся множеств $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}_b$ случайные величины $\mu(A_1), \dots, \mu(A_m)$ независимы;
- 2) для любого множества $A \in \mathcal{B}_b$ величина $\mu(A)$ распределена так же, как $\sum_{i=1}^{\pi(A)} \eta_i$, где $\pi(A)$ – пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda|A|$ ($|A|$ – мера Лебега множества A), а $(\eta_i)_{i=1}^\infty$ – независимые неотрицательные случайные величины с одинаковой функцией распределения F , независимые от $\pi(A)$ (здесь и далее сумму, взятую по пустому множеству, считаем равной 0).

Тогда такую меру μ будем называть *дробовым шумом с нулевым радиусом взаимодействия* или *вырожденным дробовым шумом*. Ее можно построить по возрастающему и непрерывному справа процессу $(Z(x))_{x \in \mathbb{R}}$ с независимыми приращениями, для которого $E \exp(ir(Z(x) - Z(y))) = \exp(\lambda(x - y)(\varphi_\eta(r) - 1))$, где $\varphi_\eta(r) = E \exp(ir\eta_1)$.

Если $\eta_i = 1$ почти наверное, то μ – стандартная пуассоновская мера с ведущей мерой Лебега и параметром λ .

Общие процессы дробового шума рассматриваются, например, в [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть μ – дробовой шум с нулевым радиусом взаимодействия. Обозначим через $\mathcal{F}_a^b$ σ -подалгебру, порожденную случайными величинами $\mu(a', b'], (a', b'] \subset (a, b]$. Тогда для непересекающихся отрезков $(a_1, b_1]$ и $(a_2, b_2]$ подалгебры $\mathcal{F}_{a_1}^{b_1}$ и $\mathcal{F}_{a_2}^{b_2}$ независимы как порожденные независимыми случайными величинами. В частности, интегралы по непересекающимся отрезкам от неслучайных измеримых функций по вырожденному дробовому шуму независимы, если эти интегралы существуют почти наверное.

Теперь вернемся к уравнению Бюргерса. Не ограничивая общности, положим для простоты записи $\kappa = 1/2$. Тогда задача (1) в случае $d = 1$ допускает решение

$$v(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x - y}{t} \exp\left(\xi(y) - \frac{(x - y)^2}{2t}\right) dy \Big/ \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\xi(y) - \frac{(x - y)^2}{2t}\right) dy, \quad (2)$$

которое можно получить с помощью подстановки Хопфа–Коула

$$v = -\frac{\partial}{\partial x} \ln u.$$

Формальная запись $e^{\xi(x)} dy = \mu(dy)$ означает, что формула (2) принимает вид

$$v(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x - y}{t} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2t}\right) \mu(dy) \Big/ \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2t}\right) \mu(dy), \quad (3)$$

где μ – случайная мера, описывающая дробовой шум с нулевым радиусом взаимодействия.

Пусть распределение величин η_i сосредоточено на некотором отрезке $[0, M]$, $M > 0$. Интегралы в числителе и знаменателе сходятся почти наверное. Действительно, для $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{x-y}{t} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \mu(dy) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(k\delta, (k+1)\delta]} \frac{x-y}{t} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \mu(dy) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_{k, \delta}(t) \end{aligned}$$

— сумма независимых (в силу предложения 1) случайных величин. Вычисление дисперсий, проводимое ниже при доказательстве основного результата, даст

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} D X_{k, \delta}(t) < \infty.$$

Так как $\sum_{k \in \mathbb{Z}} E X_k(t) = 0$, по теореме о двух рядах (см., например, [10, с. 373]) ряд сходится почти наверное. Аналогичные рассуждения применимы и для знаменателя (3). Теперь можно сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть решение $v(t, x)$ определено формулой (3) и распределение случайных величин η_i сосредоточено на некотором отрезке $[0, M]$, $M > 0$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|v(t, x)|}{C t^{-3/4} (\ln \ln t)^{1/2}} = 1 \quad \text{почти наверное,} \quad \text{где} \quad C = \frac{(\mathbb{E} \eta^2)^{1/2}}{(2\lambda)^{1/2} \pi^{1/4} \mathbb{E} \eta}$$

(η — случайная величина с функцией распределения F).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в установлении закона повторного логарифма для числителя (3) и усиленного закона больших чисел для знаменателя (3).

ЗАМЕЧАНИЕ. В [2] при доказательстве центральной предельной теоремы для уравнения Бюргерса также отдельно рассматривались числитель и знаменатель (2). Для числителя устанавливалась асимптотическая гауссовость, а для знаменателя — закон больших чисел. Здесь нам требуется именно усиленная версия закона больших чисел.

Сначала рассмотрим числитель (3).

Пусть $x = 0$, что не ограничивает общности рассуждений. Итак, положим для $\Delta > 0$

$$V(t) = \int_{\mathbb{R}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \mu(dx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(k\Delta, (k+1)\Delta]} x \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \mu(dx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_{k, \Delta}(t).$$

Отметим, что семинварианты $V(t)$ распадаются в сумму соответствующих семинвариантов $X_{k, \Delta}(t)$, так как в силу предложения 1 $X_{k, \Delta}(t)$ независимы при различных k .

Для вычисления семинвариантов $\gamma_\nu(V(t))$, $\nu \in \mathbb{N}$, оценим сначала моменты $X_{k, \Delta}(t)$. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{X}_{k, \Delta}(t) &= a_{k, \Delta}^-(t) \mu(k\Delta, (k+1)\Delta], \quad \text{где} \quad a_{k, \Delta}^-(t) = \inf_{x \in (k\Delta, (k+1)\Delta]} x \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \\ \hat{X}_{k, \Delta}(t) &= a_{k, \Delta}^+(t) \mu(k\Delta, (k+1)\Delta], \quad \text{где} \quad a_{k, \Delta}^+(t) = \sup_{x \in (k\Delta, (k+1)\Delta]} x \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right). \end{aligned}$$

Тогда, полагая $A_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} x \exp(-x^2/(2t))$,

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{E}\bar{X}_{k,\Delta}^\nu(t) - \mathbb{E}X_{k,\Delta}^\nu(t)| &\leq |\mathbb{E}\bar{X}_{k,\Delta}^\nu(t) - \hat{X}_{k,\Delta}^\nu(t)| \\
 &\leq |a_{k,\Delta}^+(t)^\nu - a_{k,\Delta}^-(t)^\nu| \mathbb{E}\mu(k\Delta, (k+1)\Delta)^\nu \\
 &\leq |a_{k,\Delta}^+(t) - a_{k,\Delta}^-(t)| \sup_{|y| \leq A_0} |\nu y^{\nu-1}| \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda\Delta} \frac{(\lambda\Delta)^m}{m!} (mM)^\nu \\
 &\leq |a_{k,\Delta}^+(t) - a_{k,\Delta}^-(t)| A_1(\nu, \lambda, M, t) \Delta
 \end{aligned} \tag{4}$$

при малых Δ ($\Delta \leq \Delta_0(\nu)$).

Из формулы (см. [11, с. 20])

$$\gamma_\nu(\xi) = \nu! \sum (-1)^{r_\nu-1} (r_\nu - 1)! \prod_{l=1}^{\nu} \frac{1}{m_l!} \left(\frac{\alpha_l(\xi)}{l!} \right)^{m_l}, \tag{5}$$

связывающей моменты α_l и семиинварианты γ_ν случайной величины ξ ($r_\nu = m_1 + m_2 + \dots + m_\nu$, а суммирование производится по целым неотрицательным решениям уравнения $m_1 + 2m_2 + \dots + \nu m_\nu = \nu$), и из (4) следует, что для малых Δ ($\Delta \leq \Delta_1(\nu)$)

$$|\gamma_\nu(\bar{X}_{k,\Delta}(t)) - \gamma_\nu(X_{k,\Delta}(t))| \leq A_2(\nu, \lambda, M, t) |a_{k,\Delta}^+(t) - a_{k,\Delta}^-(t)| \Delta,$$

так как в многочлене от $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$, стоящем в правой части (5), только одно слагаемое имеет первую степень: α_ν . Остальные члены имеют степень не меньше 2 и в сумме дают величину порядка $O(\Delta^2)$. Пусть $h\delta = \Delta$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \left| \gamma_\nu(X_{k,\Delta}(t)) - \sum_{l=k h}^{(k+1)h-1} \gamma_\nu(\bar{X}_{l,\delta}(t)) \right| &\leq A_2(\nu, \lambda, M, t) \sum_{l=k h}^{(k+1)h-1} |a_{l,\delta}^+(t) - a_{l,\delta}^-(t)| \delta \\
 &\leq A_2(\nu, \lambda, M, t) D(t) \delta,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $D(t)$ — полная вариация функции $x \exp(-x^2/(2t))$ на прямой ($D(t) < \infty$).

Далее,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\bar{X}_{l,\delta}^\nu(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda\delta} \frac{(\lambda\delta)^m}{m!} a_{l,\delta}^-(t)^\nu \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{\pi(A)} \eta_i \right)^\nu \middle| \pi(A) = m \right) \\
 &\leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda\delta} \frac{(\lambda\delta)^m}{m!} (mM |a_{l,\delta}^-(t)|)^\nu \leq A_3(\nu, \lambda, M, t) \delta
 \end{aligned}$$

для малых δ ($\delta \leq \delta_0(\nu)$).

Поэтому из формулы (5) следует, что

$$|\gamma_\nu(\bar{X}_{l,\delta}(t)) - \mathbb{E}\bar{X}_{l,\delta}^\nu(t)| \leq A_4(\nu, \lambda, M, t) \delta^2. \tag{7}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \bar{X}_{l,\delta}^\nu(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda\delta} \frac{(\lambda\delta)^m}{m!} a_{l,\delta}^-(t)^\nu \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{\pi(A)} \eta_i \right)^\nu \middle| \pi(A) = m \right) \\ &= e^{-\lambda\delta} \lambda \delta \mathbb{E} \bar{\eta}_1^\nu a_{l,\delta}^-(t)^\nu + \sum_{m=2}^{\infty} e^{-\lambda\delta} \frac{(\lambda\delta)^m}{m!} a_{l,\delta}^-(t)^\nu \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{\pi(A)} \bar{\eta}_i \right)^\nu \middle| \pi(A) = m \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В равенстве (8) сумма $\sum_{m=2}^{\infty}$ не превосходит по модулю

$$S_\delta = \sum_{m=2}^{\infty} e^{-\lambda\delta} \frac{(\lambda\delta)^m}{m!} (mM|a_{l,\delta}^-(t)|)^\nu \leq A_5(\nu, \lambda, M, t)\delta^2 \quad (9)$$

при малых δ ($\delta \leq \delta_1(\nu)$). Теперь из (6)–(9) следует, что

$$\left| \gamma_\nu(X_{k,\Delta}(t)) - \lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^\nu \sum_{l=k h}^{(k+1)h-1} a_{l,\delta}^-(t)^\nu \delta \right| \leq A_6(\nu, \lambda, M, t, \Delta) \delta$$

при малых δ , $\delta \leq \min(\delta_0(\nu), \delta_1(\nu))$. Поэтому

$$\lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^\nu \sum_{l=k h}^{(k+1)h-1} a_{l,\delta}^-(t)^\nu \delta \rightarrow \gamma_\nu(X_{k,\Delta}(t)) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Однако,

$$\sum_{l=k h}^{(k+1)h-1} a_{l,\delta}^-(t)^\nu \delta$$

является интегральной суммой для непрерывной функции $x^\nu \exp(-x^2\nu/(2t))$. Поэтому

$$\gamma_\nu(X_{k,\Delta}(t)) = \lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^\nu \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} x^\nu \exp\left(-\frac{x^2\nu}{2t}\right) dx.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \gamma_\nu(V(t)) &= \lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^\nu \int_{\mathbb{R}} x^\nu \exp\left(-\frac{x^2\nu}{2t}\right) dx \\ &= \begin{cases} \lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^{2n} \sqrt{2\pi \frac{t}{2n}} (2n-1)!! \left(\frac{t}{2n}\right)^n, & \text{если } \nu = 2n, \\ 0, & \text{если } \nu = 2n-1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \\ \gamma_\nu\left(\frac{V(t)}{t^{3/4}}\right) &= \begin{cases} \lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^{2n} \sqrt{2\pi} (2n-1)!! \frac{t^{(1-n)/2}}{(2n)^{n+1/2}}, & \text{если } \nu = 2n, \\ 0, & \text{если } \nu = 2n-1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{irV(t)/t^{3/4}} &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^{2n} \sqrt{2\pi} \frac{t^{(1-n)/2} r^{2n}}{(2n)^{n+1/2} (2n)!!}\right) \\ &= \exp\left(-\lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^2 \sqrt{2\pi} \frac{r^2}{2^{3/2} 2}\right) \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^{2n} \sqrt{2\pi} \frac{t^{(1-n)/2} r^{2n}}{(2n)^{n+1/2} (2n)!!}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

При $|rM| \leq t^{1/8}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^{2n} \sqrt{2\pi} \frac{t^{(1-n)/2} r^{2n}}{(2n)^{n+1/2} (2n)!!} \right| &\leq r^4 M^4 \lambda \sqrt{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{(1-n)/2} |rM|^{2n-4}}{(2n)^{n+1/2} (2n)!!} \\ &= r^4 M^4 \lambda \sqrt{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{(1-n)/2} t^{n/4-1/2}}{(2n)^{n+1/2} (2n)!!} = r^4 M^4 \lambda \sqrt{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{-n/4}}{(2n)^{n+1/2} (2n)!!} \\ &= r^4 M^4 \lambda \sqrt{2\pi} t^{-1/2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{1/2-n/4}}{(2n)^{n+1/2} (2n)!!}. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как в правой части формулы (11) сумма представляет собой степенной ряд от $t^{-1/4}$ с бесконечным радиусом сходимости, при $t > 1$ она не превосходит некоторой константы A_7 . Итак, при $|rM| \leq t^{1/8}$ и $t > 1$

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^{2n} \sqrt{2\pi} \frac{t^{(1-n)/2} r^{2n}}{(2n)^{n+1/2} (2n)!!} \right| \leq A_8 t^{-1/2} (rM)^4. \quad (12)$$

Из (10) и (12) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} e^{irV(t)/t^{3/4}} - \exp\left(-\lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^2 \sqrt{2\pi} \frac{r^2}{2^{3/2} 2}\right) \right| &\leq \exp\left(-\lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^2 \sqrt{2\pi} \frac{r^2}{2^{3/2} 2}\right) (|1 - e^{A_8 t^{-1/2} (rM)^4}| \vee |1 - e^{-A_8 t^{-1/2} (rM)^4}|) \\ &\leq A_9 t^{-1/2} (rM)^4 \exp\left(-\lambda \mathbb{E} \bar{\eta}_1^2 \sqrt{2\pi} \frac{r^2}{2^{3/2} 2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

для $|rM| \leq t^{1/8}$ и $t > 1$.

Воспользуемся теперь следующим утверждением (см. [11, с. 154]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $F(x)$ – неубывающая ограниченная функция, $G(x)$ – дифференцируемая функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, $f(t)$ и $g(t)$ – соответствующие им преобразования Фурье–Стилтьеса, $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$, T – произвольное положительное число. Пусть $\sup_x |G'(x)| \leq C$. Тогда для любого числа $b > 1/(2\pi)$ имеет место неравенство

$$\sup |F(x) - G(x)| \leq b \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + r(b) \frac{C}{T},$$

где $r(b)$ – положительная постоянная, зависящая только от b .

Пусть $F(x) = P\{V(t)/t^{3/4} \leq x\}$, $G(x)$ – функция распределения нормальной $(0, \lambda \times E\bar{\eta}_1^2 \sqrt{2\pi}/2^{3/2})$ случайной величины $T = t^{1/8}/M$. Тогда в силу предложения 2 существуют постоянные A_{10} и A_{11} такие, что

$$\begin{aligned} & \sup \left| P \left\{ \frac{V(t)}{t^{3/4}} \leq x \right\} - G(x) \right| \\ & \leq A_{10} \int_{-t^{1/8}/M}^{t^{1/8}/M} \left| \frac{1}{r} \left(E e^{irV(t)/t^{3/4}} - \exp \left(-\lambda E\bar{\eta}_1^2 \sqrt{2\pi} \frac{r^2}{2^{3/2}} \right) \right) \right| dr + \frac{A_{11}}{t^{1/8}} \\ & \leq A_{10} A_9 M^4 t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |r|^3 \exp \left(-\lambda E\bar{\eta}_1^2 \sqrt{2\pi} \frac{r^2}{2^{3/2}} \right) dr + \frac{A_{11}}{t^{1/8}} \leq \frac{A_{12}}{t^{1/8}}. \end{aligned}$$

Пусть Φ – функция распределения нормальной $(0, 1)$ случайной величины. Положим $\lambda \times E\bar{\eta}_1^2 \sqrt{2\pi}/2^{3/2} = \sigma^2$. Тогда в силу предложения 2

$$\sup |P\{V(t) \leq xt^{3/4}\sigma\} - \Phi(x)| \leq \frac{A_{12}}{t^{1/8}}. \quad (14)$$

Обозначим $B_t = t^{3/2}\sigma^2$, $\chi_t = \sqrt{2B_t \ln \ln B_t}$. Так как $B_t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, из (14) и асимптотической эквивалентности

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (15)$$

можно получить, что для любых $b, c > 0$ и достаточно больших t

$$(\ln B_t)^{-(1+c)b^2} \leq P\{V(t) \geq b\chi_t\} \leq (\ln B_t)^{-b^2}. \quad (16)$$

Для получения максимального неравенства для $V(t)$ докажем лемму об интегралах по ассоциированной случайной мере. Следуя [12], будем называть случайную меру μ на пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *ассоциированной*, если для любых множеств $B_1, \dots, B_p$ из $\mathcal{B}_b$ случайные величины $\mu(B_1), \dots, \mu(B_p)$ образуют ассоциированный вектор. Напомним, что случайный вектор $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ называется *ассоциированным*, если для любых по-координатно неубывающих действительных функций $f, g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ из конечности ковариации $\text{cov}(f(\xi_1, \dots, \xi_p), g(\xi_1, \dots, \xi_p))$ следует ее неотрицательность (см. [13]).

ЛЕММА. Пусть $\mathbb{R} = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1, X_2 \in \mathcal{B}$. Пусть мера μ ассоциирована, и для любых $B_1 \subset X_1$ и $B_2 \subset X_2$ ($B_1, B_2 \in \mathcal{B}_b$) $\text{cov}(\mu(B_1), \mu(B_2)) = 0$. Пусть каждая из функций $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, сохраняет знак на X_1 и X_2 , причем $\text{sign } f_i = \text{sign } f_j$ для любых i, j . Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x) \mu(dx), \quad \dots, \quad \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \mu(dx)$$

образуют ассоциированный вектор, если эти интегралы существуют почти наверное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из некоррелированности ассоциированных случайных величин следует их независимость. Значит, для любых $B_1 \subset X_1, B_2 \subset X_2$ случайные величины $\mu(B_1)$ и $\mu(B_2)$ независимы. Пусть

$$f_i^{(m)}(x) = \sum_k b_{i,k}^{(m)} \mathbf{1}_{\{x \in B_{i,k,m}\}} + \sum_l c_{i,l}^{(m)} \mathbf{1}_{\{x \in C_{i,l,m}\}} \rightarrow f_i(x)$$

для каждого $x \in \mathbb{R}$, где все $B_{i,k,m} \in X_1$, а все $C_{i,l,m} \in X_2$, $\text{sign } b_{i_1,k_1}^{(m_1)} = \text{sign } b_{i_2,k_2}^{(m_2)}$, $\text{sign } c_{i_1,l_1}^{(m_1)} = \text{sign } c_{i_2,l_2}^{(m_2)}$ для любых $i_1, i_2, k_1, k_2, m_1, m_2, l_1, l_2$. Тогда случайные величины

$$\left\{ \left| \int_{X_1} f_i^{(m)}(x) \mu(dx) \right| \right\}_{i=1}^n, \quad \left\{ \left| \int_{X_2} f_i^{(m)}(x) \mu(dx) \right| \right\}_{i=1}^n$$

образуют два ассоциированных вектора, как линейные комбинации ассоциированных величин с положительными коэффициентами. Эти два вектора независимы. Значит, и

$$\left\{ \int_{X_1} f_i^{(m)}(x) \mu(dx) \right\}_{i=1}^n, \quad \left\{ \int_{X_2} f_i^{(m)}(x) \mu(dx) \right\}_{i=1}^n$$

образуют два независимых ассоциированных вектора. Поэтому сумма этих векторов

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} f_i^{(m)}(x) \mu(dx) \right\}_{i=1}^n$$

— ассоциированный вектор. Поскольку $f_i^{(m)} \rightarrow f_i$ поточечно, предельные случайные величины

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \mu(dx) \right\}_{i=1}^n$$

образуют ассоциированный вектор. Лемма доказана.

Случайная мера μ , описывающая дробовой шум с нулевым радиусом взаимодействия, удовлетворяет условиям леммы, поскольку для любых непересекающихся борелевских множеств $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}_b$ случайные величины $\mu(B_1), \dots, \mu(B_m)$ независимы.

Для любой положительной строго возрастающей к бесконечности последовательности $(t_n)_{n=1}^\infty$ введем функции

$$f_1(x) = x e^{-x^2/(2t_1)}, \quad f_k(x) = x(e^{-x^2/(2t_k)} - e^{-x^2/(2t_{k-1})}), \quad k = 2, \dots, n.$$

Так как для $0 < s < t$ $e^{-x^2/(2t)} > e^{-x^2/(2s)}$, для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого $k \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $\text{sign } f_k(x) = \text{sign } x$.

Значит, по лемме случайные величины $\Delta V_k = \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \mu(dx)$ образуют ассоциированный вектор. Заметим теперь, что $\sum_{k=1}^n \Delta V_k = V(t_n)$, т.е. $V(t_n)$ — последовательность сумм ассоциированных случайных величин. Для нее выполнено максимальное неравенство (см. [14]): если $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ и $(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \geq \text{EV}^2(t_n) = B_{t_n}$, то

$$\mathbf{P}\{\max(|V(t_1)|, \dots, |V(t_n)|) \geq \lambda_2\} \leq \left(1 - \frac{B_{t_n}}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\right)^{-1} \mathbf{P}\{V(t_n) \geq \lambda_1\}. \quad (17)$$

Положим $\bar{V}(s) = \max_{0 < t \leq s} V(t)$, $\bar{V}_k(s) = \max_{l=1, \dots, 2^k} V(ls/2^k)$. Тогда

$$\{\bar{V}(s) > (1 + \gamma)\chi_s\} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\bar{V}_k(s) > (1 + \gamma)\chi_s\}$$

в силу непрерывности траекторий $V(t)$. Кроме того,

$$\{\bar{V}_k(s) > (1 + \gamma)\chi_s\} \subset \{\bar{V}_{k+1}(s) > (1 + \gamma)\chi_s\}.$$

Так как ввиду (17) для любого k

$$\mathbf{P}\{\bar{V}_{k+1}(s) > (1 + \gamma)\chi_s\} \leq \left(1 - \frac{B_s}{(\gamma/2)^2 2B_s \ln \ln B_s}\right)^{-1} \mathbf{P}\left\{V(s) > \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\chi_s\right\},$$

то и

$$\mathbf{P}\{\bar{V}(s) > (1 + \gamma)\chi_s\} \leq A_{13} \mathbf{P}\left\{V(s) > \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\chi_s\right\}. \quad (18)$$

Возьмем $a > 0$. Из (16) следует, что

$$\mathbf{P}\left\{V(a^k) > \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\chi_{a^k}\right\} \leq \left(A_{14}(a, \sigma) \frac{3}{2}k\right)^{-(1+\gamma/2)^2}. \quad (19)$$

Так как процесс V непрерывен почти наверное, события, входящие в следующие неравенства, измеримы:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcap_{t>0} \bigcup_{s>t} \{V(s) > (1 + \varepsilon)\chi(s)\}\right) &\leq \mathbf{P}\left(\max_{s \in (a^{k-1}, a^k]} V(s) > (1 + \varepsilon)\chi(a^{k-1}) \text{ б.ч.}\right) \\ &\leq \mathbf{P}(\bar{V}(a^k) > (1 + \varepsilon)\chi(a^{k-1}) \text{ б.ч.}), \end{aligned}$$

где запись “ E_k б.ч.” означает, что произошло бесконечное число событий E_k .

Так как $\chi(a^k)/\chi(a^{k-1}) < a$ для достаточно больших k , то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcap_{t>0} \bigcup_{s>t} \{V(s) > (1 + \varepsilon)\chi(s)\}\right) &\leq \mathbf{P}\left(\bar{V}(a^k) > \frac{1 + \varepsilon}{a}\chi(a^k) \text{ б.ч.}\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\bar{V}(a^k) > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\chi(a^k) \text{ б.ч.}\right), \end{aligned}$$

если $a - 1$ достаточно мало. В силу (18), (19) и леммы Бореля–Кантелли отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{t>0} \bigcup_{s>t} \{V(s) > (1 + \varepsilon)\chi(s)\}\right) = 0.$$

Аналогичное соотношение с заменой $V(s)$ на $-V(s)$ имеет место в силу симметричности распределения процесса V . Поэтому

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|V(t)|}{\sqrt{2B_t \ln \ln B_t}} \leq 1 \quad \text{почти наверное.} \quad (20)$$

Для любого $a > 1$ введем случайные величины

$$S_a(k) = \int_{(-a^{k+1}, -a^k] \cup (a^k, a^{k+1}]} x \exp\left(-\frac{x^2}{2a^{2k+1}}\right) \mu(dx)$$

и $R_a(k) = V(a^k) - S_a(k)$. Применяя тот же способ, с помощью которого мы вычислили семинварианты $V(t)$, получаем

$$\mathbf{D} R_a(k) = \lambda E \bar{\eta}_1^2 \int_{\mathbb{R} \setminus ((-a^{k+1}, -a^k] \cup (a^k, a^{k+1}])} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{a^{2k+1}}\right) dx = \sigma_a^2 a^{3(2k+1)/2},$$

$\sigma_a^2 > 0$, причем $\lim_{a \rightarrow \infty} \sigma_a = 0$.

Нечетные семинварианты $R_a(k)$ равны 0, а четные равны

$$\begin{aligned} \gamma_{2n}(R_a(k)) &= \lambda E \bar{\eta}_1^{2n} \int_{\mathbb{R} \setminus ((-a^{k+1}, -a^k] \cup (a^k, a^{k+1}])} x^{2n} \exp\left(-\frac{nx^2}{a^{2k+1}}\right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} x^{2n} \exp\left(-\frac{nx^2}{a^{2k+1}}\right) dx = \gamma_{2n}(V(a^{2k+1})). \end{aligned}$$

Поэтому, повторяя выкладки (10)–(13), получаем

$$\left| E \exp\left(\frac{ir R_a(k)}{a^{3(2k+1)/4}}\right) - \exp\left(-\sigma_a^2 \frac{r^2}{2}\right) \right| \leq A_{15} a^{-(2k+1)/2} (rM)^4 \exp\left(-\sigma_a^2 \frac{r^2}{2}\right).$$

Используя предложение 2, находим, что

$$\sup |P\{R_a(k) \leq x a^{3(2k+1)/4} \sigma_a\} - \Phi(x)| \leq \frac{A_{16}}{a^{(2k+1)/8}}.$$

Из оценки (15) для любого $b > 0$ и $k > k_0(a)$ следует, что

$$P\{R_a(k) > b \sqrt{2 \mathbf{D} R_a(k) \ln \ln \mathbf{D} R_a(k)}\} \leq (\ln \mathbf{D} R_a(k))^{-b^2} = \left(\frac{3}{2}(2k+1) \ln \sigma_a^2\right)^{-b^2}.$$

То же верно при замене $R_a(k)$ на $-R_a(k)$ в силу симметрии распределения $R_a(k)$. Поэтому для $b > 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{|R_a(k)| > b \sqrt{2 \mathbf{D} R_a(k) \ln \ln \mathbf{D} R_a(k)}\} < \infty \quad (21)$$

и по лемме Бореля–Кантелли

$$P(|R_a(k)| > b \sqrt{2 \mathbf{D} R_a(k) \ln \ln \mathbf{D} R_a(k)} \text{ б.ч.}) = 0.$$

Для любых τ, μ таких, что $0 < \tau < \mu < 1$, имеем

$$\begin{aligned} &P\{V(a^{2k+1}) > (1-\tau) \sqrt{2 B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}}\} \\ &\leq P\{S_k(a) > (1-\mu) \sqrt{2 B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}}\} \\ &\quad + P\{R_a(k)(a) > (\mu-\tau) \sqrt{2 B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}}\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (21) следует, что если $(\mu - \tau)\sqrt{B_{a^{2k+1}}/DR_a(k)} = (\mu - \tau)\sigma/\sigma_a > 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{|R_a(k)| > (\mu - \tau)\sqrt{2B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}}\} < \infty,$$

а из (16) следует, что для достаточно малого $c > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P\{V(a^{2k+1}) > (1 - \tau)\sqrt{2B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}}\} \\ \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{14}(a, \sigma) \frac{3}{2}k\right)^{-(1+c)(1-\tau)^2} = \infty. \end{aligned}$$

Значит, из (22) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{S_k(a) > (1 - \mu)\sqrt{2B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}}\} = \infty.$$

А так как $S_k(a)$ независимы между собой согласно предложению 1, из леммы Бореля–Кантелли следует, что

$$P(S_k(a) > (1 - \mu)\sqrt{2B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}} \text{ б.ч.}) = 1.$$

Далее, для $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \{(V(a^{2k+1}) > (1 - \varepsilon)\sqrt{2B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}} \text{ б.ч.})\} \\ & \supset \left\{ \left(S_k(a) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}} \text{ б.ч.} \right) \right\} \\ & \cap \left\{ \left(|R_a(k)| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}} \text{ к.ч.} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где запись “ E_k к.ч.” означает, что произошло конечное число событий из E_k . Выберем в (22) $\tau = \varepsilon/6$, $\mu = \varepsilon/2$, а число a таким, что $\sigma_a/\sigma < \varepsilon/6$. Тогда вероятность каждого из пересекаемых событий в (23) равна 1 и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{(V(a^{2k+1}) > (1 - \varepsilon)\sqrt{2B_{a^{2k+1}} \ln \ln B_{a^{2k+1}}} \text{ б.ч.})\} = 1,$$

т.е.

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|V(t)|}{\sqrt{2B_t \ln \ln B_t}} \geq 1 \text{ почти наверное.} \quad (24)$$

Таким образом доказан закон повторного логарифма для числителя (3). Для знаменателя (3) подходят те же самые рассуждения, которые приводят к тому, что если

$$S(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/(2t)} \mu(dx),$$

то

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|S(t) - \lambda E \eta_1 \sqrt{2\pi t}|}{\sqrt{2D\sqrt{t} \ln \ln t}} \leq 1 \text{ почти наверное,}$$

где $D = \lambda E \eta_1 \sqrt{2\pi t}$. Отсюда следует, что

$$\frac{S(t)}{\lambda E \eta_1 \sqrt{2\pi t}} \rightarrow 1 \quad \text{почти наверное.} \quad (25)$$

Значит, учитывая (3), (20), (24) и (25), получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|v(t, 0)|}{\sqrt{2B_t \ln \ln B_t} / (t \lambda E \eta_1 \sqrt{2\pi t})} = 1 \quad \text{почти наверное.}$$

Теорема доказана.

Автор благодарен профессору А. В. Булинскому за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990.
- [2] Булинский А. В., Молчанов С. А. Асимптотическая гауссовость решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // Теория вероятн. и ее применения. 1991. Т. 36. № 2. С. 217–235.
- [3] Bulinski A. V. Some problems of asymptotical analyses of nonlinear diffusion // Probab. Theory Math. Statist. / ed. A. N. Shiryaev et al. Proc. 6th USSR–Japan Symp. Singapore: World Sci. Publ., 1993. P. 32–46.
- [4] Bulinski A. V. CLT for the solution of the multidimensional Burgers equation with random data // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 1992. V. 17. № 1. P. 11–22.
- [5] Alberverio S., Molchanov S. A., Surgailis D. Stratified structure of the Universe and Burgers' equation – a probabilistic approach // Probab. Theory Related Fields. 1994. V. 100. P. 457–484.
- [6] Гринив О. О. Центральная предельная теорема для уравнения Бюргерса // ТМФ. 1991. Т. 88. № 1. С. 7–13.
- [7] Leonenko N., Orsingher E. Limit theorems for solutions of the Burgers equation with Gaussian and non-Gaussian initial conditions // Теория вероятн. и ее применения. 1995. Т. 40. № 2. С. 387–403.
- [8] Surgailis D., Woyczynsky W. A. Burgers' equation with non-local shot-noise data // J. Appl. Probab. 1994. V. 31. P. 351–362.
- [9] Hsing T. L., Teugels J. L. Extremal properties of shot noise processes // Adv. in Appl. Probab. 1989. V. 21. P. 513–525.
- [10] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
- [11] Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
- [12] Burton R., Waymire E. Scaling limits for associated random measures // Ann. Probab. 1985. V. 13. № 4. P. 1267–1278.
- [13] Esary J. D., Proschan F., Walkup D. W. Association of random variables, with applications // Ann. Math. Statist. 1967. V. 38. P. 1466–1474.
- [14] Newman C. M., Wright A. L. An invariance principle for certain dependent sequences // Ann. Probab. 1981. V. 9. № 4. P. 671–675.