Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Борисовский, О геометрии главных T^1 -расслоений над многообразием Ходжа, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 824–829

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 03:49:32

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ ГЛАВНЫХ T^1 -РАССЛОЕНИЙ НАД МНОГООБРАЗИЕМ ХОДЖА

И. П. Борисовский

Изучаются сасакиевы структуры, индуцированные в главных T^1 -расслоениях над келеровыми многообразиями. Построена естественная модель сасакиева многообразия постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны -3 .

Библиография: 10 названий.

Изучение контактной геометрии восходит к исследованиям Софуса Ли. Однако, большой интерес со стороны математиков оно получило в 50–60-е годы с появлением работ Грея [1], Кобаяси [2], Черна [3] и других видных геометров. Один из важнейших типов почти контактных метрических структур реализуют главные расслоения со структурной группой $T^1 = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ (главные T^1 -расслоения) с фиксированной линейной связностью над почти эрмитовым многообразием [4]. Помимо богатой геометрии T^1 -расслоения интересны и с точки зрения теоретической физики – они используются при построении теории супергравитации в модели Калуцы–Клейна. Среди многочисленных классов почти контактных метрических структур особое место занимают сасакиевы структуры. Они являются своеобразным контактным аналогом келеровых структур.

В этой работе изучаются сасакиевы структуры, индуцированные в главных T^1 -расслоениях над келеровыми многообразиями. Построена естественная модель сасакиева многообразия постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны -3 , играющего важную роль в классификации сасакиевых пространственных форм [5].

Пусть M – связное гладкое многообразие размерности $\dim M = 2n$, $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M , d – оператор внешнего дифференцирования, g – риманова метрика на M , ∇ – риманова связность метрики g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6]. *Почти эрмитовой структурой* (короче, *АН-структурой*) на M называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ тензоров на M , где J – тензор типа $(1, 1)$ такой, что $J^2 = -\mathrm{id}$, причем $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Многообразие, на котором задана АН-структура, называется *почти эрмитовым многообразием*. На каждом таком многообразии естественно определена 2-форма $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, называемая *фундаментальной формой* структуры. Задание почти эрмитовой структуры на M эквивалентно заданию G -структуры в главном расслоении всех комплексных реперов многообразия M со структурной группой $U(n)$, где $U(n)$ – унитарная группа порядка n . Эта G -структура называется *присоединенной*, а элементы ее пространства – *реперами*, адаптированными почти эрмитовой структуре (*А-реперами*) [7].

Условимся, что индексы принимают значения $1 \leq i, j, k, l \leq 2n$, $1 \leq a, b, c, d, f \leq n$, $\hat{a} = a + n$. Будем также считать, что на пространстве G -структуры форма связности задается формами ω_j^i , а форма смещения – формами ω^i . Несложно убедиться, что компоненты тензоров J, g, Ω на пространстве присоединенной G -структуры выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} J_b^a &= \sqrt{-1}\delta_b^a, \quad J_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\delta_a^b, \quad J_b^{\hat{a}} = J_{\hat{b}}^a = 0, \quad g_{ab} = g_{\hat{a}\hat{b}} = 0, \quad g_{\hat{a}b} = \delta_b^a, \quad g_{a\hat{b}} = \delta_a^b, \\ \Omega_{ab} &= \Omega_{\hat{a}\hat{b}} = 0, \quad \Omega_{a\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta_a^b, \quad \Omega_{\hat{a}b} = \sqrt{-1}\delta_b^a. \end{aligned} \quad (1)$$

Вводя в рассмотрение объекты

$$B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{[\hat{b}, \hat{c}]}^a, \quad B_{abc} = \frac{-\sqrt{-1}}{2} J_{[b, c]}^{\hat{a}}, \quad B^{ab}{}_c = \frac{-\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b}, c}^a, \quad B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b}, \hat{c}}^a,$$

где $J_{j,k}^i$ – компоненты ковариантного дифференциала тензора J относительно римановой связности, $[\cdot, \cdot]$ – альтернация по соответствующим индексам, в работе [7] В. Ф. Кириченко записывает первую группу структурных уравнений AH -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned} \quad (2)$$

Там же показано, что набор функций $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$, $\{B^{ab}{}_c\}$, $\{B_{ab}{}^c\}$ определяет на многообразии M тензоры, которые называются *структурными тензорами первого и второго рода* и *виртуальными тензорами первого и второго рода* соответственно. Эти тензоры в значительной мере определяют геометрию почти эрмитовой структуры на многообразии M .

Пусть M – келерово многообразие. Согласно определению оно характеризуется ковариантным постоянством тензора J в римановой связности: $\nabla J = 0$. В терминах присоединенной G -структуры это равносильно обращению в 0 всех структурных и виртуальных тензоров [7]. С учетом этого, применяя к уравнениям (2) стандартную процедуру дифференциального продолжения, получим полную группу структурных уравнений келерова многообразия на пространстве G -структуры:

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b, \quad d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b, \quad d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + A_{bc}^{ad} \omega^c \wedge \omega_d, \quad (3)$$

где $\{A_{bc}^{ad}\}$ – система функций, симметричных по верхней и нижней парам индексов [7]. Рассматривая второе уравнение Картана связности ∇ [6] и используя (3), получаем компоненты тензора Римана–Кристоффеля келерова многообразия на пространстве присоединенной G -структуры:

$$R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -A_{bd}^{ac}.$$

Остальные компоненты либо равны 0, либо получаются из данной перестановкой индексов с учетом свойств симметрии тензора Римана–Кристоффеля [7].

Среди келеровых многообразий важную роль играют комплексные пространственные формы, т.е. келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Голоморфной секционной кривизной (короче, HS -кривизной) $H(X)$ почти эрмитова многообразия M в направлении $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X \neq 0$, называется кривизна в двумерном направлении $X \wedge JX$, т.е. $H(X)\|X\|^4 = R(X, JX, X, JX)$.

Многообразие M имеет постоянную HS -кривизну в $t \in M$, если для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $X \neq 0, Y \neq 0$, выполнено $H(X)(t) = H(Y)(t)$. Многообразие M имеет постоянную HS -кривизну, если оно имеет постоянную HS -кривизну в каждой точке $t \in M$.

Многообразие M имеет глобально постоянную HS -кривизну, если оно имеет постоянную HS -кривизну, являющуюся константой.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1 [7]. Келерово многообразие M является пространством глобально постоянной HS -кривизны с тогда и только тогда, когда

$$A_{bf}^{ad} = \frac{c}{2} \tilde{\delta}_{bf}^{ad},$$

где c – константа, $\tilde{\delta}_{bf}^{ad} = \delta_b^a \delta_f^d + \delta_f^a \delta_b^d$.

Обратимся теперь к почти контактным структурам. Напомним

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6]. Почти контактной метрической структурой (короче, AC -структурой) на нечетномерном многообразии называется совокупность $\{\tilde{g}, \Phi, \xi, \eta\}$ тензорных полей на этом многообразии, где $\tilde{g}$ – риманова метрика, Φ – тензор типа $(1, 1)$, ξ – векторное поле, η – 1-форма. При этом выполняются условия:

- 1) $\Phi(\xi) = 0$;
- 2) $\eta \circ \Phi = 0$;
- 3) $\eta(\xi) = 1$;
- 4) $\Phi^2 = -\text{id} + \xi \otimes \eta$;
- 5) $\tilde{g}(\Phi X, \Phi Y) = \tilde{g}(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$.

Задание AC -структуры на многообразии порождает каноническое гиперраспределение $L = \text{Ker } \eta$ на этом многообразии. Очевидно, пара $\{\Phi|_L, \tilde{g}|_L\}$ задает $АН$ -структуру на этом распределении. Более того, хорошо известно [3], что задание почти контактной метрической структуры на многообразии (размерности $2n + 1$) равносильно заданию G -структуры со структурной группой $\{e\} \times U(n)$. Такую G -структуру будем также называть *присоединенной*. В работе [8] Кириченко получил первую группу структурных уравнений AC -структуры на пространстве присоединенной G -структуры:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,c}^a \omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[\hat{b}, \hat{c}]}^a \omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{a}, 0}^a - \sqrt{-1} \Phi_{0, \hat{a}}^a \right) \omega^{\hat{b}} \wedge \omega - \sqrt{-1} \Phi_{0, b}^a \omega^b \wedge \omega, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b, \hat{c}}^{\hat{a}} \omega^{\hat{c}} \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[\hat{b}, c]}^{\hat{a}} \omega^b \wedge \omega^{\hat{c}} \\ &\quad - \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b}, 0}^{\hat{a}} - \sqrt{-1} \Phi_{0, \hat{b}}^{\hat{a}} \right) \omega^b \wedge \omega + \sqrt{-1} \Phi_{0, \hat{b}}^{\hat{a}} \omega^{\hat{b}} \wedge \omega, \\ d\omega &= -\sqrt{-1} \Phi_{[a, b]}^0 \omega^a \wedge \omega^b + \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{a}, \hat{b}]}^0 \omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}} + \sqrt{-1} \Phi_{a, 0}^0 \omega^{\hat{a}} \wedge \omega \\ &\quad + (-\sqrt{-1} \Phi_{a, \hat{b}}^0 - \sqrt{-1} \Phi_{\hat{b}, a}^0) \omega^a \wedge \omega^{\hat{b}} - \sqrt{-1} \Phi_{a, 0}^0 \omega^a \wedge \omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\pi: P \rightarrow M$ – главное T^1 -расслоение. Фиксация связности на пространстве расслоения внутренним образом порождает четверку тензоров на нем $\{\tilde{g}, \Phi, \xi, \eta\}$, определяющих AC -структуру на P [4]. А именно, если в качестве η взять исходную 1-форму ω – форму связности, $\tilde{g} = \pi^*g + \eta \otimes \eta$, $\Phi = \pi_*|_L^{-1} \circ J \circ \pi_*$ (в данном случае L – горизонтальное распределение связности), а в качестве ξ – единичный вектор вертикального распределения, то, очевидно, будут выполняться условия 1)–5). Так как S^1 – абелева группа, то $d\omega = \tilde{\Omega}$ – форма кривизны связности ω на пространстве расслоения окружностей. Используя (2), (4), а также результаты [4], запишем на пространстве присоединенной G -структуры первую группу структурных уравнений AC -структуры, индуцированной в главном T^1 -расслоении над AN -многообразием с фиксированной связностью:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \tilde{\Omega}_{\hat{a}b} \omega^b \wedge \omega, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \tilde{\Omega}_{\hat{a}\hat{b}} \omega^{\hat{b}} \wedge \omega, \\ d\omega &= \tilde{\Omega}_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + 2\tilde{\Omega}_{a\hat{b}} \omega^a \wedge \omega^{\hat{b}} + \tilde{\Omega}_{\hat{a}\hat{b}} \omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{\Omega}_{ij}$ – компоненты формы кривизны, B^{abc} , $B^{ab}{}_c$, B_{abc} , $B_{ab}{}^c$ – компоненты тензоров, определяющих AN -структуру на базе (точнее, их антиувлечения). Найдем также и компоненты тензора Римана–Кристоффеля многообразия M на пространстве присоединенной G -структуры:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{i00j} &= \tilde{\Omega}_{ic} \tilde{\Omega}^c{}_j + \tilde{\Omega}_i{}^c \tilde{\Omega}_{cj}, & \tilde{R}_{ijk0} &= -\tilde{\Omega}_{ij,k}, \\ \tilde{R}_{ijkl} &= R_{ijkl} + \tilde{\Omega}_{jk} \tilde{\Omega}_{il} - \tilde{\Omega}_{ik} \tilde{\Omega}_{jl} - 2\tilde{\Omega}_{ij} \tilde{\Omega}_{kl}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tilde{\Omega}_{ij,k}$ – компоненты ковариантного дифференциала формы кривизны, R_{ijkl} – компоненты тензора Римана–Кристоффеля на базе.

ТЕОРЕМА 2 [2], [9]. *Существует каноническое биективное соответствие между классами эквивалентности главных T^1 -расслоений над компактным многообразием M и группой $H^2(M, \mathbb{Z})$ двумерных целочисленных когомологий этого многообразия, причем нулевому элементу группы соответствует класс тривиального расслоения. Более того, при заданной целочисленной 2-форме Θ на многообразии M существует главное T^1 -расслоение $\pi: P \rightarrow M$ со связностью η такое, что $\pi^*\Theta = d\eta$.*

Многообразие M в дальнейшем будем считать многообразием Ходжа, т.е. келеровым многообразием с целочисленной фундаментальной формой Ω . Главное T^1 -расслоение над M , обладающее свойством $d\eta = \pi^*\Omega$, будем называть *каноническим*. Рассмотрим тотальное пространство канонического главного T^1 -расслоения над M . Согласно (1) и (5) его структурные уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \sqrt{-1} \omega^a \wedge \omega, & d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b - \sqrt{-1} \omega_a \wedge \omega, \\ d\omega &= -2\sqrt{-1} \omega^a \wedge \omega_a. \end{aligned}$$

Это, как известно [10], структурные уравнения сасакиева многообразия, т.е. многообразия, характеризующегося тождеством $\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \tilde{g}(X, Y)\xi - \eta(Y)X$, $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$,

где $\tilde{\nabla}$ – риманова связность, соответствующая метрике $\tilde{g}$. Далее, согласно (1), (6) компоненты тензора Римана–Кристоффеля на таком многообразии имеют вид

$$\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = -\delta_{\hat{c}}^{\hat{b}}\delta_{\hat{d}}^{\hat{a}} + \delta_{\hat{c}}^{\hat{a}}\delta_{\hat{d}}^{\hat{b}}, \quad \tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = -A_{\hat{b}\hat{d}}^{\hat{a}\hat{c}} + \delta_{\hat{b}}^{\hat{c}}\delta_{\hat{d}}^{\hat{a}} + 2\delta_{\hat{b}}^{\hat{a}}\delta_{\hat{d}}^{\hat{c}}. \quad (7)$$

Контактным аналогом HS -кривизны на $АН$ -многообразии является так называемая Φ -голоморфная секционная кривизна, т.е. кривизна в двумерном направлении $X \wedge \Phi X$, $X \in L$. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – компактное многообразие Ходжа, P – пространство канонического главного T^1 -расслоения над ним с индуцированной сасакиевой структурой. Пространство P имеет постоянную Φ -голоморфную секционную кривизну c тогда и только тогда, когда M имеет постоянную HS -кривизну $c+3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P имеет постоянную Φ -голоморфную кривизну c , т.е. $\tilde{R}(X, \Phi X, X, \Phi X) = c\|X\|^4$ для всех $X \in L$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl}X^i(\Phi X)^jX^k(\Phi X)^l &= \tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{f}\hat{d}}X^{\hat{a}}(\Phi X)^{\hat{b}}X^{\hat{f}}(\Phi X)^{\hat{d}} + \tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{f}\hat{d}}X^{\hat{a}}(\Phi X)^{\hat{b}}X^{\hat{f}}(\Phi X)^{\hat{d}} \\ &\quad + \tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{f}\hat{d}}X^{\hat{a}}(\Phi X)^{\hat{b}}X^{\hat{f}}(\Phi X)^{\hat{d}} + \tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{f}\hat{d}}X^{\hat{a}}(\Phi X)^{\hat{b}}X^{\hat{f}}(\Phi X)^{\hat{d}} \\ &\quad + \tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{f}\hat{d}}X^{\hat{a}}(\Phi X)^{\hat{b}}X^{\hat{f}}(\Phi X)^{\hat{d}} + \tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{f}\hat{d}}X^{\hat{a}}(\Phi X)^{\hat{b}}X^{\hat{f}}(\Phi X)^{\hat{d}} \\ &= 2(\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{f}\hat{d}} - 2\tilde{R}_{\hat{a}\hat{f}\hat{b}\hat{d}})X^{\hat{a}}X^{\hat{b}}X^{\hat{f}}X^{\hat{d}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\|X\|^4 = 2\tilde{\delta}_{\hat{f}\hat{d}}^{\hat{a}\hat{b}}X_{\hat{a}}X_{\hat{b}}X^{\hat{f}}X^{\hat{d}}$. Таким образом,

$$2(\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{f}\hat{d}} - 2\tilde{R}_{\hat{a}\hat{f}\hat{b}\hat{d}})X_{\hat{a}}X_{\hat{b}}X^{\hat{f}}X^{\hat{d}} = 2c\tilde{\delta}_{\hat{f}\hat{d}}^{\hat{a}\hat{b}}X_{\hat{a}}X_{\hat{b}}X^{\hat{f}}X^{\hat{d}}.$$

Отсюда с учетом (7)

$$\left(A_{\hat{f}\hat{d}}^{\hat{a}\hat{b}} - \frac{c+3}{2}\tilde{\delta}_{\hat{f}\hat{d}}^{\hat{a}\hat{b}}\right)X_{\hat{a}}X_{\hat{b}}X^{\hat{f}}X^{\hat{d}} = 0.$$

Далее рассмотрим форму

$$F(X, Y, Z, W) = \left(A_{\hat{f}\hat{d}}^{\hat{a}\hat{b}} - \frac{c+3}{2}\tilde{\delta}_{\hat{f}\hat{d}}^{\hat{a}\hat{b}}\right)X^{\hat{f}}Y^{\hat{d}}Z_{\hat{a}}W_{\hat{b}}.$$

Очевидна следующая

ЛЕММА. Форма F обладает свойствами:

- 1) $F(X, Y, Z, W) = F(Y, X, Z, W)$;
- 2) $F(X, Y, Z, W) = F(X, Y, W, Z)$;
- 3) $F(X, Y, Z, W) = F(Z, W, X, Y)$;
- 4) $\mathbb{C}$ -линейна по первой паре аргументов и $\mathbb{C}$ -антилинейна по второй паре аргументов;
- 5) $F(X, X, X, X) = 0$.

Поляризуя тождество 5) леммы, нетрудно получить, что $F(X, Y, Z, W) = 0$ для всех $X, Y, Z, W \in L$. Значит,

$$A_{\hat{f}\hat{d}}^{\hat{a}\hat{b}} = \frac{c+3}{2}\tilde{\delta}_{\hat{f}\hat{d}}^{\hat{a}\hat{b}}.$$

Следовательно, по теореме 1 $АН$ -структура на M имеет постоянную HS -кривизну $c+3$. Обратное очевидно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Сасакиева структура, индуцированная в каноническом главном T^1 -расслоении над T^{2n} , имеет постоянную Φ -голоморфную секционную кривизну -3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как многообразие $T^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ локально изометрично евклидову пространству $\mathbb{R}^{2n}$, снабженному стандартной келеровой структурой, то оно локально плоско. Кроме того, T^{2n} – компактное многообразие Ходжа относительно стандартной келеровой структуры. Следовательно, согласно теореме 3 доказываемое утверждение имеет место.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору В. Ф. Кириченко за постановку проблемы, внимание и помощь, оказанные в ходе работы над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gray J.W. Some global properties of contact structures // Ann. Math. 1959. V. 69. P. 421–450.
- [2] Kobayashi S. Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group // Tôhoku Math. J. (2). 1956. V. 8. P. 29–45.
- [3] Chern S.S. Pseudo-groupes continus infinis // Colloque de géométrie différentielle. Strasbourg, 1953. P. 119–136.
- [4] Watanabe Y. Riemannian metric on principal circle bundles over locally symmetric Kählerian manifolds // Kodai Math. J. 1982. V. 5. P. 111–121.
- [5] Ishihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form // Kodai Math. J. 1979. V. 2. P. 171–186.
- [6] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
- [7] Кириченко В. Ф. Дифференциальная геометрия K -пространств // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1977. С. 139–161.
- [8] Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71.
- [9] de Andres L.C., Cordero L.A., Fernandez M., Mencia J.J. Examples of four-dimensional compact locally conformal Kähler solvmanifolds // Geom. Dedicata. 1989. V. 29. № 2. P. 227–232.
- [10] Кириченко В. Ф. Аксиома Φ -голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. С. 711–734.

Московский педагогический государственный университет им. В.И. Ленина

Поступило
28.04.97