Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Буслаев, В. А. Кондратьев, А. И. Назаров, Об одном семействе экстремальных задач и связанных с ним свойствах одного интеграла, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 830–838

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 10:23:28

УДК 517.972.8

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И СВЯЗАННЫХ С НИМ СВОЙСТВАХ ОДНОГО ИНТЕГРАЛА

А. П. Буслаев, В. А. Кондратьев, А. И. Назаров

Исследуется экстремальная задача

$$\int_0^1 (y''(t))^p dt / \int_0^1 (y'(t))^q dt \rightarrow \min$$

по всем y , $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) = y'(1) = 0$, которая приводит к интегралу

$$\int_{\mathbb{R}} (\max(0, 1 + \mu x - |x|^q))^{1/p'} dx$$

и дает точные оценки для собственных значений дифференциальных операторов в обобщенной задаче Лагранжа об устойчивости колонны.

Библиография: 10 названий.

1. Постановка задачи. Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\frac{\|y''\|_{L_p[0,1]}}{\|y'\|_{L_q[0,1]}} \rightarrow \min \quad (1)$$

при условии

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = y'(1) = 0. \quad (2)$$

Ее решение дает точные оценки для собственных значений дифференциальных операторов в задаче Лагранжа об устойчивости колонны [1]–[5].

Стандартные рассуждения позволяют установить, что решение рассматриваемой задачи (1), (2) существует, причем экстремаль можно искать среди функций y с одной переменной знака производной y' .

Замена $y'(t) = x(t)$ приводит к задаче

$$\frac{\|x'\|_{L_p[0,1]}}{\|x\|_{L_q[0,1]}} \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$\int_0^1 x(t) dt = 0, \quad x(0) = x(1) = 0. \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00325 (первый автор), № 96-15-96177 (второй автор), № 96-01-00087 (третий автор).

Задача (3), (4) возникает также в математической статистике при исследовании условий локальной асимптотической оптимальности непараметрических статистических критериев [6].

В силу однородности функционала (3) можно считать, что x нормирована в $L_q[0, 1]$:

$$\|x\|_{L_q[0,1]} = 1. \quad (5)$$

Пока будем считать, что $1 < p, q < \infty$.

Необходимые условия экстремума в (3), (4) (см. [7]) приводят к нелинейной краевой задаче

$$(|x'(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} x'(t))' + \lambda |x(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} x(t) = c_1, \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x(1) = 0 \quad (6)$$

при условии

$$\int_0^1 x(t) dt = 0, \quad (7)$$

причем значение функционала (3) на решении задачи (6), (7) равно $\lambda^{1/p}$.

Интегрируя (6), получаем

$$\frac{|x'|^p}{p'} + \lambda \frac{|x|^q}{q} = c_1 x + c_2, \quad (8)$$

где $p' = p/(p-1)$.

Интегрируя (8) по отрезку $[0, 1]$, из условий (5) и (7) получаем $c_2 = \lambda(1/p' + 1/q)$.

С помощью подходящего преобразования вида $ax(bt)$ и переобозначения постоянной в (8), приходим к уравнению

$$|x'|^p = 1 + \mu x - |x|^q \quad (9)$$

при условиях $x(0) = x(T) = 0$,

$$\int_0^T x(t) dt = 0. \quad (10)$$

Уравнение (9) задает в фазовой плоскости (x, x') овал, причем, поскольку на $(0, T)$ x меняет знак один раз, T есть главный период движения по этому овалу.

Очевидно, что при $\mu = 0$ овал (9) симметричен относительно обеих координатных осей в фазовой плоскости, и условие (10) выполнено автоматически. При этом решение задачи (6), (7) центрально симметрично относительно точки $(1/2, 0)$. Если же $\mu \neq 0$, то решение такой симметрией не обладает.

Заметим, что в случае $p = 2$, $q = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, решение уравнения (9) при $\mu = 0$ (так называемый *обобщенный синус*) исследовалось А. М. Ляпуновым [8].

Поскольку овал (9) симметричен относительно оси x' , условие (10) можно заменить на условие

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt = 0, \quad (11)$$

где t_1 и t_2 — соответственно точки минимума и максимума решения (9) на $[0, T]$ (заметим, что $|t_2 - t_1| = T/2$).

Подставляя в (11) $dt = dx/(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}$ (см. (9)), получим уравнение

$$F(p, q, \mu) \equiv \int_{x_1}^{x_2} \frac{x dx}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}} = 0, \quad (12)$$

где x_1, x_2 – вещественные нули функции $1 + \mu x - |x|^q$, $x_1 = x_1(\mu) < x_2 = x_2(\mu)$. Легко видеть, что $x_2(-\mu) = -x_1(\mu)$ и F – нечетная по μ функция. Очевидно также, что при $\mu \geq 0$ имеет место $-1 \leq x_1(\mu) < 0 < x_2(\mu)$.

Рассмотрим интеграл

$$J(p, q, \mu) = \int_{x_1}^{x_2} (1 + \mu x - |x|^q)^{1/p'} dx \quad (13)$$

как функцию переменной μ с параметрами p, q .

Очевидно, что $J'_\mu = F(p, q, \mu)/p'$. Поэтому точки минимума J удовлетворяют уравнению (12).

Далее, если $x(t)$ – решение уравнения (9), то

$$J(p, q, \mu) = \int_0^T |x'|^p dt.$$

Возвращаясь вновь к отрезку $[0, 1]$ и нормируя решение, получаем

$$J(p, q, \mu) = \frac{1}{2} \Theta^{-\Theta} q^{-1/q} p'^{-1/p'} \lambda^{1/p},$$

где $\Theta = 1/q + 1/p'$. Поэтому минимум в задаче (3), (4) равен

$$2\Theta^\Theta q^{1/q} p^{1/p'} \min_\mu J(p, q, \mu).$$

2. Исследование уравнения (12). Как уже отмечалось, $F(p, q, 0) = 0$ при всех p, q . Поэтому вопрос о ненулевых решениях уравнения (12) приводит к задаче о бифуркации нулевого решения [9].

Будем решать уравнение бифуркации $F'_\mu(p, q, 0) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Для любых $\mu \in \mathbb{R}$, $1 < q, p < \infty$

$$F'_\mu(p, q, \mu) = -\left(\frac{q}{p} - 3\right) I_1 - \mu(q-1) I_2, \quad (14)$$

где

$$I_1 = I_1(p, q, \mu) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2 dx}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p} (q + (q-1)\mu x)},$$

$$I_2 = I_2(p, q, \mu) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^3 dx}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p} (q + (q-1)\mu x)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$f_\varepsilon(\mu) \equiv \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} \frac{x \, dx}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}} \rightarrow F(p, q, \mu), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

причем сходимость равномерная на любом конечном промежутке. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{df_\varepsilon}{d\mu} &= \frac{dx_2}{d\mu} \frac{x}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}} \Big|_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} - \frac{dx_1}{d\mu} \frac{x}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}} \Big|_{x_1+\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \\ &\quad - \frac{1}{p} \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} \frac{x^2 \, dx}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p+1}}. \end{aligned}$$

Однако, из $1 + \mu x_k - |x_k|^q = 0$, $k = 1, 2$, имеем

$$\frac{dx_k}{d\mu} = \frac{x_k}{q|x_k|^{q-2}x_k - \mu} = \frac{x_k^2}{q + (q-1)\mu x_k}. \quad (15)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{df_\varepsilon}{d\mu} &= \frac{x^3}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}(q + (q-1)\mu x)} \Big|_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} \\ &\quad + O(\varepsilon^{1/p'}) - \frac{1}{p} \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} \frac{x^2 \, dx}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p+1}} \\ &= \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}(q + (q-1)\mu x)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p} \frac{x^2}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p+1}} \right) dx + O(\varepsilon^{1/p'}) \\ &= \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} \left(\frac{-x^2(q/p - 3)}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}(q + (q-1)\mu x)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(q-1)\mu x^3}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}(q + (q-1)\mu x)^2} \right) dx + O(\varepsilon^{1/p'}). \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ $df_\varepsilon/d\mu \rightarrow -(q/p - 3)I_1 - (q-1)\mu I_2$, где сходимость также равномерна на любом конечном промежутке, что и доказывает теорему.

Из теоремы 1 видно, что при фиксированном p решением уравнения бифуркации будет $q = 3p$. Поскольку $F''_{\mu q}(p, 3p, 0) = -I_1/p < 0$, в этой точке выполнено достаточное условие бифуркации [9] и от нулевого решения уравнения (12) ответвляется ненулевая ветка. В силу нечетности F , если μ – решение (12), то и $-\mu$ – также решение (12).

Разложение функции F в окрестности точки бифуркации имеет вид

$$F(p, q, \mu) = \frac{1}{6} F'''_{\mu\mu\mu}(p, 3p, 0) \mu^3 - I_1 \mu (q - 3p) + \dots$$

Вычисление, аналогичное теореме 1, дает

$$F'''_{\mu\mu\mu}(p, 3p, 0) = -(q-1)I'_{2\mu}(p, 3p, 0) = \frac{2(3p-2)(3p-1)}{27p^3} \int_{-1}^1 \frac{x^4 \, dx}{(1 - |x|^{3p})^{1/p}} > 0.$$

Поэтому ненулевое решение локально существует только при $q > 3p$, и модуль его растет с ростом q .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p, q < \infty$. Тогда

- а) при $q > 3p$ уравнение (12) имеет положительное решение;
- б) существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $q \leq 2p + \varepsilon$ уравнение (12) не имеет ненулевых решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку в формуле (14) $I_1 > 0$, то при $q > 3p$ $F'_\mu < 0$, поэтому $F(p, q, \mu) < 0$ для малых положительных μ .

Далее, при $\mu \rightarrow \infty$ справедливо $x_1(\mu) \rightarrow -0$, $x_2(\mu) \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\int_{x_1}^0 \frac{x dx}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}} \sim \int_{-1/\mu}^0 \frac{x dx}{(1 + \mu x)^{1/p}} = -\mu^{-2} \int_0^1 \frac{t dt}{(1-t)^{1/p}}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} \frac{x dx}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}} &\sim \int_0^{\mu^{1/(q-1)}} \frac{x dx}{(\mu x - |x|^q)^{1/p}} \\ &= \mu^{2/(q-1)-q/(p(q-1))} \int_0^1 \frac{t dt}{(t - |t|^q)^{1/p}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку при рассматриваемых значениях p, q показатель степени при μ в (17) больше, чем в (16), то при $\mu \gg 1$ $F(p, q, \mu) > 0$, что доказывает утверждение а).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства утверждения а) видно, что при $q \leq 3p$ $F(\mu)$ не обращается в 0 как в окрестности нуля, так и в окрестности бесконечности.

б) Перепишем формулу (14) в виде интеграла

$$\begin{aligned} G(p, q, \mu) &:= F'_\mu(p, q, \mu) = \frac{1}{p} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2(q(3 - q/p) + (q-1)\mu x(2 - q/p)) dx}{(1 + \mu x - x^q)^{1/p}(q + (q-1)\mu x)^2} \\ &= \frac{r}{pq} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2(1 + \mu x/(q'r')) dx}{(1 + \mu x - |x|^q)^{1/p}(1 + \mu x/q')^2}, \end{aligned}$$

где $r = 3 - p/q$. При $q \leq 2p$ подынтегральная функция неотрицательна на $[x_1, x_2]$. Следовательно, $F(p, q, \mu)$ отделена от нуля на любом промежутке $[m, M]$, $m > 0$. По непрерывности F не обращается в 0 при $q \leq 2p + \varepsilon$, что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [10] получены более слабые достаточные условия существования и отсутствия ненулевого решения уравнения (12).

3. Поведение функций $J(p, q, \mu)$, $F(p, q, \mu)$, $G(p, q, \mu)$. Из теоремы 2 следует, что при фиксированных p, q , $1 < q, p < \infty$, $q > 3p$, точка $\mu = 0$ дает функционалу J локальный максимум; а поскольку J возрастает при больших μ , минимум достигается на ненулевом решении уравнения (12). При $q \leq 3p$ $\mu = 0$ является по крайней мере точкой локального минимума J , а при $q \leq 2p$ — даже глобального.

При $\mu \rightarrow \infty$ из (16) и (17) следует, что

$$F(\mu) = \mu^{(r-1)/(q-1)} \left(\int_0^1 \frac{t dt}{(t - |t|^q)^{1/p}} + \dots \right).$$

Таким образом, при $r \in [0, 1)$ $F(\mu)$ возрастает в окрестности нуля и убывает в окрестности бесконечности. Отсюда следует, что при $r \in [0, 1)$ $F'_\mu(\mu)$ имеет хотя бы один положительный корень. При $r \geq 1$, как показано в теореме 2, $F'_\mu(\mu)$ корней не имеет.

ГИПОТЕЗА 1. Нуль является точкой глобального минимума функционала J при всех $q \leq 3p$.

ГИПОТЕЗА 2. Уравнение (12) имеет положительное решение только при $q > 3p$, причем это решение единственно и является возрастающей функцией q при фиксированном p .

4. Точные значения $J(p, q, \mu)$. Известно, что

$$\begin{aligned} J(p, q, 0) &= \int_{-1}^1 (1 - |x|^q)^{1/p'} dx = \frac{2}{q} B\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{p'}\right) \\ &= \frac{2}{q} \frac{\Gamma(1/q)\Gamma(1 + 1/p')}{\Gamma(1/q + 1/p' + 1)} = \frac{2}{p'q} \frac{\Gamma(1/q)\Gamma(1/p')}{\Gamma(1 + 1/p' + 1/q)}, \end{aligned}$$

где Γ – гамма-функция. Функция $J(p, q, 0)$ симметрична относительно p' , q и монотонна по каждому аргументу при $p \geq 1$, $q \geq 1$.

Рассмотрим несколько случаев.

1) Случай $q = 1$. Имеет место

$$J(p, 1, \mu) = \begin{cases} (2p)' \cdot \frac{1}{1 - \mu^2}, & \text{если } 0 \leq \mu < 1, \\ \infty, & \text{если } \mu \geq 1. \end{cases}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} J(p, 1, \mu) &= \int_{1+\mu x - |x| \geq 0} (1 + \mu x - |x|)^{1/p'} dx \\ &= \int_{x_1}^0 (1 + \mu x + x)^{1/p'} dx + \int_0^{x_2} (1 + \mu x - x)^{1/p'} dx \\ &= \int_{-1/(\mu+1)}^0 (1 + (\mu + 1)x)^{1/p'} dx + \int_0^{1/(1-\mu)} (1 + (\mu - 1)x)^{1/p'} dx \\ &= \frac{1}{1 + 1/p'} \left(\frac{1}{\mu + 1} + \frac{1}{1 - \mu} \right) = (2p)' \cdot \frac{1}{1 - \mu^2}, \quad 0 < \mu < 1. \end{aligned}$$

Вторая часть утверждения очевидна.

2) Случай $q = 2$. Имеет место

$$J(p, 2, \mu) = B\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{p'}\right) \left(\frac{\mu^2}{4} + 1\right)^\Theta,$$

где $\Theta = 1/2 + 1/p'$.

Действительно,

$$\begin{aligned} J(p, 2, \mu) &= \int_{x_1(\mu)}^{x_2(\mu)} ((x_2(\mu) - x)(x - x_2(\mu)))^{1/p'} dx \\ &= \left(\frac{x_2(\mu) - x_1(\mu)}{2} \right)^{1+2/p'} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{1/p'} dt = B\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{p'}\right) \left(\frac{\mu^2}{4} + 1\right)^\Theta, \end{aligned}$$

поскольку

$$x_{1,2}(\mu) = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1}, \quad x_2(\mu) - x_1(\mu) = 2\sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1}.$$

3) Случай $q = \infty$. При $0 < \mu \leq 1$ имеем

$$J(p, \infty, \mu) = \lim_{q \rightarrow \infty} J(p, q, \mu) = \int_{-1}^1 (1 + \mu x)^{1/p'} dx = \frac{(1 + \mu)^{1+1/p'}}{(1 + 1/p')\mu} - \frac{(1 - \mu)^{1+1/p'}}{(1 + 1/p')\mu}.$$

Отсюда

$$F(\mu) = \frac{dJ}{d\mu} = \frac{1}{\mu^2(1 + 1/p')} \left(\left(\frac{\mu}{p'} - 1 \right) (1 + \mu)^{1/p'} + \left(\frac{\mu}{p'} + 1 \right) (1 - \mu)^{1/p'} \right).$$

Очевидно, что при $p = 1$ и $p = \infty$ $F \equiv 0$. Рассмотрим случай $1 < p < \infty$.

Заметим, что при разложении выражения

$$\left(\frac{\mu}{p'} - 1 \right) (1 + \mu)^{1/p'} + \left(\frac{\mu}{p'} + 1 \right) (1 - \mu)^{1/p'}$$

в степенной ряд по μ коэффициенты при $1, \mu, \mu^2$ обращаются в 0. Поэтому $F(0) = 0$.

Далее, при $0 < \mu \leq 1$

$$(\mu^2 F(\mu))' = \frac{\mu}{p'} ((1 + \mu)^{1/p'-1} - (1 - \mu)^{1/p'-1}) < 0$$

и, следовательно, $F(\mu) < 0$. Если $\mu > 1$, то

$$J(p, \infty, \mu) = \int_{-1/\mu}^1 (1 + \mu x)^{1/p'} dx = \frac{(1 + \mu)^{1+1/p'}}{(1 + 1/p')\mu}.$$

Далее,

$$\frac{dJ}{d\mu} = \frac{(1 + \mu)^{1/p'}}{\mu^2(1 + 1/p')} \left(\frac{\mu}{p'} - 1 \right),$$

очевидно, обращается в 0 при $\mu = p'$. При этом прямым вычислением можно показать, что минимум в соответствующей задаче (3), (4), равный $2(1 + p')^{1/p'}$, достигается на ломаной экстремали

$$x(t) = \frac{1}{p'} \cdot \begin{cases} |2(1 + p')^{1/p'} t - 1|^{p'} - 1, & \text{если } 0 \leq t \leq t_0, \\ |2(1 + p')^{1/p'} (t - 1) - 1|^{p'} - 1, & \text{если } t_0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $t_0 = (1 + (1 + p')^{-1/p'})/2$.

4) Случай $p = 1, q < \infty$. Из формулы (13) имеем

$$J(1, q, \mu) := \lim_{p \rightarrow 1} J(p, q, \mu) = x_2(\mu) - x_1(\mu).$$

Из формул (15) вытекает, что $x_1'(0) = x_2'(0) = 1/q$, а дифференцируя (15) три раза, получаем

$$\begin{aligned}x_1''(0) &= -x_2''(0) = \frac{q-3}{q^2}, & x_1'''(0) &= x_2'''(0) = \frac{2(q-4)(q-2)}{q^3}, \\x_1^{(4)}(0) &= -x_2^{(4)}(0) = \frac{(q-5)(2q-5)(3q-5)}{q^4}.\end{aligned}$$

Поэтому при малых μ

$$x_2(\mu) - x_1(\mu) = 2 - \mu^2 \frac{q-3}{q^2} + \mu^4 \frac{(5-q)(2q-5)(3q-5)}{12q^4} + \dots$$

Таким образом, как и при $p > 1$, нуль является для J точкой локального максимума при $q > 3p$ и локального минимума при $q \leq 3p$.

5) Случай $p = \infty, q < \infty$. Имеем

$$J(\infty, q, \mu) = \int_{x_1(\mu)}^{x_2(\mu)} (1 + \mu x - |x|^q) dx = \left(x + \mu \frac{x^2}{2} - \frac{|x|^q x}{q+1} \right) \Big|_{x_1(\mu)}^{x_2(\mu)}.$$

Выражая последнее слагаемое из уравнения для x_1 и x_2 , получаем

$$J(\infty, q, \mu) = \frac{q}{q+1} (x_2(\mu) - x_1(\mu)) + \frac{(q-1)\mu}{2(q+1)} (x_2^2(\mu) - x_1^2(\mu)).$$

Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$\frac{dJ}{d\mu} = \int_{x_1(\mu)}^{x_2(\mu)} x dx = \frac{(x_2(\mu))^2 - (x_1(\mu))^2}{2}.$$

Из (15) видно, что x_1 и x_2 монотонно возрастают по μ . Поскольку $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 1$, при $\mu > 0$ выполнено $dJ/d\mu > 0$.

5. Более общая постановка и геометрический смысл функционала J . Рассмотрим следующее уравнение ($1 < p, q < \infty$):

$$|x|^q + |y|^p = ax + by + 1,$$

которое определяет на плоскости (x, y) выпуклую замкнутую кривую, являющуюся проекцией на эту плоскость линии пересечения поверхностей

$$z_1 = |x|^q + |y|^p, \quad z_2 = ax + by + 1.$$

Ясно, что для исследования зависимости от a и b площадей $S(p, q, a, b)$ (при этом полагаем $S(p, q, a, 0) \equiv 2J(p', q, a)$), ограниченных этими кривыми, достаточно считать $a \geq 0, b \geq 0$.

В частности, при $p = q = 2$ получаем двупараметрическое семейство окружностей $x^2 + y^2 = ax + by + 1$. Таким образом,

$$S(2, 2, a, b) = \pi \left(1 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Аналогично п. 3 зададим вопрос в более общей постановке: исследовать монотонность $S(p, q, a, b)$ в зависимости от аргументов a, b при фиксированных p, q .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Keller J. B. The shape of the strongest column // Arch. Rational Mech. Anal. 1960. V. 5. P. 275–285.
- [2] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля // УМН. 1984. Т. 39. № 2. С. 151–152.
- [3] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценке первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1990. № 6. С. 75–78.
- [4] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценке главного собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1991. № 6. С. 5–11.
- [5] Egorov Yu. V., Kondratjev V. A. On a Lagrange problem // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1993. V. 317. P. 903–918.
- [6] Никитин Я. Ю. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. М.: Наука, 1995.
- [7] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [8] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. сочинений. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
- [9] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977.
- [10] Dacorogna B., Ganbo W., Subiá N. Sur une généralization de l'inégalité de Wirtinger // Ann. Inst. H. Poincaré. 1992. V. 9. № 1. P. 29–50.

Московский автомобильно-дорожный институт
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: busl@adi.msk.su

Поступило
19.12.97