Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Витушкин, Описание гомологий разветвленной накрывающей над $\mathbb{C}^2$, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 839–846

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 07:06:07

УДК 517.5

ОПИСАНИЕ ГОМОЛОГИЙ РАЗВЕТВЛЕННОЙ НАКРЫВАЮЩЕЙ НАД $\mathbb{C}^2$

А. Г. Витушкин

Получено описание группы двумерных гомологий одной конкретной поверхности, представляющее интерес в связи с гипотезой о якобиане. Вычислены индекс самопересечения и значение характеристики Черна образующей этой группы.

Библиография: 8 названий.

1. Формулировка результата. В статье [1] построен пример трехлистной накрывающей над $\mathbb{C}^2$, обладающей следующими свойствами. Эта накрывающая (M, F) состоит из гладкого многообразия M вещественной размерности 4 и гладкого отображения F этой поверхности на все $\mathbb{C}^2$. Многообразие M , в свою очередь, состоит из многообразия M^* (*регулярная часть накрывающей*), гомеоморфного $\mathbb{R}^4$, и гладкой поверхности K (*кривая ветвления*), гомеоморфной $\mathbb{R}^2$. Отображение F локально гомеоморфно на регулярной части накрывающей и необратимо вблизи особой кривой. Точка общего положения имеет три прообраза, а всякая точка из проекции особой кривой имеет два прообраза, один из которых принадлежит особой кривой, а второй – регулярной части. Вокруг проекции особой кривой накрывающая имеет ветвление кратности 2.

Содержание данной статьи составляет следующая

ТЕОРЕМА. *Группа двумерных целочисленных гомологий с компактными носителями поверхности M – это свободная группа ранга 1. В качестве образующей может быть выбрана симплициальная вложенная сфера S , пересекающаяся с особой кривой лишь в одной точке и имеющая с этой кривой индекс пересечения -1 . При этом индекс самопересечения $S \cdot S = -3$ и значение характеристики Черна $H(S) = 1$.*

Предполагается, что ориентация выбрана естественным образом. На M она поднимается с $\mathbb{C}^2$. Как будет видно из дальнейшего, проекция особой кривой является графиком некоторой функции $y = f(x)$, поэтому естественно в данном случае определить ориентацию особой кривой, поднимая ее с координатной плоскости X переменной x на проекцию особой кривой, а с нее и на саму кривую.

Определение характеристики $H(S)$ также требует пояснения, поскольку на поверхности M комплексная структура не определена, а следовательно, не определен и комплексный класс Черна. Однако, поверхность M определена одновременно с ее отображением в комплексное пространство, а в такой ситуации аналог класса Черна имеется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Эта характеристика, вообще говоря, зависит от отображения, но в случае, когда поверхность имеет комплексную структуру и отображение голоморфно, она не зависит от отображения и совпадает со значением первого класса Черна. Не затрагивая общий случай, отметим, что в рассматриваемой ситуации для всякой компактной поверхности $S \subset M$ значение этой характеристики определяется формулой $H(S) = -(n-1) \cdot S \cdot K$, где n – степень отображения F в малой окрестности кривой K . В рассматриваемом случае $n = 2$ и, следовательно, для сферы S (см. теорему) имеем $H(S) = 1$. Эта, хотя и тривиальная, часть теоремы будет существенной при сравнении топологических характеристик алгебраических накрывающих с характеристиками обсуждаемого примера.

Пример был построен в связи с известной гипотезой о якобиане. Напомним ее, формулируя в удобном для наших целей виде: если полиномиальное отображение $\mathbb{C}^2$ в себя локально обратимо, то оно обратимо в целом и, следовательно, обратное отображение также задается многочленами. Если предположить, что существует контрпример, то обратное отображение будет многозначным и его график после надлежащего пополнения даст нам разветвленную накрывающую над $\mathbb{C}^2$. Свойства такой накрывающей весьма необычны, и это, по-видимому, отрицает существование контрпримера. Поэтому изучение конкретных примеров разветвленных накрывающих, в частности вычисление топологических характеристик обсуждаемой поверхности, представляется полезным. Вычисление, как известно, дело простое. Трудность только в том, чтобы получить правильный ответ. В этом смысле вычисление индекса самопересечения оказалось весьма трудоемким, и это, по-видимому, оправдывает подробность изложения. Необходимые для вычислений свойства накрывающей приведены без доказательства ниже в п. 1, 2. Полное изложение конструкции приведено в [1].

Сформулированная теорема – это практически все, что можно сказать о гомологиях накрывающей. Очевидно, что ее одномерная фундаментальная группа, а следовательно, и одномерная группа гомологий тривиальны. Вблизи бесконечности одномерная группа гомологий нетривиальна. А именно, ограничение накрывающей поверхности на трехмерную сферу достаточно большого радиуса имеет нетривиальную одномерную группу гомологий с целочисленными коэффициентами. Но всякий цикл, будучи взят с коэффициентом 3, становится тривиальным.

С точки зрения *поиска доказательства гипотезы о якобиане* привлекает внимание одно совпадение. Из теоремы следует, что $|H| + S \cdot S = -2$. Соотношения такого типа играют ключевую роль в приложениях теории инвариантов Зайберга–Виттена, например в доказательстве гипотезы Тома [2], [3]. Интерес к этой, казалось бы случайной, аналогии подкрепляется тем, что с использованием этих соотношений получены ответы на некоторые вопросы, возникшие много лет назад в связи с гипотезой о якобиане. В [4] С. Ю. Немировский показал, в частности, что в $\mathbb{CP}^2$ оболочка голоморфности всякой гладко вложенной гомологически нетривиальной двумерной сферы совпадает с $\mathbb{CP}^2$, т.е. в окрестности такой сферы нет непостоянных голоморфных функций. Им доказано также, что к замкнутой области из $\mathbb{C}^2$, биголоморфно эквивалентной шару, нельзя подклеить вложенный аналитический диск так, чтобы его граница лежала на границе области, а внутренность – вне области (см. [5]). Доказательство аналогичного утверждения для биголоморфного образа шара, лежащего в алгебраической разветвленной накрывающей над $\mathbb{C}^2$, дало бы элементарное доказательство гипотезы о якобиане.

Известно, что если полиномиальное отображение имеет кратность (число прообразов точки) меньшую чем 5, то якобиан такого отображения вырождается (см. [6], [7]).

В частности, это означает, что не существует трехлистной голоморфной покрывающей над $\mathbb{C}^2$, склеенной из $\mathbb{C}^2$ и комплексной прямой. Наряду с этим С. Ю. Оревков [8] построил аналог такой покрывающей над шаром. Его поверхность состоит из области, гомеоморфной шару, и аналитического диска, проекция которого лежит на алгебраической кривой. Эта поверхность получена из обсуждаемой покрывающей посредством аппроксимаций соответствующих функций, определяющих топологию поверхности, и потому получилось так, что эти две поверхности оказались топологически эквивалентны. Тем самым, для поверхности Оревкова выполняется все, сказанное в теореме.

Вторая часть этой статьи (она появится позже) будет посвящена изучению алгебраических покрывающих, для которых образующая группы двумерных гомологий удовлетворяет соотношению $|H(S)| + S \cdot S = -2$.

2. Построение кривой ветвления. В качестве кривой ветвления (впоследствии это будет проекция из M в $\mathbb{C}^2$ особой кривой K) принимается график некоторой функции $y = f(x)$, на которую накладывается ряд условий. Эта функция определена на всей плоскости переменной x , она четырехзначна, имеет три точки ветвления $x_1 = 1, x_2 = i, x_3 = -i$ и во всякой другой точке плоскости все ее четыре значения различны. Функция непрерывна и вблизи каждой из точек ветвления два ее значения постоянны, а два других значения задаются формулой $y_j + \sqrt{x - x_j}$. Числа $\{y_j\}$ будут определены ниже. Функция будет доопределена на всей плоскости таким образом, чтобы на ее графике всякий одномерный цикл был тривиален; тогда ее график, т.е. кривая ветвления, будет гомеоморфна $\mathbb{R}^2$.

На координатной плоскости X фиксируем три кривые $\{L_j\}$, имеющие начальные и конечные точки в $x = 0$ и охватывающие точки ветвления $\{x_j\}$, и укажем, как должны переставляться значения функции при проходе точки по этим кривым. Предполагается, что кривые не имеют самопересечений и замыкания областей, которые они ограничивают, попарно пересекаются лишь в точке $x = 0$. Ориентация на кривых выбирается таким образом, чтобы при движении точки по кривой в положительном направлении касательный вектор вращался против часовой стрелки.

В точке $x = 0$ функция $f(x)$ принимает значения $f(0) = -1, -2, -3, -4$. Для всякого j при проходе точки x по пути L_j два значения функции $f(x)$ остаются постоянными, а другая пара значений переставляется, двигаясь вблизи некоторой кривой Λ_j , соединяющей начальные значения этой пары. Эти кривые не имеют самопересечений и выбираются следующим образом: при $j = 1$ переставляются значения -2 и -4 , а кривая, соединяющая эти точки, лежит в верхней полуплоскости; при $j = 3$ переставляются значения -1 и -3 , а соответствующая кривая лежит в нижней полуплоскости; наконец, при $j = 2$ переставляются значения -1 и -4 , а соединяющая кривая, выйдя из точки -1 идет по верхней полуплоскости, затем проходит между точками -2 и -3 и по нижней полуплоскости приходит в точку -4 .

На кривой Λ_j фиксируем какую-либо точку y_j и обозначим через K_j круг малого радиуса с центром в этой точке. Потребуем, чтобы точки, соответствующие переставляемым значениям, двигались по кривой, соблюдая следующие правила: сначала они идут навстречу друг другу по кривой и одновременно приходят на границу K_j ; далее каждая из них проходит половину границы круга, выбирая направление так, чтобы внутренность круга была слева; они одновременно уходят с круга и, расходясь по кривой в разные стороны, приходят к конечным значениям. Круг введен для того, чтобы, двигаясь, переставляемые точки оставались различными. Направление движения по границе

круга мы выбираем так, чтобы при проходе точки x вблизи точки x_j значения функции переставлялись по формуле $y_j + \sqrt{x - x_j}$. Таким образом, правило перестановки функции $f(x)$ задано, и оно таково, что позволяет продолжить ее на всю плоскость с выполнением всех указанных выше условий.

3. Построение накрывающей поверхности. Определим сначала ограничение поверхности M на координатную плоскость Y переменной y . Фиксируем три экземпляра этой плоскости. На первых двух листах проведем вертикальные (параллельные мнимой оси) разрезы от точки $y = -4$ вниз до бесконечности и переклеим эти листы крест-накрест, отождествляя левый край одного листа с правым краем другого. Аналогично переклеим второй и третий листы вдоль вертикального разреза, идущего от точки $y = -2$ вверх до бесконечности, а первый и третий листы переклеим вдоль каждого из двух вертикальных разрезов – первый разрез от точки $y = -1$ вниз до бесконечности, а второй от точки $y = -3$ вверх до бесконечности. Получилась связная трехлистная поверхность, накрывающая плоскость Y . В качестве отображения F принимается ее естественная проекция на плоскость Y .

Запомним, что при обходе вокруг точки -4 переставляются первый и второй листы, при обходе вокруг точки -2 переставляются второй и третий листы, а при обходе вокруг точки -3 так же, как и вокруг точки -1 переставляются первый и третий листы.

В [1] доказано, что построенную таким образом накрывающую можно продолжить до накрывающей над всем пространством $\mathbb{C}^2$, при этом будут выполнены все перечисленные выше условия на искомую поверхность M .

4. Построение образующей группы двумерных гомологий. На координатной плоскости Y фиксируем точку y_0 , лежащую в верхней полуплоскости на мнимой оси. Всякую кривую, лежащую в Y , проводя подходящую гомотопию, будем записывать в виде цепочки петель из набора Ω_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Петля Ω_j – кривая, имеющая начало и конец в точке y_0 . Выходя из y_0 , она идет по прямой к точке $y = -j$, обходит ее по окружности малого радиуса, двигаясь против часовой стрелки, и по той же прямой возвращается в точку y_0 . Поднимем путь Ω_j на поверхность M . Поднятая кривая состоит из трех компонент, которые мы обозначим через $\Omega_{i,l}$ ($l = 1, 2, 3$). Значение индекса l – номер листа, на котором лежит начальная точка дуги $\Omega_{i,l}$. Условимся, что, говоря о деформации дуг $\{\Omega_{i,l}\}$, мы будем иметь в виду деформацию внутри регулярной части поверхности M . Запомним, что дуги $\Omega_{1,2}$, $\Omega_{2,1}$, $\Omega_{3,3}$ и $\Omega_{4,1}$ тривиальны, т.е. стягиваемы в точку.

Спроектируем кривые L_j на плоскость $y = y_0$ и обозначим эти проекции через L_j^0 . Будем считать, что точка y_0 удалена от начала координат настолько, что на плоскости $y = y_0$ в некотором круге, содержащем кривые L_j^0 , нет точек ветвления накрывающей. Над этим кругом накрывающая распадается на три диска.

Пусть Ω – одна из нетривиальных дуг $\{\Omega_{i,l}\}$, а $L_j(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) – параметризация кривой L_j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Деформацией дуги Ω вдоль пути L_j будем называть непрерывное по t семейство дуг $\{\Omega(t)\}$ ($0 \leq t \leq 1$, $\Omega(0) = \Omega$) такое, что при всяком t дуга $\Omega(t)$ лежит в регулярной части накрывающей над плоскостью $x = L_j(t)$, а ее начало и конец – над точкой $(L_j(t), y_0)$. Потребуем, чтобы $\Omega(0) = \Omega$, и пусть $\Omega(1)$ – это путь, составленный из цепочки последовательно проходимых дуг из набора $\{\Omega_{i,l}\}$.

ЛЕММА 1. *Всякая деформация $\Omega(t)$ какой-либо петли вдоль кривой L_j порождает диск D , вложенный в регулярную часть накрывающей поверхности, граница которого при подходящем выборе ориентации равна $\Omega(1) - \Omega(0)$. Этот диск является объединением пары дисков, лежащих над плоскостью $y = y_0$, и поверхности, заметаемой семейством кривых $\Omega(t)$. Эта поверхность проектируется на плоскость X в кривую L_j , а каждый из пары указанных дисков – на всю область, ограниченную этой кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, начальная точка кривой $\Omega(t)$ (когда t изменяется от 0 до 1) пробегает на одном из листов замкнутую кривую и ограничивает один из двух искомым дисков, поскольку над некоторым кругом, лежащим в плоскости $y = y_0$ и содержащим кривую L_j^0 , накрывающая поверхность распадается на диски. Аналогично и концевые точки семейства образуют кривую, которая также заклеивается диском. Все сказанное в лемме о проекции очевидно.

ЛЕММА 2. *Деформация дуг $\Omega_{2,2}$, $\Omega_{1,1}$ и $\Omega_{1,3}$ вдоль кривых L_1, L_2, L_3 возможна, и порождаемые при этой деформации диски D_j имеют следующие границы:*

$$\partial D_1 = \Omega_{4,2} - \Omega_{2,2}, \quad \partial D_2 = \Omega_{1,1} - \Omega_{4,2} + \Omega_{3,2}, \quad \partial D_3 = -\Omega_{3,2} + \Omega_{2,2} + \Omega_{1,3}.$$

Формализация доказательства этого утверждения весьма трудоемка. Поэтому, как говорится, смотри и проверяй: правила перестановки значений функции, задающей кривую ветвления, приведены в конце п. 2. Отметим лишь одну существенную деталь конструкции, которая может остаться незамеченной. Сделаем это на примере деформации дуги $\Omega_{2,2}$. При движении точки x по кривой L_1 точка $f(x)$ движется по кривой Λ_1 от точки -2 к точке -4 и при этом проходит границу круга K не по нижней, а по верхней ее части. Поэтому петля, являющаяся проекцией на Y дуги $\Omega(t)$, охватывающая точку $f(x)$, может быть продеформирована таким образом, что идущая навстречу вторая точка пары, переставляемой вдоль пути Λ_1 , при всех значениях параметра t не попадет на дугу $\Omega(t)$. Если бы мы выбрали обход круга в другом направлении, то деформация петли была бы невозможна.

Обозначим через D_4 диск из M , лежащий над координатной плоскостью Y , имеющий границу $-\Omega_{1,3} - \Omega_{1,1}$.

ЛЕММА 3. *Поверхность $S^* = \bigcup_{i=1}^4 D_i$ – это симплициальная сфера без самопересечений, имеющая с особой кривой K накрывающей поверхности лишь одну общую точку и индекс пересечения $S^* \cdot K = -1$. (Ориентация сферы задается ориентацией дисков, см. лемму 2.)*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, диски D_i подклеиваются друг к другу каждый раз по связному множеству. Поэтому на S^* не мог образоваться нетривиальный цикл и, следовательно, S^* – это сфера. Из четырех дисков лишь D_4 имеет общую точку с особой кривой. Ориентация особой кривой поднята с плоскости переменной x (см. п. 1), а ориентация диска D_4 противоположна ориентации плоскости переменной y . Следовательно, $S^* \cdot K = -1$.

Поверхность M устроена достаточно просто, поэтому построенная сфера так же, как и всякая другая компактная поверхность, имеющая с особой кривой ненулевой индекс пересечения, является образующей группы двумерных гомологий. Этот факт очевиден. Выбор в качестве образующей специальной поверхности нужен нам лишь для реализации того, о чем идет речь далее.

5. Вычисление индекса самопересечения образующей. Малой деформацией сдвинем внутренность диска D_4 и интервал $\Omega_{1,3}$ (имеется в виду дуга $\Omega_{1,3}$ без ее начальной и конечной точек) таким образом, чтобы их проекция на плоскость $y = 0$ сдвинулась с точки $x = 0$ и стала малым интервалом кривой L_3 , примыкающим к начальной точке этой кривой. Разумеется, вместе с интервалом $\Omega_{1,3}$ мы деформируем и часть диска D_3 , примыкающую к этому интервалу. Ясно, что этот сдвиг мы можем считать гомеоморфным, требуя также, чтобы продеформированный диск пересекал особую кривую лишь в одной точке и притом трансверсально. Полученную после этой деформации сферу обозначим через S . Это и есть искомая сфера, упоминаемая в формулировке основной теоремы. В частности, деформация проделана для того, чтобы часть сферы S , лежащая над координатной плоскостью Y , не содержала внутренних точек.

Для подсчета индекса самопересечения нам надо продеформировать сферу S в некоторую сферу $S' \subset M$ и подсчитать число точек пересечения. Искомое преобразование Ψ мы получим с помощью преобразования Φ пространства $\mathbb{C}^2$ в себя. Преобразование Φ ставит в соответствие точке (x, y) точку с координатами $\varphi(x)$ и $y + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число, которое определим позже, а $\varphi(x)$ – гомеоморфизм плоскости на себя такой, что $|x - \varphi(x)| < \varepsilon$ и $\varphi(0) = 0$. Кроме того, требуется, чтобы это преобразование растягивало каждую кривую L_j так, чтобы кривая L_j оказалась внутри кривой $L'_j = \varphi(L_j)$ и всякая пара из шести кривых L_j ($j = 1, 2, 3$) и L'_j ($j = 1, 2, 3$) имела лишь одну общую точку $x = 0$.

ЛЕММА 4. *Сферу S можно продеформировать внутри поверхности M в сферу S' таким образом, чтобы полученное при этом отображение Ψ сферы S в S' было композицией $\Psi = F^{-1}(\Phi(F))$ (напомним, что F – проекция M в $\mathbb{C}^2$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое отображение Ψ , а вслед за ним и нужная деформация, получается так. Фиксируем на S небольшой диск, содержащий точку пересечения сферы с особой кривой K . Спроектируем этот диск в $\mathbb{C}^2$, сдвинем полученный образ преобразованием Φ , поднимем полученное на M и выделим компоненту, близкую к исходному диску. Так как сфера S пересекает поверхность K трансверсально, а ε мало, то полученная поверхность – тоже диск, близкий к исходному и пересекающий K лишь в одной точке. Продолжим эту процедуру проектирования, сдвига и поднятия по всевозможным путям на S , выходящим из точки пересечения S и K . При достаточно малых ε продолжение по путям возможно, и оно не зависит от пути в силу ацикличности сферы.

ЛЕММА 5. *Часть сферы S , лежащая над координатной плоскостью Y , состоит из четырех дуг $\Omega_{1,1}$, $\Omega_{2,2}$, $-\Omega_{3,2}$ и $\Omega_{4,2}$. Аналогично, часть сферы S' , лежащая над плоскостью Y , также состоит из четырех дуг $\Omega'_{1,1}$, $\Omega'_{2,2}$, $-\Omega'_{3,2}$ и $\Omega'_{4,2}$, получаемых из указанной выше четверки преобразованием Ψ .*

Отметим, что в лемме речь идет об ориентированных дугах. Ориентация определена, поскольку каждая из этих дуг принадлежит семейству ориентированных дуг, составляющих деформацию какой-либо дуги (см. леммы 1 и 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая, относящаяся к S , часть утверждения леммы, легко следует из леммы 2 с учетом выполненной деформации из S^* в S (см. начало этого пункта). Вторая часть следует из того, что участвующая в определении преобразования Ψ функция $\varphi(x)$ переводит в точку $x = 0$ только саму эту точку. Следовательно, часть сферы S' , лежащая над Y , является образом дуг из сферы S .

ЛЕММА 6. *Всякая точка пересечения S и S' является точкой пересечения какой-нибудь пары петель $\Omega \subset S$ и $\Omega' \subset S'$, перечисленных в лемме 5.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, часть сферы S , которая проектируется на плоскость X в кривую L_j , преобразование Ψ переводит в нечто, проектирующееся на ту же плоскость в L'_j . Ту часть сферы, которая лежит над плоскостью $y = y_0$, преобразование Ψ сдвигает в нечто, лежащее над плоскостью $y = y_0 + \varepsilon$. Поэтому S и S' имеют общие точки лишь над плоскостью Y и, следовательно, в силу леммы 4 их общая часть складывается из попарных пересечений дуг, указанных в формулировке леммы.

Приведем удобную для нас формулу вычисления индекса пересечения. Пусть p — общая точка пары дуг $\Omega \subset S$ и $\Omega' \subset S'$. Фиксируем на S и S' малые окрестности этой точки и обозначим через Δ и Δ' проекции этих окрестностей на плоскость X . Фиксируем далее малые окрестности этой точки на кривых Ω и Ω' и обозначим через Γ и Γ' их проекции на плоскость Y . Зададим ориентацию на полученных дугах. На дугах Γ и Γ' ориентация переносится с Ω и Ω' , а на дугах Δ и Δ' ориентация индуцируется кривыми $L = L_2 - L_1 - L_3$ и $L' = L'_2 - L'_1 - L'_3$. Подчеркнем, что ориентация этих кривых определяется порядком следования их частей. Поясним на примере: ориентация кривой L совпадает с ориентацией L_2 и противоположна ориентации L_1 и L_3 .

ЛЕММА 7. *Индекс пересечения сфер S и S' в точке p , принадлежащей дугам Ω и Ω' , вычисляется по формуле*

$$\text{ind}(\Omega, \Omega', p) = -(\Gamma \cdot \Gamma') \cdot (\Delta \cdot \Delta'). \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснование формулы (1) легко получить, вычислив соответствующий определитель. В правой части равенства в каждой из скобок учитывается один касательный вектор к первой поверхности и один касательный вектор ко второй поверхности. При вычислении индекса пересечения согласно стандартному определению составляется определитель четвертого порядка: первые два столбца — это касательные векторы первой поверхности, а вторая пара столбцов — это касательные векторы второй поверхности. Чтобы получить формулу (1), требуется перестановка двух столбцов. Поэтому в правой части поставлен знак минус.

ЛЕММА 8. *При обходе пути $L = L_2 - L_1 - L_3$ дуги, принадлежащие сфере S , деформируются (см. лемму 2) следующим образом: при обходе пути L_2 дуга $\Omega_{1,1}$ переходит в пару $-\Omega_{3,2} + \Omega_{4,2}$, далее при движении по пути $-L_1$ дуга $\Omega_{4,2}$ переходит в $\Omega_{2,2}$ и, наконец, при обходе пути $-L_3$ пара $-\Omega_{3,2} + \Omega_{2,2}$ переходит сначала в дугу $-\Omega_{1,3}$, а в конце обхода (это начало пути L_3) деформацией по диску D_4 кривая $-\Omega_{1,3}$ перетягивается в $\Omega_{1,1}$. Дуги из S' деформируются вдоль L' аналогично.*

Эта лемма легко следует из леммы 2 с учетом проделанной деформации сферы S^* в S .

Для завершения доказательства основной теоремы нам остается составить в уме (а нет ума — так на бумажке) рисунок взаимного расположения дуг $\Delta_{i,l}$ и $\Delta'_{j,k}$ (получаемых проектированием малых окрестностей в S и S' точки пересечения $\Omega_{i,l}$ и $\Omega'_{j,k}$ на плоскость X), а также рисунок взаимного расположения проекций петель на плоскость Y , не забывая при этом, на каких листах лежат эти петли. Если один из сомножителей (см. лемму 7) равен 0, то, естественно, нет необходимости вычислять второй. Поэтому сначала полезно перечислить случаи, когда один из сомножителей равен 0.

Ясно, что при $i > j$ $\Omega_{i,l} \cdot \Omega'_{j,k} = 0$, поскольку такие пары петель не пересекаются даже в проекции на плоскость Y . Далее для дуг на плоскости X имеем

$$\Delta_{1,1} \cdot \Delta'_{2,2} = \Delta_{2,2} \cdot \Delta'_{1,1} = \Delta_{2,2} \cdot \Delta'_{4,2} = -\Delta_{3,2} \cdot \Delta'_{2,2} = \Delta_{4,2} \cdot \Delta'_{2,2} = \Delta_{4,2} \cdot (-\Delta'_{3,2}) = 0.$$

Проверим оставшиеся случаи, когда оба сомножителя отличны от 0:

$$\begin{aligned} \text{ind}(\Omega_{1,1}, \Omega'_{1,1}) &= \text{ind}(\Omega_{1,1}, (-\Omega'_{3,2})) = \text{ind}(\Omega_{1,1}, \Omega'_{4,2}) \\ &= \text{ind}(\Omega_{2,2}, (-\Omega'_{3,2})) = \text{ind}((-\Omega_{3,2}), \Omega'_{4,2}) = -1, \\ \text{ind}((-\Omega_{3,2}), (-\Omega'_{3,2})) &= \text{ind}(\Omega_{4,2}, \Omega'_{4,2}) = 1. \end{aligned}$$

Здесь $\text{ind}(\Omega, \Omega')$ – сумма индексов пересечения сфер, взятая по всем точкам пересечения дуг Ω и Ω' .

Таким образом, получается, что $S \cdot S' = -3$. Тем самым, $S \cdot S = -3$. Равенство $H(S) = 1$ легко следует из нашего определения характеристики H . Основная теорема статьи доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Витушкин А. Г. Некоторые примеры в связи с проблемой обращения полиномиальных отображений $\mathbb{C}^n$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 269–279.
- [2] Kronheimer P. B., Mrowka T. The genus of embedded surfaces in the projective plane // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 797–808.
- [3] Morgan J. W., Szabo Z., Taubes C. H. A product formula for Seiberg–Witten invariants and the generalized Thom conjecture // J. Differential Geom. 1996. V. 44. P. 706–788.
- [4] Немировский С. Ю. Голоморфные функции и вложенные вещественные поверхности // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 4. С. 599–606.
- [5] Немировский С. Ю. О вложениях двумерной сферы в штейновы поверхности // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 4.
- [6] Оревков С. Ю. О трехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. С. 1231–1241.
- [7] Домрина А. В., Оревков С. Ю. О четырехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$. I. Случай неприводимой кривой ветвления // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 847–862.
- [8] Оревков С. Ю. Диаграммы Рудольфа и аналитическая реализация накрытия Витушкина // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 206–224.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
08.09.98