Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрина, С. Ю. Оревков, О четырехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$. I. Случай неприводимой кривой ветвления, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 847–862

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:14:30

УДК 517.55

О ЧЕТЫРЕХЛИСТНЫХ

ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ $\mathbb{C}^2$.

I. СЛУЧАЙ НЕПРИВОДИМОЙ КРИВОЙ ВЕТВЛЕНИЯ

А. В. Домрина, С. Ю. Оревкин

Статья посвящена гипотезе о якобиане: если $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ – полиномиальное отображение с постоянным якобианом, то f полиномиально обратимо. Основной результат статьи утверждает, что не существует четырехлистного полиномиального отображения с постоянным якобианом такого, что после разрешения точек неопределенности на бесконечности только у одной вклеенной кривой образ лежит не на бесконечности.

Библиография: 14 названий.

Введение. Пусть $f: \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ – полиномиальное отображение, якобиан которого равен ненулевой константе:

$$\det f' = \text{const} \neq 0. \quad (1)$$

Здесь $\tilde{\mathbb{C}}^2$ и $\mathbb{C}^2$ – два экземпляра комплексной плоскости. Известная гипотеза о якобиане состоит в том, что такое отображение f полиномиально обратимо (см. обзоры в [1], [2]).

Отображение f , удовлетворяющее (1), является полиномиально обратимым тогда и только тогда, когда общая точка из $\mathbb{C}^2$ имеет один прообраз. Число прообразов общей точки называется *топологической степенью* отображения. Известно, что полиномиальных отображений топологической степени 2 или 3, удовлетворяющих (1), не существует. Случай степени 2 элементарен, а случай степени 3 разобран в [3]. Нас интересует случай степени 4.

С помощью конечного числа σ -процессов на бесконечности можно продолжить f до регулярного рационального отображения $F: \tilde{X} \rightarrow X$, где $\tilde{X}, X$ – неособые компактные комплексные многообразия, содержащие $\tilde{\mathbb{C}}^2$ и $\mathbb{C}^2$ соответственно в качестве открытых подмножеств, а кривые $\tilde{L} := \tilde{X} \setminus \tilde{\mathbb{C}}^2$ и $L := X \setminus \mathbb{C}^2$ состоят из конечного числа неособых рациональных компонент, пересекающихся трансверсально и не более чем попарно.

Неприводимая компонента $\tilde{g}$ кривой $\tilde{L}$ называется *дикритической*, если $F(\tilde{g}) \not\subset L$ и F непостоянна на $\tilde{g}$. Основным результатом настоящей статьи является

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01218. Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке фонда DGICYT (Испания), грант SAB95-0502.

ТЕОРЕМА 1. *Не существует четырехлистного локально обратимого полиномиального отображения $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, имеющего одну дикритическую компоненту.*

Мы используем подход, предложенный в [4]–[6]. С помощью этого подхода мы дадим в отдельной статье доказательство того, что не существует полиномиальных отображений $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ топологической степени 4 таких, что якобиан f есть ненулевая константа. Это доказательство принципиально не отличается от доказательства теоремы 1, но требует рассмотрения большего количества вариантов.

Приведем схему доказательства теоремы 1. Раздувая многообразия $\tilde{X}$ и X , можно добиться того, что образ дикритической компоненты трансверсально пересекает L . Взвешенные двойственные графы кривых $\tilde{L}$ и L являются унимодулярными деревьями (определитель матрицы пересечения равен ± 1). Взвешенное унимодулярное дерево определяется топологическим типом графа и определителями матриц пересечения ветвей в нодальных (т.е. валентности не меньше 3) вершинах (см. [7]–[9], где эти данные называются *сплайс-диаграммой*). Поскольку топологическая степень F ограничена, имеется только конечное число возможностей для комбинаторной структуры отображения сплайс-диаграмм. Мы рассматриваем каждую из них по отдельности.

Из [5] следует, что веса сплайс-диаграммы кривой $\tilde{L}$ (т.е. определители ветвей) восстанавливаются по весам сплайс-диаграммы кривой L и по порядкам ветвления в точках компонент, соответствующих нодальным вершинам. Поскольку $\tilde{L}$ получена раздутиями из бесконечной прямой, имеются довольно сильные ограничения на сплайс-диаграмму $\tilde{L}$. Совмещая эти ограничения с условием $F^*(d\tilde{x} \wedge d\tilde{y}) = \text{const } dx \wedge dy$, записанным в терминах канонических дивизоров многообразий X и $\tilde{X}$ (см. лемму 12), мы в каждом из случаев приходим к противоречию (коэффициенты разложения $K_{\tilde{L}} = \sum_{\tilde{l} \subset \tilde{L}} k_{\tilde{l}} \tilde{l}$ также выражаются в терминах сплайс-диаграмм, см. лемму 4).

Пример [4] (см. также [6]) показывает, что без дополнительных ограничений этот подход не работает для случаев большой топологической степени. Топологическая степень отображения, построенного в [4], равна 36. Меняя численные данные, можно понизить топологическую степень до 9 – это минимальная возможная степень для примеров такого рода. Поэтому представляется весьма правдоподобным, что с помощью методов, приведенных в этой статье, можно доказать, что топологическая степень возможного контрпримера к гипотезе о якобиане не меньше 9.

Заметим, что степени многочленов, определяющих отображение топологической степени 9, должны равняться (48, 64). Эта пара чисел приведена в [10], [11] в качестве первого сложного случая. Более того, все численные данные для других примеров, аналогичных [4], также хорошо соответствуют численным данным из [11] (это наблюдение было сообщено второму автору статьи П. Кассу-Ногес). Таким образом, двигаясь разными путями, мы наталкиваемся на одно и то же препятствие.

1. Предварительные сведения. Пусть Y – неособая аналитическая поверхность, кривая $L \subset Y$ приведена (т.е. не имеет кратных компонент) и все ее неприводимые компоненты суть неособые замкнутые комплексные кривые, пересекающиеся трансверсально и не более чем попарно. Сопоставим кривой L граф Γ_L , называемый *двойственным графом кривой L* , вершины которого соответствуют неприводимым компонентам L , а ребра – точкам пересечения неприводимых компонент. При этом некомпактные кривые изображаются стрелками.

Пара (Y, L) называется *правильной*, если Y – компактная алгебраическая поверх-

ность и все неприводимые компоненты кривой L суть алгебраические кривые. В этом случае граф Γ_L является взвешенным, его веса – это индексы самопересечения. Пусть A_L есть матрица пересечений кривой L . Введем *определитель* Γ_L по формуле $\det \Gamma_L = \det(-A_L)$. Будем считать, что если $L = \emptyset$ или L является точкой, то (Y, L) – правильная пара, при этом $\Gamma_L = \emptyset$ и $\det \Gamma_L = 1$.

Если (Y, L) – правильная пара и кривая C трансверсально пересекает L , то *двойственным графом* $\Gamma_{L,C}$ *кривой* C *возле* L мы будем называть двойственный граф пары $(U, (L \cup C) \cap U)$, где U – достаточно малая окрестность кривой L ; таким образом, стрелки на этом графе соответствуют росткам кривой C возле L . Остальные вершины снабжены весами. В частности, если $C = \emptyset$, то $\Gamma_{L,C} = \Gamma_L$. Если L – простая двойная точка кривой C , то двойственный граф кривой C возле L имеет вид $\longleftrightarrow$.

Все рассматриваемые ниже графы будут двойственными графами некоторых кривых. Поэтому *подграфом* графа Γ будем называть граф Γ' такой, что

- а) вершины Γ' являются вершинами Γ ;
- б) если две вершины Γ' соединены ребром графа Γ , то они должны быть соединены и некоторым ребром Γ' .

Таким образом, подграф определяется своими вершинами. В дальнейшем мы будем обозначать неприводимые компоненты и отвечающие им вершины одинаковыми строчными буквами, а кривые (вообще говоря, приводимые) и соответствующие им подграфы одинаковыми прописными буквами. *Валентность* $\nu_\Gamma(s)$ вершины s графа Γ равна числу выходящих из нее ребер. Вершина s называется *концевой*, *линейной* или *нодальной* вершиной графа Γ , если ее валентность равна 1, 2 или больше 2 соответственно. Связный подграф C графа Γ называется *линейным* или *линейной цепочкой*, если для любой вершины $a \in C$ имеет место $\nu_\Gamma(a) \leq 2$. *Ветвями графа* Γ *в вершине* v (или *ветвями*, *выходящими из вершины* v) называются компоненты связности графа $\Gamma - v$. Вершина v называется *смежной* с вершиной g , если они соединены ребром. Подграф Q называется *смежным* с вершиной v , если $v \notin Q$ и v смежна с некоторой вершиной подграфа Q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть граф Γ является *деревом* – связным графом без циклов – и a, b – различные вершины графа Γ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \text{br}_a(b, \Gamma) &- \text{ветвь графа } \Gamma, \text{ выходящая из вершины } a, \text{ которая содержит } b; \\ (ab)_\Gamma &= \text{br}_a(b, \Gamma) \cap \text{br}_b(a, \Gamma); \\ [ab]_\Gamma &= (ab)_\Gamma \cup \{a\}; \\ [ab]_\Gamma &= [ab]_\Gamma \cup \{b\}; \\ \langle ab \rangle_\Gamma &- \text{минимальный связный подграф графа } \Gamma, \text{ содержащий } a \text{ и } b; \\ \delta(ab)_\Gamma &= [ab]_\Gamma - \langle ab \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Все графы, рассматриваемые в статье, являются деревьями.

Мы будем опускать индекс Γ в обозначениях определения 1, если из контекста ясно, о каком графе Γ идет речь, например: $\text{br}_a(b)$, (ab) , и т.д.

Используя правило Крамера для нахождения матрицы обратной к A_Γ и формулу Якоби для минора обратной матрицы, несложно доказать (см. [12, (1.2)]) следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть Γ – взвешенный граф, a, b – вершины графа Γ . Тогда

$$\det(ab) \det \Gamma = \det \text{br}_a(b) \det \text{br}_b(a) - \det(\Gamma - [ab]) (\det \delta(ab))^2. \quad (2)$$

В дальнейшем мы будем называть (2) *формулой для определителя “ребра”*. В случае, если (ab) является линейной цепочкой и $\det \Gamma = \pm 1$, формула (2) была доказана в работе Эйзенбуда и Неймана [7], где она называлась формулой для определителя ребра.

ЛЕММА 2 [9, следствие 2.2]. Пусть Γ – взвешенный граф и $\det \Gamma = \pm 1$. Тогда определители всех ветвей, выходящих из одной и той же вершины, взаимно просты. Если один из них равен 0, то любой другой должен равняться 1 или -1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть l – прямая в $\mathbb{CP}^2$, а (Y, L) – правильная пара, полученная раздутиями из $(\mathbb{CP}^2, l)$. Тогда мы будем называть пару (Y, L) *стягиваемой к $\circ^+_{+1}$* , а собственный прообраз l *корнем* графа Γ_L . (Заметим, что в этом случае Γ_L является деревом, $\det \Gamma_L = -1$.)

Сплайс-диаграммой Эйзенбуда–Неймана (это определение является менее общим, чем приведенное в [7], [8]) *кривой C возле L* называется граф $\Gamma_{L,C}$, в котором каждая линейная цепочка заменена ребром и в начале каждого ребра, выходящего из каждой нодальной вершины v , указан определитель ветви графа Γ_L , начинающейся с этого ребра.

ЛЕММА 3. Пусть Γ – граф, стягиваемый к $\circ^+_{+1}$, v – его корень и s – произвольная вершина. Если $s \neq v$, то определители всех ветвей графа $\Gamma - \text{br}_s(v)$, выходящие из вершины s , кроме быть может одного, равны 1. Определители всех ветвей, выходящих из вершины v , равны 1.

ЛЕММА 4. Пусть Γ – граф, стягиваемый к $\circ^+_{+1}$, и v – его корень; пусть Q – подграф графа Γ такой, что $v \notin Q$. Тогда $\det Q > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Форма пересечения любой ветви, выходящей из v , отрицательно определена.

Пусть (Y, L) стягивается к $\circ^+_{+1}$, l_0 – корень графа L и $l_1, \dots, l_n$ – другие неприводимые компоненты L . Пусть $K_Y = \sum_{j=0}^n k_j l_j$ – канонический дивизор многообразия Y . Записывая формулу присоединения для каждой l_j , получим линейную систему уравнений на переменные $k_0, \dots, k_n$.

Рис. 1

Решая ее по правилу Крамера, выразим k_j через определители ветвей Γ_L (см., например, [12, леммы 1.1 и 2.1]). Ясно, что достаточно написать эти выражения только для коэффициентов k_0 и k_1 . Из леммы 3 следует, что сплайс-диаграмма кривой L возле подграфа $\langle l_0 l_1 \rangle$ имеет вид, указанный на рис. 1. Поэтому $k_0 = -3$,

$$k_1 = -1 - q_0 - p_0 + \sum_{j=1}^m q_0 \cdots q_{j-1} (q_j - 1) (p_j - 1). \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (3) аналогична выражениям числа Милнора и числа Милнора на бесконечности через сплайс-диаграммы [7], [8]. С помощью формулы присоединения они легко выражаются одна через другую.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если граф Γ_L линейен, то $k_1 = -1 - \det B_1 - \det B_2$, где B_1, B_2 – ветви графа Γ (возможно пустые), выходящие из вершины l_1 .

В оставшейся части п. 1 мы будем использовать следующие обозначения: $f: (\tilde{Y}, \tilde{L}) \rightarrow (Y, L)$ – регулярное отображение правильных пар, $\tilde{C}$ и C – кривые, трансверсальные $\tilde{L}$ и L соответственно, причем $f^{-1}(L) = \tilde{L}$, $f^{-1}(C) = \tilde{C}$ и якобиан отображения f не обращается в 0 вне $\tilde{L} \cup \tilde{C}$.

Мы будем считать, что f удовлетворяет условию минимальности. Это означает, что не существует (-1) -кривой $\tilde{c} \subset \tilde{Y}$ (т.е. рациональной неособой кривой с $\tilde{c}^2 = -1$), на которой f постоянно. Этому условию будут удовлетворять все рассматриваемые в статье отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\tilde{E} \subset \tilde{Y}$. Определим $\text{Deg } \tilde{E} = \min_U \deg f|_U$, где U пробегает все окрестности множества $\tilde{E}$ (в комплексной топологии), на которых f собственнo.

Пусть f непостоянно на неприводимой кривой $\tilde{l} \subset \tilde{Y}$. Обозначим через $n(\tilde{l})$ порядок ветвления f вдоль $\tilde{l}$ (т.е. $n(\tilde{l}) = \text{Deg } x$ для общей точки $x \in \tilde{l}$) и положим $m(\tilde{l}) := \deg f|_{\tilde{l}}$. Если кривая $f(\tilde{l})$ неособа, то $\text{Deg } \tilde{l} = m(\tilde{l})n(\tilde{l})$. Если f неособо в окрестности точки $p \in \tilde{l}$, то обозначим через $m_p(\tilde{l})$ порядок ветвления $f|_{\tilde{l}}$ в точке p .

Допустим, что f непостоянно на $\tilde{l}$ и кривая $l = f(\tilde{l})$ неособа. Пусть $p \in l$, $\{p_1, \dots, p_k\} = f^{-1}(p)$. Из определения $m(\tilde{l})$ следует, что

$$m_{p_1}(\tilde{l}) + \dots + m_{p_k}(\tilde{l}) = m(\tilde{l}). \quad (4)$$

ФОРМУЛА РИМАНА–ГУРВИЦА. Пусть f непостоянно на неособой рациональной кривой $\tilde{l} \in \tilde{L}$ (напомним, что пара (Y, L) правильная, значит кривая $f(\tilde{l})$ неособа). Пусть $\tilde{l} \cap (\tilde{L} + \tilde{C} - \tilde{l}) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Тогда

$$2(m(\tilde{l}) - 1) = \sum_{j=1}^k (m_{p_j}(\tilde{l}) - 1). \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Подграф $\tilde{\Gamma}' \subset \tilde{\Gamma}$ называется подграфом постоянной степени, если $\text{Deg } \tilde{l} = \text{Deg } \tilde{\Gamma}'$ для всех $\tilde{l} \in \tilde{\Gamma}'$. Мы будем считать, что ребра также являются подграфами постоянной степени. Если ребро $\tilde{\Gamma}'$ соединяет вершины $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$, положим $\text{Deg } \tilde{\Gamma}' := \text{Deg } \tilde{q}$, где $\tilde{q}$ – точка пересечения кривых $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Предположим, что сплайс-диаграмма C возле L имеет вид $\longleftrightarrow$ и c_1, c_2 – ростки кривой C , отвечающие стрелкам, т.е. либо L – двойная точка кривой C , либо линейная цепочка, крайние компоненты которой трансверсально пересекают c_1 и c_2 . Тогда для любой связной компоненты $\tilde{L}_1$ множества $\tilde{L}$

- сплайс-диаграмма $\tilde{C}$ возле $\tilde{L}_1$ имеет вид $\longleftrightarrow$ (обозначим ростки кривой $\tilde{C}$ возле $\tilde{L}_1$ через $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$);
- $\tilde{L}_1$ является подграфом постоянной степени;
- если $\tilde{p}_i = \tilde{c}_i \cap \tilde{L}_1$, $i = 1, 2$, то $\text{Deg } \tilde{L}_1 = m_{\tilde{p}_i}(\tilde{c}_i)n(\tilde{c}_i)$, $i = 1, 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [5]. *Предположим, что*

- 1) $\tilde{L}_1$ – компонента связности кривой $\tilde{L}$;
- 2) двойственные графы $\Gamma_{\tilde{L}_1}$ и Γ_L являются деревьями;
- 3) существует неприводимая компонента $\tilde{l} \subset \tilde{L}_1$, на которой f непостоянно и $\text{Deg } \tilde{l} = \text{Deg } \tilde{L}_1$.

Пусть $l = f(\tilde{l})$. Тогда

$$\frac{\det(\tilde{L}_1 - \tilde{l})}{\det \tilde{L}_1} = \frac{n(\tilde{l})}{m(\tilde{l})} \cdot \frac{\det(L - l)}{\det L}. \quad (6)$$

Если один из знаменателей равен 0, то другой тоже равен 0.

ЛЕММА 5 [5]. *Предположим, что выполнены условия 1), 2) предложения 2 и $\tilde{L}_1$ является подграфом постоянной степени. Тогда*

- а) если $\tilde{C} \cap \tilde{L}_1 = \{\tilde{x}\}$, $\tilde{x} \in \tilde{c} \subset \tilde{C}$, то

$$\frac{\det \tilde{L}_1}{\det L} = \frac{1}{m_{\tilde{x}}(\tilde{c})} = \frac{n(\tilde{c})}{\text{Deg } \tilde{L}_1}; \quad (7)$$

- б) если $\tilde{C} \cap \tilde{L}_1 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$, $\tilde{x}_i \in \tilde{c}_i \subset \tilde{C}$, то

$$\frac{\det \tilde{L}_1}{\det L} = \frac{n(\tilde{c}_1)}{m_{\tilde{x}_2}(\tilde{c}_2)} = \frac{n(\tilde{c}_1)n(\tilde{c}_2)}{\text{Deg } \tilde{L}_1}. \quad (8)$$

2. Свойства дикритической компоненты и ее разрешения на бесконечности. Приступим к доказательству теоремы 1. Предположим противное: существует четырехлистное отображение f с одной дикритической компонентой. Пусть $\tilde{X}, X, F, \tilde{L}, L$ – те же, что и во введении. Поскольку $\tilde{X}$ и X получены раздутиями из $\mathbb{CP}^2$, пары $(\tilde{X}, \tilde{L})$ и (X, L) стягиваемы к $\circ^1$.

Из [3, лемма 4.2] следует, что порядок ветвления отображения F вдоль дикритической компоненты равен 1, 2 или 3. Невозможность ветвления порядка 3 доказана в [3, замечание к лемме 5.3]. Если порядок ветвления равен 1, то F есть неразветвленное накрытие над $\mathbb{C}^2$ вне конечного множества точек, что также невозможно. Таким образом, остается лишь случай ветвления порядка 2.

Обозначим через $\tilde{g}$ дикритическую компоненту отображения f и положим $g = F(\tilde{g})$, $\tilde{L}_\infty = F^{-1}(L)$. Из [3, лемма 4.2] вытекает, что $m(\tilde{g}) = 1$, $n(\tilde{g}) = 2$. Разрешая, если необходимо, особенности g на бесконечности, можно считать, что

- А) $\tilde{g}$ пересекает $\tilde{L}_\infty$ ровно в одной точке (см. [3]), которую обозначим через $\tilde{p}$; при этом $\tilde{L}_\infty$ является ветвью $\tilde{L}$ в вершине $\tilde{g}$;
- В) пересечение $g \cap L = p := F(\tilde{p})$ трансверсально и кривая g гладка в p .

Будем считать, что $\tilde{X}$ и X – минимальные возможные многообразия при этих условиях, т.е.

- С) F удовлетворяет условию минимальности.

Полиномиальным автоморфизмом $\mathbb{C}^2$ можно добиться того, что

- Д) в некоторых аффинных координатах (x, y) на $\mathbb{C}^2$ ни одно из чисел $\deg_x g, \deg_y g$ не делит другое;
 Е) (*минимальность* L) кривая L не содержит (-1) -кривых c таких, что $c \cdot (L - c) \leq 2$, кроме быть может корневой вершины.

Напомним, что мы используем одни и те же обозначения для кривых $\tilde{L}, \tilde{L}_\infty, L$ и их двойственных графов, а также для неприводимых компонент и соответствующих им вершин. Все рассматриваемые ниже графы из определения 1 являются подграфами графов $\tilde{L}$ и L . Поэтому в обозначениях определения 1 для этих графов мы будем опускать индекс объемлющего графа.

Рис. 2

Сплайс-диаграмма Эйзенбуда–Неймана кривой g возле L устроена, как показано на рис. 2. Обозначим через R_a, L_a, D_a ветви L , выходящие из нодальной вершины a в направлениях соответственно направо, налево и вниз.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для любой нодальной вершины a имеет место*

- а) $\det R_a = 1, \det D_a > 1$;
- б) $\det L_a > 1$;
- с) $\det L = -1$.

Все утверждения предложения 3, кроме утверждения б), очевидны. В терминах характеристических пар Пюизо это неравенство было доказано в [13], [14] (интерпретацию характеристических пар в терминах определителей подграфов см. в [7], [8]). В обозначениях [13], [14] $\det L_a = r_i/d_{i+1}$, где a есть i -я (слева) нодальная вершина. Поэтому утверждение б) вытекает из того, что аддитивная полугруппа, порожденная $r_1, \dots, r_n$, строго порождена этими числами (здесь важно условие Д)). Топологическое доказательство более слабого неравенства $\det L_a > 0$ приведено в [8, следствие 6.4].

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) $\det(ab)$ и $\det D_a$ взаимно просты;
- б) $\det L_a$ и $\det D_a$ взаимно просты.

Здесь a и b — нодальные вершины L ; b левее a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Достаточно применить лемму 2 к R_b . Утверждение б) также следует из леммы 2.

ЛЕММА 6. *Выполнено $m_{\tilde{p}}(\tilde{g}) = 1$ (напомним, что $\tilde{p} := \tilde{g} \cap \tilde{L}_\infty$). Если для некоторой $\tilde{a}$ подграф $(\tilde{a}\tilde{g})$ линейен, то $\text{Deg}(\tilde{a}\tilde{g}) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $n(\tilde{g}) = 2$, $m(\tilde{g}) = 1$, утверждение следует из условий А), В) и предложения 1.

3. Структура графа $\tilde{L}_\infty$. В этом пункте мы будем помечать вершины графа $\tilde{L}_\infty$ знаком тильда. Образы этих вершин будем обозначать теми же буквами, но без тильды: например, $a := F(\tilde{a})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Вершина $\tilde{l} \in \tilde{L}_\infty$ называется *развилкой*, если $m(\tilde{l}) > 1$.

Подграф постоянной степени называется *максимальным*, если он не содержится в любом другом подграфе постоянной степени.

Из следующего предложения вытекает, что развилки являются препятствиями для продолжения максимальных подграфов постоянной степени, т.е. любая концевая вершина максимального подграфа постоянной степени является либо концевой для графа $\tilde{L}_\infty$, либо смежной с некоторой развилкой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\tilde{s} \in \tilde{L}_\infty$ – *нодальная вершина*. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) $\nu(\tilde{s}) = \nu(s)$, где $\nu(s)$ – валентность s в графе $\Gamma_{L,g}$;
- б) $m(\tilde{s}) = 1$;
- в) для любой смежной с $\tilde{s}$ линейной цепочки $\tilde{C}$ выполнено $\text{Deg } \tilde{C} = \text{Deg } \tilde{s} = n(\tilde{s})$.

Из предложения 4 следует, что сплайс-диаграммы максимального графа $\tilde{Q}$ постоянной степени и его образа $F(\tilde{Q})$ отличаются только весами. Из рис. 2 следует, что все концевые вершины подграфа $\tilde{Q}$, кроме быть может двух, являются концевыми вершинами $\tilde{L}$. Поэтому, если не оговорено противное, на дальнейших рисунках максимальные подграфы постоянной степени будут изображаться ребрами и над каждым таким “ребром” указываться его степень.

На последующих рисунках над развилкой $\tilde{l}$ будет указываться пара чисел $(m(\tilde{l}), n(\tilde{l}))$; слева от $\tilde{l}$ (справа от $\tilde{l}$ или под $\tilde{l}$) будут изображены максимальные подграфы постоянной степени, образ которых при F лежит слева от l (справа от l или под l соответственно). Максимальные подграфы постоянной степени, образ которых при F лежит под l , будут помечены крестиком (из условия С) следует, что такие подграфы линейны).

Пусть $a \in L$. Обозначим через a' множество всех вершин $\tilde{a} \in F^{-1}(a)$, на которых отображение F непостоянно. Так как топологическая степень F равна 4, имеем

$$\sum_{\tilde{a} \in a'} \text{Deg } \tilde{a} = 4. \quad (9)$$

ЛЕММА 7. Пусть $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ – развилки такие, что $(\tilde{a}\tilde{b})$ является подграфом постоянной степени, a – вершина графа L такая, что $b \in (ac)$. Тогда

$$\sum_{\tilde{c} \in c' \cap \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})} \text{Deg } \tilde{c} \geq \text{Deg}(\tilde{a}\tilde{b}). \quad (10)$$

Пусть $\tilde{a}$ – развилка. Обозначим через $U_{\tilde{a}} \subset \tilde{L}$ связный подграф, состоящий из всех смежных с $\tilde{a}$ максимальных подграфов постоянной степени и смежных с ними вершин (заметим, что каждая из этих вершин либо является развилкой, либо совпадает с $\tilde{g}$).

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

Рис. 9

Рис. 10

Рис. 11

ЛЕММА 8. Пусть $\tilde{a}$ – развилка. Тогда

- если $\text{Deg } \tilde{a} = 2$, то $U_{\tilde{a}}$ имеет вид, указанный на рис. 4; если $\tilde{b}$ – левая концевая вершина графа $U_{\tilde{a}}$, то $n(\tilde{b}) = 2$, $m(\tilde{b}) = 2$, $\text{Deg } \tilde{b} = 4$;
- если $\text{Deg } \tilde{a} = 3$, то $U_{\tilde{a}}$ имеет вид, указанный на рис. 10, 11.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{Deg } \tilde{a} = 2$, то $m(\tilde{a})n(\tilde{a}) = 2$. Вершина $\tilde{a}$ является развилкой, значит $m(\tilde{a}) = 2$, $n(\tilde{a}) = 1$. Пользуясь (4), (5), получаем, что $U_{\tilde{a}}$ относится к одному из классов, изображенных на рис. 3–5.

Предположим, что $U_{\tilde{a}}$ имеет вид, указанный на рис. 3. Из (7) следует, что $\det(\tilde{a}\tilde{b}) = \det(\tilde{a}\tilde{c}) = \det(\tilde{a}\tilde{b}) \neq 1$, где $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ – концевые вершины, изображенные на рис. 3. Но $\det(\tilde{a}\tilde{b})$ и $\det(\tilde{a}\tilde{c})$ взаимно просты согласно лемме 2, следовательно, рис. 3 невозможен. Предположим, что $U_{\tilde{a}}$ имеет вид, указанный на рис. 4. Тогда из (7) и (8) следует, что $\det(\tilde{a}\tilde{c}) = 2 \det(\tilde{a}\tilde{b})$; $\det(\tilde{a}\tilde{b}) = 2 \det(\tilde{a}\tilde{c})$, если $\tilde{b}$ – концевая вершина графа $\tilde{L}$; $n(\tilde{b}) \det(\tilde{a}\tilde{b}) = 2 \det(\tilde{a}\tilde{b})$, если $\tilde{b}$ – развилка. Из леммы 2 и следствия 2 вытекает, что $\det(\tilde{a}\tilde{b})$ и $\det(\tilde{a}\tilde{c})$ взаимно просты. Значит, $\tilde{b}$ – развилка и $n(\tilde{b})$ делится на 2. Но $\text{Deg } \tilde{b} \leq 4$ и, так как $\tilde{b}$ – развилка, $m(\tilde{b}) \geq 2$. Таким образом, $n(\tilde{b}) = m(\tilde{b}) = 2$.

Предположим, что оба левых конца на рис. 5 (обозначим их через $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$) являются концами графа $\tilde{L}_\infty$. Применяя (7) и утверждение б) предложения 3, получаем

$$\det[\tilde{b}_1\tilde{a}] = \det[\tilde{b}_2\tilde{a}] = \det[b_1a] > 1.$$

Однако, из леммы 2 следует, что это невозможно. Значит, один из левых концов на рис. 5 (скажем, $\tilde{b}_1$) является развилкой. Случай, указанный на рис. 5, будет окончательно запрещен после разбора случаев степени 3.

Если $\text{Deg } \tilde{a} = 3$, то $m(\tilde{a}) = 3$, $n(\tilde{a}) = 1$. Применяя (4) и (5), получаем случаи, изображенные на рис. 6–11.

Случай, указанный на рис. 7, невозможен, как и случай, указанный на рис. 3.

В случае, указанном на рис. 8, как и в случае, указанном на рис. 4, получаем, что $\tilde{b}_1$ – развилка и $n(\tilde{b}_1)$ делится на 2. Отсюда $\text{Deg } \tilde{b}_1 \geq 4$, что противоречит (9) и (10) для ветви $\text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}_2)$. Таким образом, случай, указанный на рис. 8, невозможен.

В случае, указанном на рис. 9, как и в случае, указанном на рис. 4, получаем, что $\tilde{b}$ – развилка и $n(\tilde{b})$ делится на 3. Значит, $m(\tilde{b}) > 1$ и $\text{Deg } \tilde{b} \geq 6$, что противоречит (9). Поэтому случай, указанный на рис. 9, невозможен.

Покажем, что случай, указанный на рис. 6, невозможен. Как и в случае, указанном на рис. 5, получаем, что одна из левых концевых вершин этого подграфа является развилкой $\tilde{b} \in \tilde{L}_\infty$. Из (9) и леммы 7 следует, что $m(\tilde{b}) = 2$, $n(\tilde{b}) = 1$, $\text{Deg } \tilde{b} = 2$. Значит, $U_{\tilde{b}}$ имеет вид, указанный на рис. 4. Левый конец подграфа $U_{\tilde{b}}$ является развилкой степени 4, поэтому из (9) получаем, что все ветви $\tilde{L}_\infty$, выходящие из $\tilde{a}$ и лежащие справа от $\tilde{a}$, должны содержать левый конец подграфа $U_{\tilde{b}}$. Поскольку $\tilde{L}_\infty$ – дерево, это невозможно.

Вернемся к рис. 5. Напомним, что $\tilde{b}_1$ – развилка. Из (9) и (10) следует, что $\text{Deg } \tilde{b}_1 < 4$. Как и в случае, указанном на рис. 6, имеем $\text{Deg } \tilde{b}_1 \neq 2$. Значит, $\text{Deg } \tilde{b}_1 = 3$ и $U_{\tilde{b}_1}$ имеет один из видов, указанных на рис. 10, 11. Склеивая подграфы $U_{\tilde{b}_1}$ и $U_{\tilde{a}}$ по подграфу $(\tilde{b}_1 \tilde{a})$, получаем рис. 12. Обозначим через $R_{\tilde{a}}$ ветвь графа $\tilde{L}_\infty$, выходящую из $\tilde{a}$ и лежащую справа от $\tilde{a}$, через $R_{\tilde{b}_1}$ – ту ветвь $\tilde{L}_\infty$, выходящую из $\tilde{b}_1$ и лежащую справа от $\tilde{b}_1$, которая не содержит $\tilde{a}$.

Рис. 12

Покажем, что эти ветви являются подграфами постоянной степени. Предположим, что $R_{\tilde{b}_1}$ не такая. Обозначим через $\tilde{b}_3$ ближайшую к $\tilde{b}_1$ развилку ветви $R_{\tilde{b}_1}$. Если $\tilde{b}_3 \in (b_1 \tilde{a})$, то из (9) получаем $\text{Deg } \tilde{b}_3 = 2$. Если $\tilde{b}_3$ лежит справа от $\tilde{a}$, то, используя (9) и (10), также получаем $\text{Deg } \tilde{b}_3 = 2$. Так как $\text{Deg } \tilde{b}_3 = 2$, то $U_{\tilde{b}_3}$ имеет вид, указанный на рис. 4, что противоречит $\text{Deg } \tilde{b}_1 \neq 4$. Значит, $R_{\tilde{b}_1}$ – подграф постоянной степени.

Допустим, что $R_{\tilde{a}}$ не является подграфом постоянной степени. Обозначим через $\tilde{a}_1$ ближайшую к $\tilde{a}$ развилку ветви $R_{\tilde{a}}$. Поскольку $R_{\tilde{b}_1}$ – подграф постоянной степени, из (9) следует $\text{Deg } \tilde{a}_1 = 2$. Значит, $U_{\tilde{a}_1}$ имеет вид, указанный на рис. 4, что противоречит $\text{Deg } \tilde{a} \neq 4$. Получаем, что $R_{\tilde{a}}$ – подграф постоянной степени.

Так как $\tilde{L}$ – дерево, то одна из ветвей $R_{\tilde{a}}$, $R_{\tilde{b}_1}$ (скажем, $R_{\tilde{a}}$) не смежна с $\tilde{g}$. Из предположения 3 следует, что $\det R_{\tilde{a}} = 1$. Поэтому, применяя (7), получаем $\det R_{\tilde{a}} = 1/2$, что невозможно.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\text{Deg } \tilde{a} < 4$, то справа от $\tilde{a}$ лежат два максимальных подграфа постоянной степени.

ЛЕММА 9. Пусть $\text{Deg } \tilde{a} = 4$. Тогда

- а) если $\tilde{b}$ – левый конец подграфа $U_{\tilde{a}}$, то $\tilde{b}$ является концом графа $\tilde{L}_\infty$;

б) подграф $U_{\tilde{a}}$ имеет один из видов, указанных на рис. 13–16, $m(\tilde{a}) = 4$, $n(\tilde{a}) = 1$.

Рис. 13

Рис. 14

Рис. 15

Рис. 16

Рис. 17

Рис. 18

Рис. 19

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{Deg } \tilde{a} = 4$, любая компонента связности графа $\tilde{L}_\infty - \tilde{a}$ лежит целиком справа, слева или под $\tilde{a}$. При $\text{Deg } \tilde{b} < 4$ утверждение а) вытекает из следствия 3.

Докажем утверждение б). Возможны два случая.

Случай $m(\tilde{a}) = n(\tilde{a}) = 2$ аналогичен случаям степени 2. Единственным возможным подграфом является указанный на рис. 19.

Обозначим через $\tilde{b}$ левый конец подграфа $U_{\tilde{a}}$. Это развилка, значит оба подграфа $U_{\tilde{b}}$ и $U_{\tilde{a}}$ должны иметь вид, указанный на рис. 19, что невозможно. Значит, случай $m(\tilde{a}) = n(\tilde{a}) = 2$ невозможен.

Рассмотрим случай $m(\tilde{a}) = 4$, $n(\tilde{a}) = 1$. Предположим, что из развилки $\tilde{a}$ выходит только одна ветвь, лежащая слева от $\tilde{a}$. Определители всех ветвей, лежащих под $\tilde{a}$, должны быть взаимно просты. Из (4), (5), (7) и предложения 3 следует, что указанный на рис. 13 граф является единственно возможным.

Допустим теперь, что слева от $\tilde{a}$ лежат по крайней мере две ветви. Так как для этих случаев утверждение а) леммы 9 уже доказано, эти ветви являются максимальными подграфами постоянной степени. Определители ветвей, расположенных слева и под $\tilde{a}$, взаимно просты. Поэтому, аналогично случаям $\text{Deg } \tilde{a} = 2$ и $\text{Deg } \tilde{a} = 3$, из (4), (5), (7) и предложения 3 следует, что $U_{\tilde{a}}$ относится к одному из классов, указанных на рис. 14–18.

Покажем, что графы, изображенные на рис. 17, 18, невозможны. Как и в случае, изображенном на рис. 5, можно показать, что ветви, лежащие справа от $\tilde{a}$, являются подграфами постоянной степени и определитель одной из них равен $1/2$, что невозможно.

Утверждение б) полностью доказано.

Вернемся к утверждению а). При $\text{Deg } \tilde{b} = 4$ подграф $U_{\tilde{a}}$ имеет вид, указанный на рис. 13. Из рис. 13–19 получаем, что $\tilde{b}$ является концом графа $\tilde{L}$, что завершает доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $\tilde{a}$ — развилка, то $\text{Deg } \tilde{a} > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения б) леммы 9 следует, что случай, указанный на рис. 4, невозможен.

Рис. 20

Рис. 21

Рис. 22

Рис. 23

Рис. 24

Рис. 25

Итак, для любой развилки $\tilde{a}$ мы построили все возможные подграфы $U_{\tilde{a}}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Граф $\tilde{L}$ должен иметь один из видов, указанных на рис. 20–25 (вершина $\tilde{g}$ помечена черным цветом).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим максимальный подграф постоянной степени, смежный с вершиной $\tilde{g}$. Из леммы 6 следует, что его степень равна 2. Этот факт вместе с леммами 8, 9 и следствием 4 дает доказательство следствия 5.

4. Невозможность графов, приведенных на рис. 22–25. Сначала покажем, что графы, приведенные на рис. 24, 25, невозможны. Разберем подробно рис. 24; рис. 25 разбирается аналогично.

ЛЕММА 10. *Граф, приведенный на рис. 24, невозможен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное.

Граф $\tilde{L}$ изображен в верхней части рис. 26, граф L изображен под $\tilde{L}$. Горизонтальные ребра, как и выше, обозначают подграфы постоянной степени. Из (7) и (8) получаем, что их определители совпадают с числами, написанными рядом с ними.

Обозначим корень графа $\tilde{L}$ через $\tilde{v}$. Из рис. 26 следует, что определители двух ветвей, выходящих из $\tilde{a}_2$, заведомо больше 1; поэтому из леммы 3 имеем

$$\det \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2) = 1, \quad \tilde{v} \notin \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2). \quad (11)$$

Рис. 26

Применяя лемму 3 к вершине $\tilde{a}_1$, получаем, что $d_1 = 1$.

Положим $\delta = \det \delta(ab)$ (см. определение 1). Из определения 5 и формулы (7) находим, что $\det \delta(\tilde{a}_1 \tilde{b}_1) = \det \delta(\tilde{a}_2 \tilde{b}_2) = \det \delta(\tilde{a}_1 \tilde{b}_2) = \delta$. Применяя (7) и (2) к (ab) , рассматриваемому как подграф графа L , получаем

$$\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2) = \det \text{br}_b(a) = 18d_1 d_3 \delta^2 - 2d_2 = 18d_3 \delta^2 - 2d_2. \quad (12)$$

Обозначим через $\tilde{L}'$ компоненту связности графа $F^{-1}(\text{br}_a(b))$, содержащую $\tilde{b}_2$. Так как $\det \text{br}_a(b) = 1$, согласно (6) имеем

$$\det \tilde{L}' = \frac{3}{1} \cdot \frac{d_3}{3d_3} \cdot \frac{2d_2 \cdot d_2}{2d_2} = d_2. \quad (13)$$

Обозначим $\Delta = \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2) \cap \tilde{L}_\infty$. Из (11) имеем $\tilde{v} \notin \Delta$, значит из леммы 4 следует, что $\det \Delta > 0$. Подставляя (13) в формулу (2) для подграфа $(\tilde{a}_1 \tilde{b}_2)$ и объемлющего графа Δ , получаем $d_2 \det \Delta = d_2 \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) - 4d_2 d_3 \delta^2$, откуда

$$\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) = \det \Delta + 4d_3 \delta^2 > 4. \quad (14)$$

Применяя лемму 3 к вершине $\tilde{b}_2$, находим $d_3 = \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{g}) = 1$. Подставляя (11), (12) в формулу (2) для подграфа $(\tilde{a}_2 \tilde{b}_2) \subset \tilde{L}$, имеем

$$-2d_2 = \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2) \det \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2) - 6 \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) \delta^2 = 18\delta^2 - 2d_2 - 6 \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) \delta^2.$$

Поэтому $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) = 3$, что противоречит (14).

ЛЕММА 11. Графы, приведенные на рис. 22, 23, невозможны.

Рис. 27

Рис. 28

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф $\tilde{L}_\infty$ имеет один из видов, указанных на рис. 22, 23. Обозначим через $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ развилки $\tilde{L}$, а через $\tilde{e}, \tilde{q}, \tilde{p}$ — концевые вершины (см. рис. 27; числа, указанные около ребер, обозначают степени этих ребер).

Покажем, что $\det \tilde{L}_\infty = -2$. Рассмотрим рис. 22 (рис. 23 разбирается аналогично). Из (7) и леммы 2 находим, что $\det L_b = 3$, $\det D_b = 2$ и определители ветвей, выходящих из b совпадают с указанными на рис. 28. Применяя (6) к вершине $\tilde{b}$, получаем

$$\frac{\det \tilde{L}_\infty}{\det L} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1 \cdot 3}{3} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1 \cdot \det(\tilde{b}\tilde{g})}{\det R_b}. \quad (15)$$

Напомним (см. предложение 3), что $\det L = -1$, $\det R_b = 1$. Поэтому из (15) следует

$$\det \tilde{L}_\infty = -2 \det(\tilde{b}\tilde{g}). \quad (16)$$

Пользуясь леммами 2, 5 и предложением 3, находим, что $\det D_a = 2$, $\det(\tilde{a}\tilde{p}) = 1$, $\det(\tilde{a}\tilde{q}) = 2$, $\det(\tilde{a}\tilde{e}) = 1$, $\det(\tilde{a}\tilde{g}) = 1$, $3 \det(\tilde{b}\tilde{a}) = \det(ab)$. Применяя (6) к вершине $\tilde{a}$ и объемлющему графу $(\tilde{b}\tilde{g})$, имеем $\det(\tilde{b}\tilde{g}) = 1$; подставляя это в (16), получаем $\det \tilde{L}_\infty = -2$.

Обозначим через α определитель графа $A := \tilde{L} - \tilde{g} - \tilde{L}_\infty$. Кривая A — та часть L , которая отображается при F в точку, принадлежащую $g \cap \mathbb{C}^2$ (при $A \neq \emptyset$ точка $F(A)$ является особой для g).

Применяя (2) к подграфу $(\tilde{a}\tilde{g}) \subset \tilde{L}$, получаем

$$-1 = -2 \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}) - 2\alpha \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}) (\det \delta(\tilde{a}\tilde{g}))^2,$$

что невозможно, так как правая часть делится на 2.

5. Невозможность графов, приведенных на рис. 20, 21.

ЛЕММА 12. Пусть $\tilde{K} = \sum a_{\tilde{s}} \tilde{s}$ — разложение канонического дивизора многообразия $\tilde{X}$ по неприводимым компонентам $\tilde{s}$ кривой $\tilde{L}$. Тогда $a_{\tilde{g}} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K — канонический дивизор многообразия X с носителем на $X \setminus \mathbb{C}^2$ и $B = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{L}} b_{\tilde{s}} \tilde{s}$ — дивизор ветвления отображения $\tilde{F}$ (дивизор якобиана $\tilde{F}$). Имеем $\tilde{K} = F^*(K) + B$. Так как $g \not\subset X \setminus \mathbb{C}^2$, то $g \not\subset K$. Приравнивая коэффициенты при $\tilde{g}$ в левой и правой частях, получаем $a_{\tilde{g}} = b_{\tilde{g}} = n(\tilde{g}) - 1 = 1$.

Обозначим через $\tilde{v}$ корень графа $\tilde{L}$. Легко видеть, что $\tilde{v} \in \tilde{L}_\infty$.

ЛЕММА 13. Пусть $\Delta \subset \tilde{L}_\infty$ — максимальный подграф постоянной степени, смежный с вершиной $\tilde{g}$ ($\text{Deg } \Delta = 2$ в силу леммы 6). Тогда подграф $\Delta \cap (\tilde{v}\tilde{g})$ линеен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\Delta \cap (\tilde{v}\tilde{g})$ нелинеен. Пусть $\tilde{v}_1$ – ближайшая к $\tilde{g}$ нодальная вершина подграфа Δ . Из предложения 4 имеем $m(\tilde{v}_1) = 1, n(\tilde{v}_1) = 2$. Положим $v_1 = F(\tilde{v}_1)$. Как и в лемме 11, обозначим $\alpha = \det(\tilde{L} - \tilde{L}_\infty - \tilde{g})$. Так как $\tilde{v} \in \tilde{L}_\infty$, получаем $\alpha \geq 1, \det \text{br}_{\tilde{v}_1}(\tilde{g}) \geq 1$.

Обозначим $d_{\tilde{v}} = \det \text{br}_{\tilde{v}_1}(\tilde{v})$. Пусть d – определитель ветви, которая выходит из $\tilde{v}_1$ и не содержит $\tilde{g}, \tilde{v}$. В силу (7) определитель нижней ветви в вершине $\tilde{v}_1$ равен D_{v_1} . Из предложения 3 следует, что $D_{v_1} > 1$. Поэтому $\max(d, d_{\tilde{v}}) > 1$. Из (8) и утверждения а) предложения 3 находим $\det(\tilde{v}_1\tilde{g}) = 2 \det(v_1g) = 2$.

Предположим, что $d > 1$. Тогда из леммы 4 следует, что $\det \text{br}_{\tilde{v}_1}(\tilde{g}) = 1$. Применяя (2) к подграфу $(\tilde{v}_1\tilde{g}) \subset \tilde{L}$, получаем

$$-2 = \det \tilde{L}_\infty - \alpha d d_{\tilde{v}}. \quad (17)$$

Из леммы 12 и формулы (3) вытекает

$$1 = k_{\tilde{g}} = -1 - \alpha - \det \tilde{L}_\infty + \alpha(d-1)(d_{\tilde{v}}-1) + \alpha d \Sigma, \quad (18)$$

где Σ – оставшаяся часть разложения (3). Подставив (17) в (18), получаем равенство $0 = -\alpha d - \alpha d_{\tilde{v}} + \alpha d \Sigma$, значит $d_{\tilde{v}}$ должно делиться на $d \neq 1$, что противоречит лемме 2.

Предположим, что $d = 1$. Как было показано выше, определитель нижней ветви в вершине $\tilde{v}_1$ больше 1. Значит, вершина $\tilde{v}$ лежит под $\tilde{v}_1$ и $d_{\tilde{v}} = \det D_{v_1} > 1$. Из формулы (2) для подграфа $(\tilde{v}_1\tilde{g})$ и охватывающего графа $\tilde{L}$ следует, что

$$-2 = \det \tilde{L}_\infty \det \text{br}_{\tilde{v}_1}(\tilde{g}) - \alpha d_{\tilde{v}},$$

значит $\det \tilde{L}_\infty \geq 0$. Из леммы 12 и формулы (3) получаем $1 = k_{\tilde{g}} = -1 - \alpha - \det \tilde{L}_\infty$, значит $\det \tilde{L}_\infty = -2 - \alpha < 0$. Противоречие.

ЛЕММА 14. Пусть $\det \tilde{L}_\infty = -1$ или $\det \tilde{L}_\infty = -2$ и подграф Δ удовлетворяет условию леммы 13. Тогда $\tilde{v} \notin \Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\tilde{v} \in \Delta$. Из леммы 13 следует, что подграф $(\tilde{v}\tilde{g})$ линеен. Применяя (3) к вершине $\tilde{g}$, получаем $k_{\tilde{g}} = -\alpha - \det \tilde{L}_\infty - 1$, но $k_{\tilde{g}} = 1$, значит $\det \tilde{L}_\infty = -\alpha - 2 < -2$. Противоречие.

ЛЕММА 15. Графы $\tilde{L}$ вида, указанного на рис. 20, 21, невозможны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{a}$ – развилка графа $\tilde{L}_\infty$. Тогда $(\tilde{a}\tilde{g})$ является максимальным подграфом постоянной степени, $\text{Deg}(\tilde{a}\tilde{g}) = 2$, из (8) и предложения 3 заключаем, что $\det(\tilde{a}\tilde{g}) = 1$. Применяя (7) и утверждение а) предложения 3, получаем, что определители двух оставшихся ветвей графа $\tilde{L}_\infty$ справа от $\tilde{a}$ равны 1.

Рассмотрим рис. 20. Пусть $L_a, D_a, \dots$ – те же, что и в предложении 3. Обозначим через $L_{\tilde{a}}$ (через $D_{\tilde{a}}^{(d)}$) определитель ветви, выходящей из $\tilde{a}$ и лежащей слева от $\tilde{a}$ (под $\tilde{a}$ соответственно) степени d . Тогда $\det L_{\tilde{a}} / \det L_a = 1/4$ (по формуле (7)) и $\det D_{\tilde{a}}^{(3)} = 1$, $\det D_a = D_{\tilde{a}}^{(1)} = 3$ (по формуле (7) и лемме 2). Получаем

$$\begin{aligned} \det(\tilde{L}_\infty - [\tilde{a}\tilde{g}]) &= \det L_{\tilde{a}} \det D_{\tilde{a}}^{(3)} \det D_{\tilde{a}}^{(1)} \geq 3, \\ \frac{\det \tilde{L}_\infty}{\det L} &= \frac{4}{1} \cdot \frac{1 \cdot 3}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1 \implies \det \tilde{L}_\infty = \det L = -1 \end{aligned} \quad (19)$$

(согласно (6)).

Аналогично можно показать, что (19) выполнены для рис. 21. Пусть $\Delta = (\tilde{a}\tilde{g})$. Из лемм 14 и 13 получаем, что подграф Δ линейен и $\tilde{v} \notin \Delta$. Поскольку $\tilde{v} \in \tilde{L}_\infty$, имеем $\tilde{v} \notin \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g})$, значит по лемме 4 $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}) \geq 1$.

Обозначим $\alpha = \det(\tilde{L} - \tilde{L}_\infty - \tilde{g})$ (как в леммах 11 и 13). Применяя (2) к подграфу Δ в объемлющем графе $\tilde{L}$, получаем

$$-1 = \det \tilde{L}_\infty \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}) - \alpha \cdot \det(\tilde{L}_\infty - [\tilde{a}\tilde{g}]). \quad (20)$$

Так как $\alpha \geq 1$ и $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}) \geq 1$, то (20) противоречит (19).

Таким образом, все подграфы, приведенные на рис. 20–25, невозможны. Теорема 1 полностью доказана.

Авторы выражают благодарность А.Г. Витушкину и П. Кассу-Ногес за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vitushkin A. G. On polynomial transformation of $\mathbb{C}^n$ // Manifolds (Tokyo, 1973). Tokyo: Tokyo Univ. Press, 1975. P. 415–417.
- [2] Bass H., Connell E. H., Wright D. The Jacobian Conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1982. V. 7. №2. P. 287–330.
- [3] Оревков С. Ю. О трехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 6. С. 1231–1241.
- [4] Оревков С. Ю. Один пример в связи с гипотезой о якобиане // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 1. С. 127–136.
- [5] Orevkov S. Yu. Coverings of Eisenbud–Neumann Splice Diagrams. Preprint, 1998.
- [6] Orevkov S. Yu. On the Jacobian Conjecture at Infinity. Preprint, 1998.
- [7] Eisenbud D., Neumann W. D. Three Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities. Ann. of Math. Stud. V. 110. Princeton (N.J.): Princeton Univ. Press, 1985.
- [8] Neumann W. D. Complex algebraic plane curves via their links at infinity // Invent. Math. 1989. V. 89. P. 445–489.
- [9] Neumann W. D. On bilinear forms represented by trees // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 40. P. 303–321.
- [10] Moh T.-T. On the Jacobian Conjecture and the configuration of roots // J. Reine Angew. Math. 1983. V. 340. P. 140–212.
- [11] Heitmann R. C. On the Jacobian Conjecture // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 64. P. 35–72.
- [12] Orevkov S. Yu. Acyclic algebraic surfaces bounded by Seifert spheres // Osaka J. Math. 1997. V. 34. №2. P. 457–480.
- [13] Abhyankar S. S., Moh T.-T. Newton–Puiseux expansions and generalised Tschirnhausen transformation. I // J. Reine Angew. Math. 1973. V. 260. P. 47–83; II // J. Reine Angew. Math. 1973. V. 261. P. 29–54.
- [14] Abhyankar S. S. On Expansion Techniques in Algebraic Geometry. Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math. and Phys. V. 57. Bombay: Tata Inst. Fund. Res., 1977.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: orevkov@mi.ras.ru

Поступило
 06.11.97
 Исправленный вариант
 05.06.98