Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Зубков, Об одном матричном представлении свободной группы, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 863–870

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:04:40

УДК 512

ОБ ОДНОМ МАТРИЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

А. Н. Зубков

Исследуется аналог известного представления Санова свободной неабелевой группы матрицами размера ≥ 3 . Вместо трансвекций, как в представлении Санова, берутся матрицы с “заполненным” первым (вторым и т.д.) столбцом, кроме пересечения с диагональю. На диагонали стоят единицы, а на остальных местах – нули. На “заполняемые” места ставится один и тот же параметр k . Доказано, что при $|k| \geq 5$ эти матрицы порождают свободную группу. Однако, при $k = 2$ это уже не так.

Библиография: 4 названия.

Эта заметка была написана автором в 1981 году, но нигде не опубликована, если не считать краткого сообщения [1]. Однако, найденное доказательство точности представления свободной группы, обобщающее известное представление Санова [2], на наш взгляд заслуживает внимания специалистов по теории линейных групп. В свое время различные усиления результата Санова были достаточно популярной темой, о чем свидетельствует обзор [3]. Однако, насколько это известно автору, не было никаких попыток обобщить представление Санова на случай размерности ≥ 3 . Исследуемое в этой работе представление было предложено В. Н. Ремесленниковым (устное сообщение).

Напомним некоторые определения. *Представлением Санова* обычно называют гомоморфизм свободной группы $F(x, y)$, со свободными порождающими x, y , в $SL_2(\mathbb{C})$, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, по правилу

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что при $|z| \geq 2$ это представление точно [2]. Там же можно найти метод “восстановления” слова $v(x, y) \in F(x, y)$ по его образу в $SL_2(\mathbb{C})$ в частном случае $z = 2$.

Здесь мы покажем, что матрицы

$$U_{1n}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad U_{nn}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & k \\ 0 & 1 & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

при определенном ограничении на вещественный параметр k порождают свободную группу ранга n . Существенно, что параметр k предполагается вещественным, поскольку

при доказательстве используется постоянство знака некоторых координат “пробного” вектора.

Прежде чем мы сформулируем основной результат, введем для удобства некоторые обозначения. Пусть e_{jk} – стандартная матрица с единицей в j -й строке и k -м столбце и с нулями на остальных местах. Как обычно, $E_n = \sum_{1 \leq i \leq n} e_{ii}$ – единичная матрица. Пусть $s_{in} = \sum_{1 \leq j \leq n} e_{ji}$, $1 \leq i \leq n$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Группа $G_n(k)$, порожденная матрицами $U_{in}(k) = E_n + ks_{in}$, $1 \leq i \leq n$, свободна при всех $n \geq 3$ и $|k| \geq 5$. Группа $G_n(2)$ не свободна при всех $n \geq 3$. Кроме того, группа $G_3(2)$ содержит главную конгруэнц-подгруппу по модулю 32.*

Отметим некоторые очевидные свойства матриц U_{in} . Для любого $s \in \mathbb{Z}$ $U_{in}(k)^s = U_{in}(sk)$. Далее, для любого вектора $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ мы имеем $U_{in}(l)a^t = b^t$, где $b = (b_1, \dots, b_n)$ и

$$b_j = \begin{cases} a_i & \text{при } j = i, \\ a_j + la_i & \text{при } j \neq i; \end{cases}$$

здесь t означает транспонирование.

1. Группа $G_n(2)$, $n \geq 3$.

ЛЕММА 1. *Пусть $2 \leq r \leq n$. Тогда соответствие $U_{ir}(k) \leftrightarrow U_{in}(k)$, $1 \leq i \leq r$, продолжается до вложения $G_r(k)$ в $G_n(k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В кольце матриц $M_n(\mathbb{R})$ породим подкольцо K при помощи элементов $s_{1n}, \dots, s_{rn}$. Ясно, что K является гомоморфным образом абсолютно свободного ассоциативного кольца $Z\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ относительно гомоморфизма $x_i \mapsto s_{in}$,

Обозначим ядро этого гомоморфизма через I . Несложные вычисления показывают, что x_i^2 , $x_i x_j x_i - x_i$, $x_i x_j x_l - x_i x_l$ лежат в I для всех $i \neq j$, $i \neq l$, $j \neq l$. Более того, идеал I порождается этими элементами.

Действительно, по модулю этих соотношений любой элемент кольца $Z\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ преобразуется в выражение вида

$$u \cdot 1 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq r \\ i \neq j}} v_{ij} x_i x_j.$$

Если оно лежит в идеале I , то, специализируя его в $M_n(\mathbb{R})$, получим равенство

$$0 = u \cdot E_n + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq r \\ i \neq j}} v_{ij} s_{in} s_{jn}.$$

После несложного пересчета имеем

$$0 = u \cdot E_n + \sum_{i \neq j} v_{ij} \left(\sum_{k \neq i} e_{ki} \right).$$

Преобразуя сумму еще раз, получим выражение

$$u \cdot E_n + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} e_{kj} \left(\sum_{\substack{i \neq k, j \\ 1 \leq i \leq r}} v_{ij} \right) = 0.$$

Случай $r = n = 2$ разбирается непосредственно: $u = v_{12} = v_{21} = 0$. Пусть $n \geq 3$ и $r = 2$. Тогда при e_{31} будет коэффициент v_{21} , а при e_{32} — коэффициент v_{12} . Следовательно, $v_{12} = v_{21} = 0$ и, тем более, $u = 0$.

Осталось рассмотреть случай $n \geq 3$, $r \geq 3$. Пусть $1 \leq j, k_1, k_2 \leq r$, где $j \neq k_1$, $j \neq k_2$, $k_1 \neq k_2$. Тогда

$$\sum_{i \neq j, k_1} v_{ij} = \sum_{i \neq j, k_2} v_{ij} = 0.$$

В частности, $v_{k_1 j} = v_{k_2 j}$. В силу произвольности выбора j, k_1, k_2 все v_{ij} равны между собой и, следовательно, равны 0. Отсюда $u = 0$.

Размер матриц n никоим образом не влиял на наши рассуждения. Следовательно, $K \cong Z\langle x_1, \dots, x_r \rangle / I \cong Z[s_{1r}, \dots, s_{rr}]$. В частности, соответствие $s_{in} \leftrightarrow s_{ir}$, $1 \leq i \leq r$, продолжается до изоморфизма $Z[s_{1r}, \dots, s_{rr}]$ на $Z[s_{1n}, \dots, s_{rn}]$. Очевидно, при этом U_{ir} переходит в U_{in} , что и требуется. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Произвольная перестановка порождающих $U_{in}(k)$ продолжается до автоморфизма группы $G_n(k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, лемму достаточно доказать для транспозиций. Пусть $U_{in}(k) \mapsto U_{jn}(k)$, $U_{jn}(k) \mapsto U_{in}(k)$ и $U_{ln}(k) \mapsto U_{ln}(k)$ для $l \neq i, j$. Как мы показали выше, кольцо $Z[s_{1n}, \dots, s_{nn}]$ изоморфно факторкольцу $Z\langle x_1, \dots, x_r \rangle / I$. Несложно продемонстрировать, что подстановка $x_i \mapsto x_j$, $x_j \mapsto x_i$, $x_l \mapsto x_l$, $l \neq i, j$, лишь переставляет порождающие идеала I . В частности, она индуцирует автоморфизм $Z\langle x_1, \dots, x_r \rangle / I$, т.е. автоморфизм кольца $Z[s_{1n}, \dots, s_{nn}]$. Очевидно, этот автоморфизм индуцирует искомый автоморфизм группы $G_n(k)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Группа $G_3(2)$ не свободна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через T матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$Z = T U_{33}(2) T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = T U_{23}(2) T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу результата Санова [2] группа $G_2(2)$ состоит из тех и только тех матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(Z),$$

для которых $\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4}$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}$.

Отсюда ясно, что группа $\langle Z, Y \rangle$ состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_2(2).$$

Не представляет большого труда и проверка следующего равенства:

$$X^k = \begin{pmatrix} 1-4k & -4k & -4k \\ 2k & 1+2k & 2k \\ 2k & 2k & 1+2k \end{pmatrix},$$

где

$$X = TU_{13}(2)T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & -4 & -4 \\ 2 & 1+2 & 2 \\ 2 & 2 & 1+2 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем нам понадобится еще одна формула, которая также получается прямым вычислением. Для любого

$$v(Y, Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

и любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$X^{-k}v(Y, Z)X^k = \begin{pmatrix} 1+x & 4kf+x & 4kt+x \\ p+(4k^2-p)r-4k^2z & \alpha+2kg-x/2 & \beta+2kh-x/2 \\ p+(4k^2-p)z-4k^2r & \gamma-2kh-x/2 & \delta+2ky-x/2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} f &= \alpha + \gamma - 1, \quad t = \beta + \delta - 1, \quad r = \alpha + \beta, \quad z = \gamma + \delta, \quad y = \gamma - \delta, \\ g &= t - z + 1, \quad h = f - z + 1, \quad x = 8k^2(s - 2), \quad p = -2k(1 - 4k), \quad s = \alpha + \beta + \gamma + \delta. \end{aligned}$$

Положим $\alpha = 1 + 4m, \delta = 1 - 4m, \beta = -4m, \gamma = 4m$. В этом случае $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 1$. Применяя процедуру Санова, несложно вычислить, что $v(Y, Z) = (ZY^{-1})^{2m}$. Подставляя это равенство в формулу (1), имеем

$$X^{-k}(ZY^{-1})^{2m}X^k = \begin{pmatrix} 1 & 32km & -32km \\ 0 & 1+4m(1-4k) & -4m(1-4k) \\ 0 & 4m(1-4k) & 1-4m(1-4k) \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(ZY^{-1})^{-2m(1-4k)}X^{-k}(ZY^{-1})^{2m}X^k = \begin{pmatrix} 1 & 32km & -32km \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Совершенно очевидно, что матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

коммутирует с любой матрицей типа

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В частности, мы имеем нетривиальное (т.е. с точностью до сопряжения матрицей T между порождающими группы $G_3(2)$) соотношение между X, Y, Z :

$$[(ZY^{-1})^{-2m(1-4k)}X^{-k}(ZY^{-1})^{2m}X^k, (ZY^{-1})^{2n}] = 1,$$

где $[\cdot, \cdot]$ — обычный коммутатор и $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Группа $G_n(2)$ не свободна для любых $n \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, как мы показали выше, группа $G_3(2)$ вкладывается в $G_n(2)$.

Следующая теорема дает дополнительную информацию о группе $G_3(2)$. Главную конгруэнц-подгруппу в $SL_n(Z)$ по модулю m будем обозначать через $\Gamma_n(m)$.

ТЕОРЕМА 3. $G_3(2) \geq \Gamma_3(32)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в формуле (1) $\alpha = 1 + 4m$, $\delta = 1 - 4m$, $\beta = 4m$, $\gamma = -4m$, получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16km & * & * \\ -16km & * & * \end{pmatrix},$$

где “угол”

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

лежит в группе $\langle Y, Z \rangle$. Сокращая на подходящий элемент из этой группы, мы получим, в частности, матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что подгруппа, порожденная $U_{23}(2)$, $U_{33}(2)$, состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha + \gamma - 1 & \beta + \delta - 1 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_2(2).$$

Отсюда, в частности, мы видим, что

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 16 & -16 \\ 0 & 16 & 1 + 16 \end{pmatrix} \in G_3(2).$$

С другой стороны,

$$S = T^{-1}MT = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & 1 - 16 & -16 \\ -16 & 16 & 1 + 16 \end{pmatrix} \in G_3(2)$$

и, в частности,

$$SL^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_3(2).$$

Домножая на $U_{13}(2)^8$, мы получим трансвекцию

$$t_{21}(32) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 32 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_3(2).$$

Аналогично,

$$LS^{-1}U_{13}^8 = t_{31}(32) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 32 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_3(2).$$

Пусть $\sigma \in S_n$ – произвольная подстановка на n символах. Как мы уже знаем, $U_{in}(k) \mapsto U_{\sigma(i),n}(k)$ – это автоморфизм группы $G_n(k)$. Более того, индукцией по длине элемента $v \in G_n(k)$ несложно показать, что $v^\sigma \cdot a^t = (v \cdot (a^\sigma)^t)^\sigma$, где $a \in \mathbb{R}^n$ и $(a^\sigma)_i = a_{\sigma^{-1}(i)}$, $1 \leq i \leq n$.

Рассмотрим транспозицию $\tau: U_{13}(2) \mapsto U_{23}(2)$, $U_{23}(2) \mapsto U_{13}(2)$. Фиксируем стандартный базис пространства $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Тогда, например,

$$t_{21}(32)^\tau e_1^t = (t_{21}(32)e_2^t)^\tau = (e_2^\tau)^t = e_1^t.$$

Аналогично,

$$t_{21}(32)^\tau e_2^t = (32, 1, 0)^t, \quad t_{21}(32)^\tau e_3^t = e_3^t.$$

Таким образом, $t_{21}(32)^\tau = t_{12}(32) \in G_3(2)$. Тем же способом мы можем “вытащить” и все остальные трансвекции $t_{ij}(32)$, $1 \leq i \neq j \leq 3$. Хорошо известно, что $\Gamma_n(m)$ ($n \geq 3$) порождается трансвекциями $t_{ij}(m)$, $1 \leq i \neq j \leq n$ (см. [4, § 12, леммы 6, 7]). Теорема доказана.

2. Точность представления.

ТЕОРЕМА 4. *Группа $G_n(k)$ свободна, со свободными порождающими $U_{in}(k)$, $1 \leq i \leq n$, при всех $n \geq 3$ и $|k| \geq 5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно считать, что $k > 0$. Пусть $v = v_s = U_{r_s n}(k)^{l_s} \dots U_{r_1 n}(k)^{l_1}$ – произвольное редуцированное слово от порождающих $U_{in}(k)$, т.е. $r_i \neq r_{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, и все $l_1, \dots, l_s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Как обычно, через $e_1, \dots, e_n$ обозначим стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$.

Наша цель – показать, что $v \cdot e_{r_1}^t = b^t$, причем у вектора b все координаты ненулевые. Более того, все они, кроме быть может b_{r_s} , одного знака. В частности, $v \cdot e_{r_1}^t \neq e_{r_1}^t$ и, следовательно, $v \neq E_n$.

Будем говорить, что вектор b удовлетворяет условию (l) с параметрами a , $d > 0$, если все его координаты ненулевые и все b_i , где $i \neq l$, одного знака, причем $0 < a \leq |b_i/b_l|$. Кроме того, для любых $i, j \neq l$ и $i \neq j$ либо $1 \leq |b_i/b_j| \leq d$, либо $1/d \leq |b_i/b_j| \leq 1$.

Индукцией по длине v мы покажем, что $v \cdot e_{r_1}^t$ удовлетворяет условию (r_s) с параметрами a, d , зависящими только от k . При этом по ходу доказательства будут возникать некоторые неравенства для a, d , необходимые для индуктивного перехода. Итак, от нас требуется доказать, что система этих неравенств совместна при любом $k \geq 5$.

База индукции. Положим $1/k < a < k$, $1 \leq d < k$. Тогда вектор

$$U_{r_1 n}(k)^{l_1} \cdot e_{r_1}^t = (kl_1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{r_1}, \dots, kl_1)^t$$

очевидно удовлетворяет условию (r_1) с параметрами a, d .

Индуктивный переход. Упрощая обозначения, положим $i = r_s, j = r_{s+1}, i \neq j$. Пусть вектор $v_s \cdot e_r^t = b^t$ удовлетворяет условию (i) с параметрами a, d .

Пусть $U_{jn}(k)^t \cdot b^t = (b')^t = (b'_1, \dots, b'_n)^t$. Здесь $b_j = b'_j$ и $b'_m = b_m + kl b_j$ для всех $m \neq j$. По условию $b'_j = b_j \neq 0$. Следовательно, $|b'_m/b'_j| = |b_m/b_j + kl| \geq k - |b_m/b_j| \geq a$ для всех $m \neq j$. Если $m = i$, то $|b_i/b_j| \leq 1/a$ и для индуктивного перехода нужно потребовать $k - 1/a \geq a$. Если $m \neq i$, то $|b_m/b_j| \leq d$, откуда $k - d \geq a$. Первое неравенство эквивалентно

$$\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \leq a \leq \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Учитывая

$$k - d \leq k - 1 < \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2},$$

в итоге имеем два неравенства

$$\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \leq a \leq k - d \quad \text{и} \quad 1 \leq d < k.$$

Пусть $m \neq s, m \neq j, s \neq j$. Обозначим через x модуль

$$\left| \frac{b'_m}{b'_s} \right| = \left| \frac{kl + b_m/b_j}{kl + b_s/b_j} \right|.$$

Дальнейшие рассуждения зависят от знака l .

а) Пусть $l > 0$. Если $m, s \neq i$, то по условию коэффициенты b_j, b_m, b_s одного знака, т.е. $b_m/b_j > 0, b_s/b_j > 0$. В зависимости от того, какое из чисел $b_m/b_j, b_s/b_j$ больше, имеем либо $1 \leq x \leq (k + d)/(k + 1/d)$, либо $(k + 1/d)/(k + d) \leq x \leq 1$. Таким образом, необходимо, чтобы $(k + d)/(k + 1/d) \leq d$ и $1/d \leq (k + 1/d)/(k + d)$. Однако, оба этих неравенства равносильны и следуют из $d \geq 1$.

Предположим теперь, что $m = i$. По индуктивному предположению $|b_i/b_j| \leq 1/a, b_s/b_j > 0$. Если $b_i/b_j \geq b_s/b_j > 0$, то $1 \leq x \leq (k + 1/a)/(k + 1/d) \leq d$, т.е. $ka + 1 \leq a(kd + 1)$. В противном случае $1 \geq x \geq (k - 1/a)/(k + d) \geq 1/d$, т.е. $d(ka - 1) \geq a(k + d)$.

Случай $s = i$ разбирается аналогично.

б) Пусть $l < 0$. Тогда оценивать придется выражение

$$y = \left| \frac{kl - b_m/b_j}{kl - b_s/b_j} \right|.$$

Как и выше, предположим сначала, что $m, s \neq i$. Дословно повторяя рассуждения части а), мы получим пару неравенств

$$1 \leq y \leq \frac{k - 1/d}{k - d} \leq d \quad \text{и} \quad \frac{1}{d} \leq \frac{k - d}{k - 1/d} \leq y \leq 1.$$

Они сводятся к одному неравенству $kd - 1 \leq d^2(k - d)$.

Если же $m = i$ (или $s = i$), то в случае $b_i/b_j \geq b_s/b_j > 0$ получается неравенство $1 \geq y \geq (k - 1/a)/(k - 1/d) \geq 1/d$. В противном случае $1 \leq y \leq (k + 1/a)/(k - d) \leq d$. Освобождаясь от дробей, получаем $a(kd - 1) \leq d^2(ka - 1)$ и $ka + 1 \leq ad(k - d)$.

Таким образом, для того чтобы был осуществим индуктивный переход, параметры a, d должны удовлетворять системе неравенств:

$$\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \leq a \leq k - d, \quad 1 \leq d < k, \quad (2)$$

$$ka + 1 \leq a(kd + 1), \quad (3)$$

$$a(k + d) \leq d(ka - 1), \quad (4)$$

$$kd - 1 \leq d^2(k - d), \quad (5)$$

$$a(kd - 1) \leq d^2(ka - 1), \quad (6)$$

$$ka + 1 \leq ad(k - d). \quad (7)$$

После этого достаточно заметить, что по предположению индукции $|b_m/b_j| \leq d < k$ и, в частности, все $b'_m = b_m + klb_j$ ($m \neq j$) того же знака, что и klb_j .

Система (2)–(7), конечно, избыточна. Неравенство (7) сильнее неравенства (3), так как $d > 0$. Оно также сильнее неравенства (5). Действительно, (7) можно переписать как $k + 1/a \leq d(k - d)$, а (5) – как $d - 1/k \leq d(k - d)$. Точно так же можно показать, что (4) сильнее (6). В итоге система сокращается до неравенств (2), (4), (7). Множество решений последней системы обозначим через $C(k)$. Несложно показать, что с уменьшением параметра k множество $C(k)$ тоже “уменьшается”. Иными словами, если $k_1 \leq k_2$, то $C(k_1) \subseteq C(k_2)$. Действительно, функция $f(k) = (k - \sqrt{k^2 - 4})/2$ строго убывает для всех $k > 0$. Поэтому если $f(k_1) \leq a$, то тем более $f(k_2) \leq a$. Аналогично, если $a + d \leq k_1$ (или $d < k_1$), то заведомо $a + d \leq k_2$ (и $d < k_2$).

Положим $x = k_2 - k_1$. Пусть, например, параметры a, d удовлетворяют неравенству (4) с $k = k_1$. Чтобы получить (4) с $k = k_2$, достаточно добавить к левой части ax , а к правой adx . Так как $ax \leq adx$, неравенство останется верным. Те же рассуждения проходят для (3).

В силу всего сказанного выше достаточно показать, что $C(5) \neq \emptyset$. Это действительно так, например: пара $a = 4/5, d = 5/2$ лежит в $C(5)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечно, число 5 не является наименьшим, при котором разрешима система неравенств (2)–(7). Однако, несложно проверить, что уже $C(4) = \emptyset$. В связи с этим было бы интересно понять, какова нижняя грань множества $\{k \mid C(k) \neq \emptyset\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зубков А. Н. Матричные представления свободных групп // 18-я Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Ч. 2. Минск, 1983. С. 84.
- [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
- [3] Мерзляков Ю. И. Линейные группы // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1978. С. 35–89.
- [4] Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1972.