Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, Л. Эльзнер, О матрицах, допускающих унитарное приведение к ленточному виду, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 871–880

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:27:08

УДК 512.643

О МАТРИЦАХ, ДОПУСКАЮЩИХ УНИТАРНОЕ ПРИВЕДЕНИЕ К ЛЕНТОЧНОМУ ВИДУ

Х. Д. Икрамов, Л. Эльзнер

В статье доказано, что всякое малоранговое возмущение эрмитовой матрицы унитарно приводимо к ленточной форме. Кроме того, если нормальная матрица унитарно приводима к ленточной форме, то унитарно приводимо и всякое ее одноранговое возмущение.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Хорошо известно, что всякую эрмитову матрицу можно привести к трехдиагональному виду с помощью конечной последовательности элементарных унитарных подобий. В качестве трансформирующих матриц этих подобий пригодны, например, отражения или комплексные аналоги двумерных вращений. И в том, и в другом случае процесс приведения к трехдиагональной форме использует лишь арифметические операции и извлечения квадратных корней из положительных чисел. Тем самым, унитарное приведение эрмитовой матрицы к трехдиагональному виду реализуемо в квадратичных радикалах.

В недавней публикации [1] установлено, что всякая унитарная матрица унитарно приводима, опять-таки в квадратичных радикалах, к пятидиагональному виду. Этот результат послужил стимулом проведенного в [2] исследования на тему, возможно ли унитарное приведение (в квадратичных радикалах) к нетривиальной ленточной форме для произвольной нормальной матрицы A . Ответ отрицателен в общем случае и положителен, если A вместе с сопряженной матрицей A^* удовлетворяет алгебраическому соотношению

$$f(A, A^*) = 0, \quad (1)$$

где $f(x, y)$ – многочлен не слишком высокой степени.

Подчеркнем условие конечности, входящее в наше понимание приводимости. Если отказаться от этого условия, то всякая нормальная матрица становится унитарно приводимой даже к диагональному виду. Унитарная приводимость в таком смысле есть, как известно, характеристическое свойство нормальных матриц.

Среди симметричных ленточных форм следующей по простоте за диагональной является трехдиагональная форма. По отношению к ней справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого $n \geq 5$ существуют комплексные $(n \times n)$ -матрицы, которые никаким унитарным подобием не могут быть преобразованы к трехдиагональному виду.*

Этот результат для $n \geq 6$ был установлен в [3], [4]. В [5] показано, что, несколько усовершенствовав доказательство Штурмфельса из [4], можно распространить его и на случай $n = 5$.

Заметим, что матрицы, не приводимые (в расширенном толковании) к трехдиагональному виду, образуют при $n \geq 5$ всюду плотное подмножество пространства $(n \times n)$ -матриц. Аналогичное утверждение (при соответствующих ограничениях на n) имеет место для ленточной формы любой фиксированной ширины p . Тем больший интерес представляют те сравнительно немногочисленные матрицы, которые допускают унитарное приведение к ленточному виду, а тем более матрицы, чье приведение возможно осуществить в квадратичных радикалах.

Цель работы – указать некоторые классы таких матриц. Мы устанавливаем, что всякая матрица с косоэрмитовой компонентой малого ранга унитарно приводима к ленточной форме, и такое приведение можно реализовать в квадратичных радикалах (теоремы 8 и 9). В теореме 10 показано, что одноранговое возмущение нормальной матрицы, допускающей унитарное приведение к ленточному виду, обладает аналогичным свойством приводимости.

Средством доказательства наших результатов является обобщенный процесс Ланцоша, в п. 2 дается его описание и найденные в [2] свойства, важные для дальнейшего изложения. Роль линейных зависимостей в обобщенной степенной последовательности матриц обсуждается в п. 3. Наконец, в п. 4 формулируются и доказываются главные результаты.

2. Обобщенный процесс Ланцоша. Пусть задана $(n \times n)$ -матрица A и фиксирован ненулевой начальный вектор v . *Обобщенной последовательностью Крылова* назовем последовательность векторов

$$v, Av, A^*v, A^2v, A^*Av, AA^*v, A^{*2}v, A^3v, \dots \quad (2)$$

Удобно рассматривать последовательность (2) как состоящую из сегментов длины соответственно 1, 2, 4, 8, 16, ... Сегмент с номером k , мы называем его k -м *слоем*, можно описать как совокупность векторов вида $u = W_k(A, A^*)v$, где $W_k(s, t)$ пробегает множество слов степени k от двух некоммутирующих переменных s и t . Порядок слов внутри слоя может быть произвольным. Символ $W_0(s, t)$ обозначает единицу.

Наряду с векторной последовательностью (2) (или даже вместо нее) будем использовать матричную последовательность

$$I, A, A^*, A^2, A^*A, AA^*, A^{*2}, A^3, A^2A^*, AA^*A, \dots, A^{*3}, \dots \quad (3)$$

Мы называем ее *обобщенной степенной последовательностью*. Понятие слоя определяется для (3) по аналогии с (2).

Суть обобщенного процесса Ланцоша, формальное описание которого дается ниже, состоит в ортогонализации последовательности (2). Пусть $v_1, v_2, v_3, \dots$ – получаемые при этом *ненулевые* ортогональные векторы. Положим

$$\mathcal{K}_m = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}.$$

Обозначим через $\text{orth}_{\mathcal{K}} w$ ортогональную составляющую в разложении вектора w относительно линейного подпространства $\mathcal{K}$.

Обобщенный процесс Ланцоша состоит в следующем.

1. Выбрать ненулевой вектор v и положить $v_1 = v$.

2. Пусть уже построены ненулевые векторы $v_1, \dots, v_m$, составляющие ортогональный базис линейной оболочки первых k_m векторов $u_1, \dots, u_{k_m}$ последовательности (2). Если перпендикуляр $\text{orth}_{\mathcal{K}_m} u_{k_m+1}$ не равен 0, то принять его в качестве v_{m+1} и положить $k_{m+1} = k_m + 1$. В противном случае построить вектор $\text{orth}_{\mathcal{K}_m} u_{k_m+2}$. Если он ненулевой, принять его в качестве v_{m+1} ; положить $k_{m+1} = k_m + 2$, и т.д.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если все векторы k -го слоя последовательности (2) дают нулевые перпендикуляры на текущее подпространство $\mathcal{K}_m$, то $\mathcal{K}_m$ есть общее инвариантное подпространство матриц A и A^* . Процесс Ланцоша в этом случае завершается досрочно.

В дальнейшем мы придерживаемся терминологии и обозначений, введенных в [2]. *Обобщенным подпространством Крылова* (с номером m) называется подпространство

$$L_m(A, v) = \text{span}\{W(A, A^*)v : \deg W \leq m\}.$$

Его размерность обозначается через l_m . Число $w_m = l_m - l_{m-1}$ ($m \geq 1$) называется *шириной* m -го слоя; мы полагаем $w_0 = 1$. Аналогичные определения применяются к последовательности (3). Ясно, что для каждой из этих последовательностей

$$w_m \leq 2^m. \quad (4)$$

Укажем теперь связь между процессом Ланцоша и задачей об унитарном приведении к ленточной форме. Предположим, что линейная оболочка последовательности (2) совпадает с пространством $\mathbb{C}^n$. Тогда процесс Ланцоша генерирует ортогональный базис $v_1, \dots, v_n$; нормируя векторы v_i , можем считать базис даже ортонормированным. Интерпретируя исходную матрицу A как оператор $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$, построим матрицу B этого оператора в базисе $v_1, \dots, v_n$. Структурные особенности матрицы B можно описать следующим образом. Пусть s – номер слоя последовательности (2), породившего вектор v_i . В таком случае в i -м столбце матрицы B отличными от 0 могут быть лишь элементы, соответствующие векторам v_j , порожденным $(s-1)$ -, s - и $(s+1)$ -м слоями. Аналогичное описание применимо к строкам B . Обозначая через N_i (M_i) число ненулевых элементов в i -м столбце (i -й строке) матрицы B , получаем неравенства

$$N_i \leq w_{s-1} + w_s + w_{s+1}, \quad M_i \leq w_{s-1} + w_s + w_{s+1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если для всех s имеет место равномерная оценка

$$w_s \leq b, \quad (5)$$

то B является ленточной матрицей с шириной ленты, не превосходящей $4b - 1$. Так как проведение обобщенного процесса Ланцоша требует лишь арифметических операций и квадратных корней, матрица A в ситуации (5) оказывается унитарно приводимой к ленточному виду.

Важный случай, когда неравенство (5) действительно выполняется, приведен в [2]. Предположим, что A – нормальная матрица и в последовательности (3) матрицы, принадлежащие слоям $0, 1, \dots, m_0 - 1$, линейно независимы в совокупности. Пусть, далее, присоединение матриц из слоя m_0 превращает эту матричную систему в линейно зависимую. Иными словами, A и A^* удовлетворяют уравнению вида (1), где f – многочлен степени m_0 . Тогда $w_s \leq w_{m_0}$ для всех s .

Приведенному описанию удовлетворяют эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные матрицы, а также нормальные матрицы, спектр которых сосредоточен на любой алгебраической кривой невысокой степени.

Если (в соответствии с замечанием 1) процесс Ланцоша порождает лишь базис нетривиального инвариантного подпространства матриц A и A^* , то при соответствующем изменении базиса в $\mathbb{C}^n$ мы получим из A блочнодиагональную матрицу, к верхнему диагональному блоку которой применимы изложенные выше соображения. Полное приведение A в этом случае требует повторного обращения к процедуре Ланцоша с другим начальным вектором.

3. Линейные зависимости в обобщенной степенной последовательности. В общем случае наличие линейных зависимостей в обобщенной степенной последовательности (3) влечет уменьшение ширины слоев, но не ее стабилизацию. Предположим, например, что матрица A в (3) нормальная. Нормальность, описываемая равенством

$$A^*A = AA^*, \quad (6)$$

есть линейное соотношение во втором слое последовательности (3). Однако, при отсутствии других линейных зависимостей числа w_m сохраняют медленный рост: $w_m = m + 1$, хотя скорость его не сравнима с максимальным ростом, допускаемым оценкой (4). Вместе с тем, как указано в п. 2, добавочные линейные соотношения стабилизируют последовательность $\{w_m\}$. Так, для эрмитовой матрицы A имеем $w_m \leq 1$ для всех m ; если A унитарная, то $w_m \leq 2$ при $m \geq 1$, и т.д.

Приведем еще один пример стабилизации чисел w_m , относящийся на этот раз к *анормальным* матрицам (т.е. матрицам, не являющимся нормальными). Пусть A – косой проектор, т.е.

$$A^2 = A, \quad A^*A \neq AA^*. \quad (7)$$

Из первого соотношения (7) выводим $A^{*2} = A^*$. Отсюда легко следует, что каждый слой последовательности (3) может добавить к предыдущим лишь две новые матрицы, а именно: $(AA^*)^k$ и $(A^*A)^k$, если номер слоя m есть четное число ($m = 2k$), и $A(A^*A)^k$, $(A^*A)^k A^*$ при $m = 2k + 1$. Таким образом, $w_m \leq 2$ при $m \geq 1$.

Почти не меняя рассуждений, можно показать, что аналогичная стабилизация имеет место для всякой матрицы A с квадратичным минимальным многочленом. К числу таких матриц, помимо проекторов, относятся инволюции, а также нильпотенты и унитарные нильпотенты индекса 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в рассмотренном примере применение процесса Ланцоша к последовательности (2) порождает ортогональный базис в $\mathbb{C}^n$, то матрица A оказывается унитарно подобной ленточной матрице с шириной ленты 7 (см. замечание 2). И здесь уместно подчеркнуть роль требования конечности в процессе приведения. Если допустить произвольные унитарные подобия, то матрица с квадратичным минимальным многочленом приводима даже к блочнодиагональному виду с диагональными блоками порядков 1 и 2 (см. [6, п. 2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для того чтобы из обобщенной крыловской последовательности (2) можно было выделить базис для $\mathbb{C}^n$, необходимо, прежде всего, наличие достаточного числа линейно независимых матриц в последовательности (3). Последнее может вызывать сомнения в случае матрицы с квадратичным минимальным многочленом: достаточно взглянуть на первое соотношение (7). Тем не менее, имеет место следующий факт [7].

ТЕОРЕМА 2. Пусть A и B – $(n \times n)$ -матрицы над произвольным полем F , имеющие квадратичные минимальные многочлены. Тогда для размерности алгебры $\mathcal{B}$, порождаемой над F матрицами I, A и B , справедливы оценки

$$\dim \mathcal{B} \leq \begin{cases} 2n - 1, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 2n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

В интересующей нас ситуации теорему 2 следует применять к паре A, A^* .

Для нормальной матрицы A всякое линейное соотношение

$$\alpha_1 A^{s_1} A^{*t_1} + \alpha_2 A^{s_2} A^{*t_2} + \dots + \alpha_l A^{s_l} A^{*t_l} = 0$$

в последовательности (3) влечет аналогичное скалярное соотношение

$$\alpha_1 \lambda^{s_1} \bar{\lambda}^{t_1} + \alpha_2 \lambda^{s_2} \bar{\lambda}^{t_2} + \dots + \alpha_l \lambda^{s_l} \bar{\lambda}^{t_l} = 0,$$

которому должно удовлетворять каждое собственное значение λ матрицы A . В случае анормальных матриц аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно. Однако, справедлив следующий его частичный эквивалент [8].

ТЕОРЕМА 3. Пусть задан многочлен

$$f(x, y) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^l a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Рассмотрим определяемое им матричное уравнение относительно $(n \times n)$ -матрицы A :

$$\sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^l a_{\mu\nu} A^\mu A^{*\nu} = 0. \quad (8)$$

Если A – решение уравнения (8), то для всякого собственного значения λ матрицы A выполняется равенство $f(\lambda, \bar{\lambda}) = 0$.

Так, уравнению

$$A^2 - A^{*2} = 0 \quad (9)$$

удовлетворяют, в частности, все инволюции, собственные числа которых, как известно, могут принимать лишь значения 1 и -1 . Этот пример показывает, что уравнение вида (8) может допускать анормальные решения.

Вместе с тем, некоторым уравнениям типа (8) удовлетворяют лишь нормальные матрицы. Простейшими иллюстрациями являются определения эрмитовых ($A = A^*$) и унитарных ($AA^* = I$) матриц. Существуют и менее избитые примеры. Напомним в связи с этим два результата из [9].

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – комплексная $(n \times n)$ -матрица с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Предположим, что для некоторых комплексных чисел $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, где $c_1 + c_2 \neq 0$, спектр матрицы

$$B = a_1 A + a_2 A^* + b_1 A^2 + b_2 A^{*2} + c_1 A^* A + c_2 A A^*$$

состоит из чисел

$$\mu_j = a_1 \lambda_j + a_2 \bar{\lambda}_j + b_1 \lambda_j^2 + b_2 \bar{\lambda}_j^2 + (c_1 + c_2) |\lambda_j|^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

В таком случае A является нормальной матрицей.

ТЕОРЕМА 5. Допустим, что в условиях теоремы 4 требование $c_1 + c_2 \neq 0$ заменено соотношениями

$$a_2 = \bar{a}_1, \quad b_2 = \bar{b}_1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

Тогда матрица A по-прежнему нормальна.

На основе каждого из этих утверждений можно сформулировать достаточный критерий нормальности. Для определенности, используем теорему 4.

ТЕОРЕМА 6. Пусть задан квадратичный многочлен

$$f(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,$$

где $a_{11} \neq 0$. Тогда всякая матрица A , удовлетворяющая уравнению

$$f(A, A^*) = a_{00}I + a_{10}A + a_{01}A^* + a_{20}A^2 + a_{11}AA^* + a_{02}A^{*2} = 0,$$

является нормальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $B = f(A, A^*)$. По условию $B = 0$. Согласно теореме 3 $f(\lambda, \bar{\lambda}) = 0$ для всякого собственного значения λ матрицы A . Поскольку $a_{11} \neq 0$, условия теоремы 4 выполнены для A и B , и матрица A нормальная.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Вместо уравнения $f(A, A^*) = 0$ в теореме 6 можно рассматривать уравнение $f(A^*, A) = 0$. Эти два уравнения, по существу, различаются лишь тем, что в одно из них входит первое из произведений AA^* и A^*A , а в другое – второе.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Вещественная алгебраическая кривая

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 1 \quad (10)$$

может быть записана комплексным уравнением

$$cz^2 + \bar{c}\bar{z}^2 + 2dz\bar{z} = 4,$$

где $c = a_{11} - a_{22} - 2a_{12}i$, $d = a_{11} + a_{22}$. В [2] посредством соотношений

$$AA^* = A^*A, \quad cA^2 + \bar{c}A^{*2} + 2dAA^* = 4I \quad (11)$$

был введен класс Γ нормальных матриц со спектром, сосредоточенным на кривой (10). Как следует из теоремы 6, при $d \neq 0$ первое условие (11) избыточно: нормальность матриц $A \in \Gamma$ обеспечивается вторым соотношением. В то же время, пример (9) показывает необходимость первого условия в случае $d = 0$.

Предположим, что одночлены

$$A^{s_1}A^{*t_1}A^{s_2}A^{*t_2} \dots A^{s_l}A^{*t_l}, \quad s_1 + t_1 + \dots + s_l + t_l = m, \quad (12)$$

входящие в m -й слой последовательности (3), удовлетворяют линейному соотношению над L_{m-1} (т.е. некоторая нетривиальная их линейная комбинация принадлежит подпространству L_{m-1}). Назовем это соотношение *симметричным*, если выполнены условия:

- а) для каждого одночлена (12), входящего в соотношение с ненулевым коэффициентом β , оно содержит и одночлен

$$A^{t_l}A^{*s_l} \dots A^{t_1}A^{*s_1} \quad (13)$$

также с ненулевым коэффициентом γ ;

- б) $|\beta| = |\gamma|$.

Если хотя бы одно из этих условий нарушено, соотношение называется *несимметричным*. Уравнение (6) может служить примером симметричного соотношения во втором слое. Определение проектора (более общо, любой матрицы с квадратичным минимальным многочленом), переписанное как $A^2 = 0 \pmod{L_1}$, есть пример несимметричного соотношения.

ТЕОРЕМА 7. Пусть имеем несимметричное линейное соотношение в m -м слое последовательности (3). Тогда применение к нему операции сопряжения порождает новое линейное соотношение, линейно независимое с исходным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы очевидно, если существует пара одночленов (12) и (13), из которых один входит в заданное соотношение, а другой – нет. Предположим, что одночлены (12), (13) входят в соотношение с ненулевыми коэффициентами β и γ , однако $|\beta| \neq |\gamma|$. В новое соотношение те же одночлены войдут с коэффициентами $\bar{\gamma}$ и $\bar{\beta}$. Остается заметить, что

$$\left| \frac{\beta}{\bar{\gamma}} \frac{\gamma}{\bar{\beta}} \right| = |\beta|^2 - |\gamma|^2 \neq 0.$$

В качестве примера рассмотрим соотношение $[AA^*A, A] = 0$, или

$$A^2A^*A - AA^*A^2 = 0. \quad (14)$$

Для невырожденной матрицы A уравнение (14) эквивалентно условию нормальности (6). Среди его вырожденных решений имеются и анормальные. Для этого (вырожденного) случая уравнение было введено в [10] как одно из возможных описаний класса матриц A , для которых A^* и A^+ (псевдообратная матрица Мура–Пенроуза) перестановочны. Поскольку соотношение (14), очевидным образом, несимметрично, сопряженное соотношение $A^*AA^{*2} - A^{*2}AA^* = 0$ с ним линейно независимо.

4. Матрицы, унитарно приводимые к ленточной форме. Пусть

$$A = B + iC, \quad B = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = \frac{1}{2i}(A - A^*), \quad (15)$$

– теплицево разложение матрицы A . Последовательность

$$I, B, C, B^2, BC, CB, C^2, B^3, B^2C, BCB, CB^2, CB^2, \dots, C^3, \dots \quad (16)$$

эквивалентна последовательности (3) в том смысле, что, будучи разделена на слои, генерирует ту же последовательность $\{L_m\}$ обобщенных крыловских подпространств. Последовательность (16) оказывается более удобной для доказательства теорем 8 и 9.

ТЕОРЕМА 8. Пусть для матрицы A из (15) $\text{rank } C = 1$. В таком случае A может быть унитарно преобразована в ленточную матрицу с шириной ленты, не превосходящей 7, посредством конечного процесса, использующего лишь арифметические операции и квадратные корни.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начального вектора v рассмотрим последовательность

$$v, Bv, Cv, B^2v, BCv, CBv, C^2v, B^3v, B^2Cv, \dots, \quad (17)$$

эквивалентную последовательности (2). Из условия теоремы легко вытекает, что слои последовательности (17) имеют ширину ≤ 2 . Если процесс Ланцоша, примененный к (17), порождает ортогональный базис в $\mathbb{C}^n$, то переход к этому базису дает нужную ленточную матрицу, унитарно подобную матрице A . Иначе, мы имеем лишь ортогональный базис общего для A и A^* инвариантного подпространства $\mathcal{L}$. Выбрав ненулевой вектор в ортогональном дополнении $\mathcal{L}^\perp$, проведем процесс Ланцоша еще раз. Не исключено, что может потребоваться и неоднократное повторение. Однако, в конечном счете, ортогональный базис для $\mathbb{C}^n$ будет построен, а вместе с ним и ленточная форма требуемой ширины для A . Отличие от первого случая состоит в том, что эта форма будет прямой суммой не менее чем двух ленточных матриц.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть t – ненулевой вектор из образа матрицы C . Найти такой вектор несложно; например, годится любой ненулевой столбец самой матрицы C . Полагая в (17) $v = t$, мы без труда убедимся, что эта последовательность эквивалентна (снова с точки зрения генерируемых крыловских подпространств) обычной степенной последовательности $t, Bt, B^2t, B^3t, \dots$. Если последняя порождает все пространство $\mathbb{C}^n$, то, ортонормируя ее, приходим даже к трехдиагональной форме для матрицы A . Это один из результатов статьи [3]. Теорема 8 отличается от него тем, что позволяет выбор произвольного начального вектора. Как следствие, ширина ленты возрастает с 3 до 7.

Несколько усложняя рассуждения, можно установить следующий более общий результат.

ТЕОРЕМА 9. Пусть для матрицы A из (15) $\text{rank } C = k$, где $k < (n - 2)/2$. В таком случае A может быть унитарно преобразована в ленточную матрицу с шириной ленты, не превосходящей $4k + 3$, посредством конечного процесса, использующего лишь арифметические операции и квадратные корни.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что число w_i имеет смысл приращения размерности обобщенного крыловского подпространства L_i по сравнению с L_{i-1} . Обозначим через r_i (s_i) составляющую этого приращения, полученную за счет векторов i -го слоя последовательности (17), в выражениях которых первым слева множителем является матрица B (соответственно C). Очевидно,

$$w_i = r_i + s_i. \quad (18)$$

Пусть m – максимальное среди значений индекса i таких, что $s_i \neq 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^m s_i \leq k. \quad (19)$$

Слой i последовательности (17) может быть получен умножением матрицы B , а затем C на все векторы $(i - 1)$ -го слоя, откуда

$$r_i \leq w_{i-1} = r_{i-1} + s_{i-1}. \quad (20)$$

Используя соотношения (18)–(20), находим

$$w_m = r_m + s_m \leq r_{m-1} + s_{m-1} + s_m \leq \dots \leq r_1 + s_1 + \dots + s_m \leq r_1 + k \leq 1 + k.$$

Поскольку $s_i = 0$ при $i > m$, имеем

$$r_i = w_i \leq w_{i-1} \leq \dots \leq w_m \leq 1 + k, \quad i > m.$$

Итак, $w_i \leq 1 + k$ для всех i , т.е. в неравенстве (5) можно положить $b = 1 + k$, откуда и следует нужное утверждение.

Теперь мы рассмотрим обобщение теоремы 8 в другом направлении: одноранговое (не обязательно косоэрмитово) возмущение R будет придаваться (вместо эрмитовой) произвольной нормальной матрице N . Положим

$$A = N + R \quad (21)$$

и запишем R в форме внешнего произведения

$$R = xy^*, \quad x, y \in \mathbb{C}^n. \quad (22)$$

Векторы x и y , в общем случае, линейно независимы.

Выберем произвольно ненулевой вектор v и определим последовательность линейных подпространств $\{M_i\}$ формулами

$$M_1 = \text{span}\{x, y, v, Nv, N^*v\}, \quad (23)$$

$$M_{i+1} = \text{span}\{M_i, NM_i, N^*M_i\}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Правую часть равенства (24) нужно понимать как линейную оболочку столбцов указанных трех матриц.

Применяя матрицу N к начальным векторам v, x и y , построим три обобщенных крыловских последовательности; соответствующие крыловские подпространства обозначим через $L_i, \tilde{L}_i$ и $\hat{L}_i$.

ЛЕММА 1. $L_i \subset M_i \subset \text{span}\{L_i, \tilde{L}_{i-1}, \hat{L}_{i-1}\}$, $i = 1, 2, \dots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если учесть, что $L_1 = \text{span}\{v, Nv, N^*v\}$, $\tilde{L}_0 = \text{span}\{x\}$, $\hat{L}_0 = \text{span}\{y\}$, то утверждение леммы при $i = 1$ следует из формулы (23). Для $i \geq 2$ лемма легко доказывается по индукции. При этом используется то, что подпространства M_i при $i \geq 2$ генерируются так же, как обобщенные подпространства Крылова L_i .

Пусть w_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) есть ширина i -го слоя в матричной последовательности

$$I, N, N^*, N^2, NN^*, N^{*2}, N^3, N^2N^*, NN^{*2}, N^{*3}, \dots$$

Введем, кроме того, числа

$$\bar{l}_i = \dim M_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \bar{w}_1 = \bar{l}_1, \quad \bar{w}_i = \bar{l}_i - \bar{l}_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots$$

ЛЕММА 2. *Справедливы неравенства*

$$\bar{w}_1 \leq 3 + w_1, \quad \bar{w}_i \leq w_i + 2w_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Эти неравенства непосредственно вытекают из леммы 1 и формул (23), (24).

ТЕОРЕМА 10. *Предположим, что для нормальной $(n \times n)$ -матрицы N справедлива равномерная оценка ширины слоев $w_i \leq b$, $i = 1, 2, \dots$, причем $2 \leq b < n/6$. Тогда всякая матрица A вида (21), где R – одноранговое возмущение (22), может быть унитарно преобразована в ленточную матрицу с шириной ленты, не превосходящей $12b-1$, посредством конечного процесса, использующего лишь арифметические операции и квадратные корни.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение обобщенного процесса Ланцоша к последовательности подпространств $\{M_i\}$ порождает ленточную матрицу, унитарно подобную матрице A . Подсчет ширины ленты производится так же, как в п. 2 (см. замечание 2). Нужно лишь вместо чисел w_i использовать числа $\bar{w}_i$. Согласно лемме 2 и условию теоремы $\bar{w}_i \leq 3b$, $i = 1, 2, \dots$.

В связи с теоремой 10 упомянем о недавнем результате М. Крупника [11]: всякую нормальную матрицу N с простым спектром можно превратить в нильпотентную матрицу A посредством некоторого однорангового возмущения R . Согласно теореме такие нильпотенты A унитарно подобны ленточным матрицам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bunse-Gerstner A., Elsner L. Schur parameter pencils for the solution of the unitary eigenproblem // Linear Algebra Appl. 1991. V. 154–156. P. 741–778.
- [2] Elsner L., Ikramov Kh. D. On a condensed form for normal matrices under finite sequences of elementary unitary similarities // Linear Algebra Appl. 1997. V. 254. P. 79–98.
- [3] Longstaff W. E. On tridiagonalization of matrices // Linear Algebra Appl. 1988. V. 109. P. 153–163.
- [4] Sturmfels B. Tridiagonalization of complex matrices and a problem of Longstaff // Linear Algebra Appl. 1988. V. 109. P. 165–166.
- [5] Fong C. K., Wu P. Y. Band-diagonal operators // Linear Algebra Appl. 1996. V. 248. P. 185–204.
- [6] Икрамов Х. Д. Каноническая форма Шура унитарно квазидиагонализуемой матрицы // ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37. № 12. С. 1411–1415.
- [7] Gaines F. J., Laffey T. J., Shapiro H. M. Pairs of matrices with quadratic minimal polynomials // Linear Algebra Appl. 1983. V. 52–53. P. 289–292.
- [8] Kreyszig E. Ein Satz über Matrixeigenwerte // Elem. Math. 1970. V. 25. № 3. P. 60–61.
- [9] Hoffman A. J., Taussky O. A characterization of normal matrices // J. Res. Nat. Bur. Standards. 1954. V. 52. P. 17–19.
- [10] Hartwig R. E., Spindelboeck K. Matrices for which A^* and A^+ commute // Linear and Multilinear Algebra. 1984. V. 14. P. 241–256.
- [11] Krupnik M. Changing the spectrum of an operator by perturbation // Linear Algebra Appl. 1992. V. 167. P. 113–118.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 Университет г. Билефельд (Германия)
 E-mail: ikramov@cmc.msk.su

Поступило
 05.01.97