Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, О различных определениях однородности вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 881–887

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 07:55:18

УДК 517.55

О РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ОДНОРОДНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^2$

А. В. Лобода

Доказано совпадение двух определений локальной однородности для вещественно-аналитических гиперповерхностей двумерных комплексных пространств. Из эквивалентности любых двух ростков невырожденной по Леви несферической поверхности M выведено существование на ней структуры локальной группы Ли. В этом случае M транзитивно действует на себе посредством левых сдвигов, и каждый такой сдвиг является локальным голоморфным преобразованием $\mathbb{C}^2$.

Библиография: 9 названий.

В настоящей заметке обсуждается связь различных определений однородности относительно голоморфных преобразований для вещественных гиперповерхностей двумерных комплексных пространств. Мы рассматриваем здесь только локальный аспект, поэтому везде ниже речь идет о пространстве $\mathbb{C}^2$.

Традиционным можно считать следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гиперповерхность M в $\mathbb{C}^n$ называется *однородной в точке* $p \in M$, если некоторая локальная группа Ли (голоморфных преобразований) транзитивно действует на M вблизи этой точки.

В то же время с точки зрения многомерного комплексного анализа и проблем продолжения локально заданных отображений естественным является

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Гиперповерхность M в $\mathbb{C}^2$ называется *слабо однородной в точке* $p \in M$, если росток M в любой близкой к p точке голоморфно эквивалентен ростку M в любой другой близкой точке.

Одной из целей данной статьи является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Для вещественно-аналитических гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ определения 1 и 2 равносильны.*

Отметим, что слабая однородность (определение 2) очевидно следует из однородности в смысле определения 1. Ниже доказывается обратное утверждение.

В общей ситуации возникает много вопросов о возможности “склейки” транзитивной совокупности разрозненных отображений из определения 2 в гладкое многообразие, каким является группа Ли (размеры окрестностей, в которых определены заданные отображения, гладкая зависимость их от точки поверхности и т.п.). В случае, выделенном в теореме 1, все эти вопросы удается решить.

Средством для этого является нормальная форма Мозера [1], позволяющая достаточно подробно изучать локальные отображения вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$.

С использованием оценок Белошапки и Витушкина [2], связанных с нормальной формой, в статье доказана

ТЕОРЕМА 2. *Если вещественно-аналитическая гиперповерхность M невырождена по Леви, несферична и слабо однородна в некоторой своей точке, то вблизи нее M имеет структуру локальной группы Ли. Действия этой группы на себе посредством сдвигов являются локальными голоморфными преобразованиями в пространстве $\mathbb{C}^2$.*

В невырожденном по Леви несферическом случае теорема 1 является следствием теоремы 2. Сферические же и вырожденные по Леви слабо однородные гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$, очевидно, допускают локальные транзитивные группы. Тем самым, теорема 1 полностью сводится к теореме 2. Доказательству последней и посвящена данная работа. Основным моментом этого доказательства является предложение 5.

Отметим, что близкие вопросы рассматривались, например, в работе [3]. В [4] изучались голоморфные инварианты и свойства слабо однородных трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$. В то же время список гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$, допускающих транзитивные группы голоморфных преобразований, получен еще в [5]. Теорему 1 настоящей статьи можно рассматривать как одно из обобщений этого давнего результата Э. Картана.

В пространствах $\mathbb{C}^n$ большей размерности изучены компактные однородные гиперповерхности [6], [7]. Вместе с тем и здесь возможны чисто локальные подходы и утверждения типа теорем 1 и 2. Например, предложение 5 легко обобщается на строго псевдовыпуклые гиперповерхности в комплексных пространствах $\mathbb{C}^n$ любой размерности с использованием модификации специальной нормальной формы, предложенной в [8], [9]. Вместе с тем при $n \geq 3$ обобщение теоремы 2 заведомо сталкивается с осложнениями. Вызваны они различающимися, вообще говоря, размерностями гиперповерхности $M^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ и действующей на ней транзитивно группы G . Так, в неомбилическом случае в $\mathbb{C}^3$ для размерностей таких групп справедливы лишь оценки $5 \leq \dim G \leq 9$ в отличие от единственно возможного равенства $\dim G = 3$ при $n = 2$.

1. Единственность специального нормального уравнения. Уравнение

$$v = F(z, \bar{z}, u) = \sum_{k,l,m} F_{klm} (z - z_0)^k (\bar{z} - \bar{z}_0)^l (u - u_0)^m \quad (1)$$

вещественно-аналитической гиперповерхности M из $\mathbb{C}^2$, невырожденной по Леви в точке $p(z_0, w_0)$, голоморфной заменой координат, определенной вблизи p , можно привести к виду (см. [1])

$$v = |z|^2 + F_{420} z^4 \bar{z}^2 + F_{240} z^2 \bar{z}^4 + \sum_{\substack{k+l+2m \geq 7 \\ \min\{k,l\} \geq 2}} F_{klm} z^k \bar{z}^l u^m. \quad (2)$$

Если при этом окажется, что коэффициент F_{420} отличен от 0, т.е. поверхность M неомбилична в точке p , то возможна дальнейшая нормализация уравнения (2). В результате можно получить ограничения

$$F_{420} = 1, \quad F_{430} = 0, \quad \operatorname{Re} F_{421} = 0. \quad (3)$$

Всякая нормализация уравнения (1) определяется некоторым набором параметров $P = (C, \rho, a, r)$, являющихся по сути младшими производными нормализующего отображения. При композиции двух отображений с наборами P_1 и P_2 соответственно параметры (C, ρ, a, r) композиции аналитически зависят от наборов P_1 и P_2 .

Для перехода от обычного нормального уравнения (2) к специальному, удовлетворяющему условиям (3), в [1, с. 246–247] строится отображение, параметры которого аналитически зависят от коэффициентов $F_{420} \neq 0, F_{430}, F_{421}$ начального уравнения. В свою очередь, эти коэффициенты аналитически (рационально) зависят от коэффициентов F_{klm} исходного уравнения (1), возможно не являющегося нормальным.

Следовательно, мы можем сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Набор параметров $P = (C, \rho, a, r)$, обеспечивающий приведение уравнения (1) неомбилической гиперповерхности к специальной нормальной форме (2), (3), аналитически зависит от производных в точке p не более, чем седьмого порядка, определяющей функции $F(z, \bar{z}, u)$.*

Сохранить вид (2) и условия (3) могут только два отображения: $\psi_1 = \text{Id}$ (тождественное) и $\psi_2 = \{z^* = -z, w^* = w\}$.

В силу этого специальное нормальное уравнение (2), (3), в котором присутствуют только коэффициенты F_{klm} с четными суммами $k+l$, единственно. Если же хотя бы один “нечетный” коэффициент F_{klm} отличен от 0, такой единственности нет. Мы ее получим, если потребуем, например, чтобы для этого ненулевого “нечетного” коэффициента F_{klm} выполнялось условие

$$\operatorname{Re} F_{klm} \geq 0, \quad \operatorname{Im} F_{klm} > 0 \quad \text{в случае } \operatorname{Re} F_{klm} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для невырожденной по Леви вещественно-аналитической неомбилической гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ существует специальное нормальное уравнение Мозера (2), определяемое условиями (3) и, возможно, (4) единственным образом.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Отображение, приводящее M к такому уравнению, единственно, если в полученном уравнении имеется ненулевой “нечетный” коэффициент. Группа локальных автоморфизмов M в обсуждаемой точке в этом случае тривиальна. Единственной альтернативой этому случаю для неомбилической поверхности в $\mathbb{C}^2$ является группа, содержащая два элемента. Для таких поверхностей единственности приведения к нормальной форме, разумеется, нет. Вместе с тем можно (и это делается в п. 3) говорить о единственности приведения, близкого к заданному отображению.

2. Непрерывность специальной нормальной формы. Пусть M – вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$, невырожденная по Леви и неомбилическая в точке $p \in M$. Так как названные свойства имеют место в некоторой окрестности точки p , в каждой точке из этой окрестности возможно приведение M к специальной нормальной форме. При этом каждая точка q имеет свою окрестность $V(q)$, в которой определено такое приведение.

Первое утверждение о непрерывности, которое мы здесь докажем, связано с размерами окрестностей, в которых возможно приведение к специальной нормальной форме.

Везде ниже *окрестностью точки A* в каком-либо многомерном пространстве $\mathbb{C}^n$ мы будем называть полидиск, центром которого является точка A , а радиусы дисков

по каждой из переменных пространства $\mathbb{C}^n$ одинаковы. Этот общий радиус R будем называть *размером* обсуждаемого полидиска.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть вещественная гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^2$ аналитична, невырождена по Леви и неомбилична в точке p . Тогда существует окрестность $U(p)$ этой точки в пространстве $\mathbb{C}^2$ и два положительных числа R_1 и R_2 такие, что для любой точки $q \in M \cap U(p)$

- 1) приведение φ_q поверхности M к специальной нормальной форме с центром в точке $q \in M$ определено в бидиске $B = B(q)$ радиуса не меньше R_1 ;
- 2) образ $\varphi_q(B_q)$ содержит бидиск $E = E_q(0)$ радиуса не меньше R_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем считать, что исходная точка p – начало координат, а сама поверхность M уже задана вблизи этой точки специальным нормальным уравнением (2), (3) (возможно, с дополнительным условием (4)).

Свяжем с каждой близкой к нулю точкой $q(z_0, w_0) \in M$ два простых преобразования. Первое из них – перенос

$$z^* = z - z_0, \quad w^* = w - w_0 \quad (5)$$

этой точки в начало координат пространства $\mathbb{C}^2$.

Обозначая набор трех чисел $(z_0, \bar{z}_0, u_0)$, связанных с точкой $q \in M$, той же буквой q , запишем новое уравнение M в виде

$$v = F^{(1)}(z, \bar{z}, u; q). \quad (6)$$

Ясно, что функция $F^{(1)}(z, \bar{z}, u; q)$ аналитична в некотором полидиске с центром в начале координат шестимерного комплексного пространства. Аналитичны по q и ее производные первого порядка

$$F_{100} = F_{100}(q) = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z}(0, 0, 0; q), \quad F_{001} = F_{001}(q) = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial u}(0, 0, 0; q).$$

Второе преобразование координат

$$z^* = z, \quad w^* = (1 - iF_{001})w - 2iF_{100}z \quad (7)$$

уничтожает в уравнении (6) слагаемые линейные по $z, \bar{z}, u$. Поэтому правая часть нового уравнения M

$$v = F^{(2)}(z, \bar{z}, u; q) = F_q^{(2)}(z, \bar{z}, u) \quad (8)$$

удовлетворяет условиям

$$F_q^{(2)}(0, 0, 0) = 0, \quad dF_q^{(2)}(0, 0, 0) = 0. \quad (9)$$

Так как (6) и (7) аналитически зависят от своих аргументов, функция $F^{(2)}(z, \bar{z}, u; q) = F_q^{(2)}(z, \bar{z}, u)$ также является аналитичной по совокупности переменных.

Следовательно, для некоторого замкнутого полидиска $U_\varepsilon(0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$ и каждой его точки q в замыкании трехмерного полидиска $W = W_\varepsilon(0)$ радиуса ε выполняется оценка

$$m(F_q^{(2)}) = \max_{\bar{W}} |F_q^{(2)}(z, \zeta, \xi)| \leq m, \quad (10)$$

общая для всех q .

Так как параметру $q = 0$ соответствует исходное нормализованное уравнение (2), то

$$\frac{\partial^2 F_0^{(2)}}{\partial z \partial \bar{z}}(0) = 1.$$

Тогда можно считать, что для всех $q \in V_\varepsilon(0)$

$$dF_q^{(2)} = \frac{\partial^2 F_q^{(2)}}{\partial z \partial \bar{z}}(0) \geq \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Приведения к нормальной форме поверхностей семейства (8) в силу условий (9)–(11) удовлетворяют лемме 1 из [2, с. 966]. Согласно этой лемме радиус полидиска, в котором определено приведение h_q поверхности (8) к нормальной форме, оценивается снизу положительной непрерывной функцией $\Theta(R(F_q^{(2)}), dF_q^{(2)}, m(F_q^{(2)}), P)$. Напомним, что здесь $P = (C, \rho, a, r)$ – набор параметров приведения h_q ; $R(F_q^{(2)}) = \varepsilon$ – радиус полидиска, в котором сходится ряд $F_q^{(2)}(z, \zeta, \xi)$; $dF_q^{(2)}$ и $m(F_q^{(2)})$ – величины, определяемые в (10) и (11).

В силу равномерности оценок (10) и (11) нужный нам радиус $R(h_q)$ оценивается непрерывной функцией от набора параметров P . Учитывая предложение 1 и аналитичность функции $F_q^{(2)}(z, \bar{z}, u) = F^{(2)}(z, \bar{z}, u)$ по всем аргументам, получаем аналитическую зависимость от точки $q \in M$ для набора P . Так как q меняется на компакте $\bar{U} = \{|z| \leq \varepsilon, |u| \leq \varepsilon\}$, радиус $R(h_q)$ оценивается положительной непрерывной функцией на этом компакте.

Следовательно, все отображения h_q , приводящие поверхности (8) к специальной нормальной форме, определены в едином бидиске B пространства $\mathbb{C}^2$.

Интересующая нас нормализация φ_q поверхности M с центром в произвольной точке $q \in M$ является композицией преобразований (5), (7) и отображения h_q . Первое из них не меняет размеров обсуждаемых полидисков, а для отображений (7) и h_q у нас имеются оценки радиусов и модулей. Тогда согласно [2] их композиция φ_q также допускает равномерную по q оценку радиуса.

Тем самым, существование бидисков $B(q)$ единого радиуса R_1 доказано. Ссылаясь снова на [2], получаем равномерную оценку радиусов и единый бидиск $E = E_q(0)$ для обратных отображений φ_q^{-1} .

Предложение 3 доказано.

Из предложений 1 и 3 вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *В условиях предложения 3 нормализующее отображение φ_q и обратное к нему φ_q^{-1} аналитически зависят от точки q , меняющейся вблизи нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, каждая нормализация h_q есть композиция нескольких простых отображений. Два таких отображения, приводящие к аналитической зависимости от q функции $F_q^{(2)}(z, \bar{z}, u)$, рассмотрены выше. Дальнейшая нормализация уравнения (8) определяется (см. [1], [2]) некоторыми производными функции $F_q^{(2)}(z, \bar{z}, u)$ и набором параметров $P = (C, \rho, a, r)$, также аналитически зависящим от q .

Следовательно, φ_q обладает требуемой аналитичностью. Однако, тогда аналитически зависит от q и отображение φ_q^{-1} .

СЛЕДСТВИЕ. Специальное нормальное уравнение (2), (3) аналитически зависит от точки q неомбилической невырожденной по Леви гиперповерхности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Размеры окрестности $U(0)$ и полидисков $B(q)$ и $E_q(0)$ в предложении 3 можно выбирать так, чтобы помимо названных условий выполнялись следующие ограничения на якобианы φ_q и φ_q^{-1} :

$$|J(\varphi_q) - 1| < \delta \text{ на } B(q), \quad |J(\varphi_q^{-1}) - 1| < \delta \text{ на } E_q(0)$$

для любого желаемого δ .

Это возможно, так как φ_q и φ_q^{-1} аналитичны, а φ_0 есть тождественное отображение.

3. Доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что слабо однородная и несферическая гиперповерхность M неомбилична в каждой своей точке.

С каждой точкой q , расположенной на неомбилической поверхности M в ε -окрестности точки $0 \in M$, мы связали выше два бидиска $B(q)$ и $E_q(0)$ радиусов R_1 и R_2 соответственно в пространстве $\mathbb{C}^2$.

В каждой окрестности $E_q(0)$ задана специальным нормальным уравнением гиперповерхность M_q^* , голоморфно эквивалентная ростку M в точке q .

Для слабо однородной поверхности M это означает голоморфную эквивалентность друг другу всех таких поверхностей M_q^* . В силу же аналитической зависимости уравнений M_q^* от точки $q \in M$ все M_q^* совпадают друг с другом и, в частности, с $M_0^* = M$.

Таким образом, каждое $\varphi_q: B(q) \rightarrow \varphi_q(B(q))$ есть отображение поверхности M в себя. Отображений, отличных от φ_q и их композиций с симметриями, M не допускает. Поэтому мы имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть M – невырожденная по Леви несферическая вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$, слабо однородная в точке p . Тогда существуют положительное число R и окрестность $U = U_\varepsilon(p)$ этой точки в пространстве $\mathbb{C}^2$ такие, что для каждой точки $q \in M \cap U$ всякое отображение φ_q ростка M в точке q в росток M в точке p и обратное к нему φ_q^{-1} определены в бидисках радиуса не меньше R .

Введем теперь новую величину $R = \frac{1}{3} \min\{\varepsilon, R\}$ и рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^2$ бидиск $D = D_R(0)$ радиуса R с центром в нуле. Для любой точки $q \in D \cap M$ как множество $B(q)$, так и $\varphi_q(B(q))$ содержат некоторую окрестность нуля. Следовательно, при $p, q \in D$ можно рассматривать композицию отображений $\varphi_p \circ \varphi_q$. Она заведомо определена вблизи точки $t = \varphi_p^{-1}(q) \in B(q)$. При этом

$$(\varphi_q \circ \varphi_p)(t) = \varphi_q(\varphi_p(\varphi_p^{-1}(q))) = \varphi_q(q) = 0.$$

На точки близкие к нулю можно подействовать еще одним отображением φ_s ($s \in D$). Композиции

$$\varphi_s \circ (\varphi_q \circ \varphi_p), \quad (\varphi_s \circ \varphi_q) \circ \varphi_p \tag{12}$$

определены вблизи точки t , при этом

$$\begin{aligned} (\varphi_s \circ (\varphi_q \circ \varphi_p))(t) &= \varphi_s((\varphi_q \circ \varphi_p)(t)) = \varphi_s(0), \\ ((\varphi_s \circ \varphi_q) \circ \varphi_p)(t) &= (\varphi_s \circ \varphi_q)(\varphi_p(t)) = (\varphi_s \circ \varphi_q)(q) = \varphi_s(\varphi_q(q)) = \varphi_s(0). \end{aligned}$$

Якобиан каждого из отображений (12) близок к 1, и оба они переводят точку $t \in M$ в одну и ту же точку $\varphi_s(0)$ поверхности M . Если бы эти отображения не совпадали друг с другом, то за счет симметрии $\{z^* = -z, w^* = w\}$ их якобианы сильно бы отличались. Следовательно, композиции (12) определяют одно и то же отображение на их общей области определения.

Поэтому можно говорить о локальной группе отображений $\{\varphi_q\}_{q \in D}$. При этом каждое такое отображение естественно связано с точкой q гиперповерхности M по правилу $\varphi_q(q) = 0$.

Следовательно, можно считать локальной группой само многообразие M , рассматриваемое вблизи нуля. Единичным элементом такой группы является тождественное отображение φ_0 или точка $0 \in M$. Произведением двух точек $q, p \in M$ является точка $t = \varphi_p^{-1}(q)$. Единственным отображением, переводящим эту точку в 0 и имеющим близкий к 1 якобиан, является $\varphi_q \circ \varphi_p$.

Обратный элемент к точке $p \in M$ определяется как $\xi = \varphi_p(0)$, так как $\varphi_p^{-1}(\xi) = 0$.

Остается заметить, что $\varphi_p(0)$ аналитически зависит от точки p , а $\varphi_p^{-1}(q)$ – от пары точек p, q из малой окрестности нуля. Следовательно, гиперповерхность M является группой Ли.

Теорема 2 доказана.

Настоящая статья была задумана и большей частью подготовлена во время пребывания автора в университетах Западного Онтарио и Реджайны (Канада) по любезному приглашению профессоров Б. Гиллигана и А. Бовэна. Автор выражает им глубокую признательность за предоставленную возможность для работы и благодарит за полезные обсуждения, связанные с этой статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133. № 3. P. 219–271.
- [2] Белошанка В. К., Витушкин А. Г. Оценки радиуса сходимости степенных рядов, задающих отображения аналитических гиперповерхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 5. С. 962–984.
- [3] Ehlers F., Neumann W. D., Scherk J. Links of surface singularities and CR space forms // Comment. Math. Helv. 1987. V. 62. P. 240–264.
- [4] Лобода А. В. О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 2. С. 211–223.
- [5] Cartan E. Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1932. Sér. 11. P. 17–90.
- [6] Morimoto A., Nagano T. On pseudo-conformal transformations of hypersurfaces // J. Math. Soc. Japan. 1963. V. 15. № 3. P. 289–300.
- [7] Rossi H. Homogeneous strongly pseudoconvex hypersurfaces // Rice Univ. Studies. 1973. V. 59. № 1. P. 131–145.
- [8] Webster S. M. On the Moser normal form at a nonumbilic point // Math. Ann. 1978. V. 233. № 2. P. 97–102.
- [9] Burns D., Shneider S., Wells R. O. Deformations of strictly pseudoconvex domains // Invent. Math. 1978. V. 46. № 3. P. 237–253.