Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Маресин, Теорема Картана–Грауэрта для тубоидов с “криволинейным” острием, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 888–901

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 10:30:27

УДК 517.55

ТЕОРЕМА КАРТАНА–ГРАУЭРТА ДЛЯ ТУБОИДОВ С “КРИВОЛИНЕЙНЫМ” ОСТРИЕМ

И. В. Маресин

Тубоиды – это области трубчатого типа с вполне вещественным острием, асимптотически аппроксимируемые вблизи точек острия локальными трубами над выпуклыми конусами. Для таких областей доказывается аналог теоремы Картана о голоморфной выпуклости областей в $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Библиография: 5 названий.

В работе Картана [1] был доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА КАРТАНА. Пусть $M = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_{(x)}^n + i0$ есть “вещественное” подпространство в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}_{(x)}^n + \mathbb{R}_{(y)}^n$ и Ω – область в M . Тогда Ω имеет фундаментальную систему окрестностей в $\mathbb{C}^n$, являющихся областями голоморфности. Иными словами, для любой открытой окрестности U множества Ω в $\mathbb{C}^n$ найдется область голоморфности D в $\mathbb{C}^n$ такая, что $\Omega \subset D \subset U$.

Эта теорема была распространена Грауэртом [2] на случай произвольных n -мерных вещественно-аналитических многообразий M .

В настоящей работе указанная теорема Картана–Грауэрта обобщается на случай тубоидов. Если $M = \mathbb{R}_{(x)}^n \subset \mathbb{C}^n$, то тубоид – это область в $\mathbb{C}^n$, которая асимптотически вблизи точек $x \in M$ приближается к локальной трубе вида $\Omega + iC_x$, где C_x – открытый конус в $\mathbb{R}_{(y)}^n$, а Ω – открытая окрестность точки x (точное определение тубоидов приводится в п. 2.2). При этом M называется *острием тубоида*, а конус C_x – его *профилем в точке x* ; заметим, что профиль C_x может зависеть от x , т.е. меняться от точки к точке. Понятие тубоида было введено в работах Броса и Ягольницера [3], [4]; ими же доказано обобщение теоремы Картана–Грауэрта для тубоидов с “прямолинейным” острием, т.е. в случае, когда M есть $\mathbb{R}_{(x)}^n$ (а также в случае, когда M есть n -мерное вещественно-аналитическое вполне вещественное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, который сводится к предыдущему).

В данной работе доказывается обобщение теоремы Картана–Грауэрта для тубоидов с “криволинейным” острием M , а именно, в случае, когда M есть график C^2 -гладкого отображения $H: \mathbb{R}_{(x)}^n \rightarrow \mathbb{R}_{(y)}^n$ с нормой $\|H'(x)\| < 1$ для любого $x \in \mathbb{R}_{(x)}^n$ (точная формулировка теоремы приводится в п. 2.4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00640, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96131.

§ 1. Предварительные сведения из топологии

1.1. Допустимые отображения. Пусть X – топологическое пространство. Топологическую структуру на X можно задавать с помощью отображений $F: X \rightarrow \Theta$ в 2-элементное множество $\Theta = \{o, \bullet\}$, так что подмножество $\{x \in X : F(x) = o\}$ будет отвечать открытому подмножеству в X , а его дополнение $\{x \in X : F(x) = \bullet\}$ – замкнутому. Задание топологии на X (т.е. системы открытых или системы замкнутых подмножеств в X) в этих терминах будет равносильно заданию набора $\tau(X)$ допустимых отображений $F: X \rightarrow \Theta$. Более подробно, обозначим через $\wedge$ и $\vee$ стандартные операции *конъюнкции* и *дизъюнкции* на множестве Θ . Если отождествить элемент o с “истиной”, а элемент $\bullet$ с “ложью”, то операции $\wedge$ и $\vee$ будут определяться следующей таблицей:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
o	o	o	o
o	$\bullet$	$\bullet$	o
$\bullet$	o	$\bullet$	o
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

Если F и G – отображения из X в Θ , то определены поточечные операции $F \wedge G$ и $F \vee G$. Операция $\wedge$ для открытых множеств отвечает их пересечению, а для замкнутых – объединению; наоборот, операция $\vee$ для открытых множеств отвечает объединению, а для замкнутых – пересечению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Топология на X задается набором $\tau(X)$ *допустимых отображений* $F: X \rightarrow \Theta$, удовлетворяющих следующим условиям:

- отображения $F \equiv \bullet$ и $F \equiv o$ принадлежат $\tau(X)$;
- если F и G принадлежат $\tau(X)$, то $F \wedge G$ и $F \vee G$ принадлежат $\tau(X)$;
- для любого семейства $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in I$, отображений из $\tau(X)$

$$\bigvee_{\alpha \in I} F_\alpha \in \tau(X),$$

где операция $\bigvee$ определяется так же, как и выше, равенством

$$\bigvee_{\alpha \in I} F_\alpha(x) = \begin{cases} o, & \text{если существует } \alpha_0 \in I, \text{ для которого } F_{\alpha_0}(x) = o, \\ \bullet, & \text{если для любого } \alpha \in I \text{ имеем } F_\alpha(x) = \bullet. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Базой топологии* $\tau(X)$ пространства X называется подмножество $\mathcal{B}$ в $\tau(X)$, удовлетворяющее условиям:

- отображение $F \equiv o$ принадлежит $\mathcal{B}$;
- если F и G принадлежат $\mathcal{B}$, то найдется семейство $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ отображений $H_\alpha \in \mathcal{B}$ такое, что $F \wedge G = \bigvee_{\alpha \in I} H_\alpha$;
- отображение $F \in \tau(X)$ тогда и только тогда, когда найдется семейство $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ отображений из $\mathcal{B}$ такое, что $F = \bigvee_{\alpha \in I} F_\alpha$.

Любое семейство $\mathcal{B}$ отображений $F: X \rightarrow \Theta$, удовлетворяющих перечисленным условиям, определяет некоторое множество допустимых отображений $\tau(X)$, для которого $\mathcal{B}$ является базой. Для того чтобы получить $\tau(X)$, достаточно рассмотреть минимальное множество отображений $F: X \rightarrow \Theta$, содержащее базу $\mathcal{B}$ и $F \equiv \bullet$ и замкнутое относительно дизъюнкции.

1.2. Пространства непрерывных отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Непрерывное отображение* f из топологического пространства X в топологическое пространство Y определяется в “ τ -терминах” как отображение, сохраняющее τ , более точно: отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого $F \in \tau(Y)$ композиция $F \circ f \in \tau(X)$. Пространство непрерывных отображений из X в Y обозначим через $C(X, Y)$.

В частности, наделяя 2-элементное множество Θ естественной топологией (в которой единственным открытым подмножеством, отличным от $\emptyset$ и Θ , является $\{o\}$), получим, что $\tau(X) = C(X, \Theta)$ для любого топологического пространства X .

Множество допустимых отображений $\tau(X)$ само является топологическим пространством. Топология на нем задается множеством $\tau(X, \Theta)$ допустимых отображений из $C(X, \Theta)$ в Θ . Базу указанной топологии составляют допустимые отображения вида $\mathcal{F}_K: C(X, \Theta) \rightarrow \Theta$, где K – произвольный компакт в X , а отображение $\mathcal{F}_K$ определяется равенством

$$\mathcal{F}_K(F) = \bigwedge_K F = \begin{cases} o, & \text{если } F(x) = o \text{ для любого } x \in K, \\ \bullet, & \text{если } F(x_0) = \bullet \text{ для некоторого } x_0 \in K. \end{cases}$$

Введенная топология $\tau(X, \Theta)$ совпадает с компактно открытой топологией на $C(X, \Theta)$.

Квантор $\bigwedge_K F$, впервые появившийся в предыдущей формуле, будет постоянно использоваться на протяжении этой статьи и потому заслуживает отдельного рассмотрения. Для произвольного компактного топологического пространства K и допустимого отображения $F \in \tau(K)$ определим его так же, как и выше, полагая

$$\bigwedge_K F = \begin{cases} o, & \text{если } F(x) = o \text{ для любого } x \in K, \\ \bullet, & \text{если } F(x_0) = \bullet \text{ для некоторого } x_0 \in K. \end{cases}$$

Квантор $\bigwedge_K F$ обладает следующим свойством непрерывности. Если $\{F_k\}$ – непрерывное семейство допустимых отображений топологического пространства Y в Θ , параметризуемое точками компакта K , то отображение $\bigwedge_{k \in K} F_k: Y \rightarrow \Theta$ также допустимо.

Вернемся к пространству непрерывных отображений $C(X, Y)$. По аналогии с топологией $\tau(X, \Theta)$ на $C(X, \Theta)$ мы можем ввести *компактно открытую топологию* $\tau(X, Y)$ на пространстве отображений $C(X, Y)$. Она задается базой допустимых отображений $\mathcal{F}: C(X, Y) \rightarrow \Theta$ вида $\mathcal{F}_{K,F} = \bigwedge_K F$, где K – произвольный компакт в X , а $F \in \tau(Y)$, так что

$$\mathcal{F}_{K,F}(f) = \bigwedge_K F(f) = \begin{cases} o, & \text{если } F(f(x)) = o \text{ для любого } x \in K, \\ \bullet, & \text{если } F(f(x_0)) = \bullet \text{ для некоторого } x_0 \in K. \end{cases}$$

Далее пространство непрерывных отображений $C(X, Y)$ мы будем всегда наделять указанной компактно открытой топологией.

Отметим очевидную лемму.

ЛЕММА 1. Пусть X, Y, Z – топологические пространства и $g: Y \rightarrow Z$ – непрерывное отображение. Тогда композиция с g определяет непрерывное отображение

$$C(X, Y) \rightarrow C(X, Z), \quad f \mapsto g \circ f.$$

В частности, из леммы 1 следует непрерывность операций $\wedge$ и $\vee$ в $\tau(X)$. Подчеркнем, что топология в Θ и соответственно в $\tau(X)$ (если X непусто) является нехаусдорфовой.

Приведем еще одну лемму о пространствах непрерывных отображений, справедливую для локально компактных топологических пространств. Это лемма о “послойном представлении” пространства $C(X \times Y, Z)$.

ЛЕММА 2. Пусть X и Y – локально компактные топологические пространства, Z – произвольное топологическое пространство. Тогда

$$C(X \times Y, Z) = C(X, C(Y, Z)).$$

1.3. Частичный порядок и отрицание. Введем на множестве Θ отношение порядка с помощью следующей таблицы:

$$\circ \succ \circ, \quad \circ \succ \bullet, \quad \bullet \succ \bullet, \quad \text{но } \bullet \not\succ \circ.$$

Это отношение индуцирует отношение частичного порядка на множестве допустимых отображений $\tau(X)$, именно, $F \prec G$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ выполняется $F(x) \prec G(x)$. Очевидно, что $F \succ F \wedge G$ и $F \vee G \succ F$ для любых $F, G \in \tau(X)$ и для любого семейства $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in I$, допустимых отображений из $\tau(X)$ $\bigvee_{\alpha \in I} F_\alpha \succ F_{\alpha_0}$ для любого $\alpha_0 \in I$. Если K – компакт и $\{F_k\}$ – непрерывное семейство допустимых отображений $Y \rightarrow \Theta$, параметризуемое точками $k \in K$, то для любого $k_0 \in K$ имеет место включение $\bigwedge_{k \in K} F_k \prec F_{k_0}$.

Заметим также, что для любого допустимого отображения $\mathcal{F}: \tau(X) \rightarrow \tau(Y)$ из $F \prec G$ для $F, G \in \tau(X)$ следует, что $\mathcal{F}(F) \prec \mathcal{F}(G)$.

На языке открытых множеств отношение $F \prec G$ означает включение соответствующих открытых подмножеств.

Введем операцию топологического отрицания $\neg$ на $\tau(X)$. Для допустимых отображений $F \in \tau(X)$ она определяется следующим образом:

$$\neg F := \bigvee_{G \in \tau(X): F \wedge G \equiv \bullet} G.$$

Иначе говоря, $H = \neg F$, если для любого $G \in \tau(X)$ справедливо соотношение $F \wedge G \equiv \bullet \iff G \prec H$. Если обозначить через $U = \{F = \circ\}$, $P = \{F = \bullet\}$ и соответственно через $V = \{H = \circ\}$, $Q = \{H = \bullet\}$, то V будет совпадать с внутренностью P , а Q – с замыканием U .

В частности, на 2-точечном пространстве Θ операция $\neg$ действует как логическое отрицание: $\neg \circ = \bullet$, $\neg \bullet = \circ$. Заметим, что операция топологического отрицания не является непрерывной на $\tau(X)$. Далее, для любого $F \in \tau(X)$ имеет место тождество $F \wedge \neg F \equiv \bullet$, но не всегда $F \vee \neg F \equiv \circ$. Геометрическое место точек, в которых $F \vee \neg F = \bullet$, называется границей F .

Отметим, что для любого $F \in \tau(X)$ имеет место включение $F \prec \neg \neg F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Допустимое отображение F будем называть *регулярным в точке* $x \in X$, если $F(x) = \neg \neg F(x)$. Отображение $F \in \tau(X)$ *регулярно на* X , если оно регулярно в каждой точке X . Множество регулярных допустимых отображений из $\tau(X)$ обозначим через $\tau_{\text{reg}}(X)$.

ПРИМЕР 1. Отображение $\theta \in \tau(\mathbb{R})$, задаваемое соотношением $\theta(x) = \bullet \iff x \geq 0$, регулярно, а отображение $\delta \in \tau(\mathbb{R})$, задаваемое соотношением $\delta(x) = \bullet \iff x = 0$, нерегулярно в нуле.

Снабдим множество $\tau_{\text{reg}}(X)$ топологией, база которой состоит из допустимых отображений $C(X, \Theta) \rightarrow \Theta$ вида

$$\mathcal{F}_K(F) = \bigwedge_K F \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_K(F) = \bigwedge_K \neg F,$$

где K – компакт в X . Очевидно, при этом вложение $\tau_{\text{reg}}(X) \rightarrow \tau(X)$ непрерывно.

Обобщая пример регулярного отображения θ , приведенный выше, рассмотрим непрерывную вещественную функцию f на X такую, что нули f не являются точками локального максимума или минимума для f (в качестве такой f можно взять, например, гармоническую функцию на X , не равную тождественно 0). Тогда $F = \theta(f)$ регулярно, непрерывно зависит от f и $\neg F = \theta(-f)$.

1.4. Топологическое сопряжение. Пусть K – компактное топологическое пространство, а L – локально компактное топологическое пространство. Допустимое отображение $C \in \tau(K \times L)$ мы будем называть *ядром сопряжения*, если сопоставление $K \ni k \mapsto C_k := C(k, \cdot)$ определяет непрерывное отображение из K в $\tau_{\text{reg}}(L)$, т.е. $C \in C(K, \tau_{\text{reg}}(L))$. Отсюда следует, в частности, что и отображение $K \ni k \mapsto \neg C_k$ из K в $\tau_{\text{reg}}(L)$ непрерывно.

Возвращаясь к примеру 1, предположим, что L – гладкое многообразие и $c = \{c_k\}_{k \in K} \in C(K, C^1(L))$ – непрерывное семейство гладких функций на L . Положим $C = \theta(c)$, так что $\neg C = \theta(-c)$. В этом случае условие непрерывности в определении 4 означает, что в любой точке $(k_0, l_0) \in K \times L$ такой, что $c(k_0, l_0) = 0$, ее градиент

$$\frac{\partial c}{\partial l}(k_0, l_0)$$

по l отличен от 0. В случае, когда $K = L = S^{n-1}$ есть единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, этому условию удовлетворяет, в частности, функция $c = c(k, l)$, равная скалярному произведению (k, l) .

По ядру сопряжения C можно определить две операции сопряжения, которые задаются непрерывными операторами вида

$$\begin{aligned} \tau(L) \ni R \mapsto R' \in \tau(K) \quad \text{с} \quad R'(k) &= \bigvee_{l \in L} C(k, l) \wedge R(l) \quad \text{для} \quad k \in K, \\ \tau(K) \ni Q \mapsto Q' \in \tau(L) \quad \text{с} \quad Q'(l) &= \bigwedge_{k \in K} \neg C(k, l) \vee Q(k) \quad \text{для} \quad l \in L \end{aligned}$$

(отметим, что для ядра сопряжения выполняется соотношение $(\neg C)(k, l) = (\neg C_k)(l)$).

Справедлива

ЛЕММА 3. Для любого допустимого $Q \in \tau(K)$ имеет место включение $Q'' \prec Q$. Для любого допустимого $R \in \tau(L)$ имеет место включение $R \prec R''$.

СЛЕДСТВИЕ. Для любых $R \in \tau(L)$, $Q \in \tau(K)$ справедливы равенства $R' = R''$, $Q' = Q'''$.

Операцию взятия “двойного штриха” обозначим крышкой. Назовем $R \mapsto \hat{R} = R''$ и $Q \mapsto \hat{Q} = Q''$ соответственно *открытым* и *замкнутым насыщением*, а элементы R с $R = \hat{R}$ и Q с $Q = \hat{Q}$ соответственно открыто и замкнуто насыщенными.

§ 2. Формулировка основного результата

2.1. Коноиды. Пусть V есть n -мерное векторное пространство. Обозначим через $SV = V \setminus \{0\}/\mathbb{R}_+$ *пространство направлений* V , отождествляемое с множеством лучей в V , выходящих из начала координат.

Если V – евклидово пространство, то пространство направлений SV можно отождествить с единичной сферой S^{n-1} в V с помощью отображения

$$V \setminus \{0\} \rightarrow SV \times \mathbb{R}_+, \quad v \mapsto (s, r),$$

где $s = v/r \in S^{n-1}$, $r = |v| \in \mathbb{R}_+$. Можно ввести метрику на SV , полагая

$$\angle(s, s') := \arccos(s, s'), \quad s, s' \in S^{n-1}.$$

Пользуясь отображением $V \setminus \{0\} \rightarrow SV$, можно сопоставить каждому $\Lambda \in \tau(SV)$ его “коническую оболочку” $\tilde{\Lambda} \in \tau(V \setminus \{0\})$ по формуле $\tilde{\Lambda}(s, r) := \Lambda(s)$. Доопределим $\tilde{\Lambda}$ по непрерывности в начале координат, полагая

$$\tilde{\Lambda}(0) := \bigwedge_{SV} \Lambda = \begin{cases} \circ, & \text{если } \Lambda(s) = \circ \text{ для всех } s \in SV, \\ \bullet & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим *раздутие* (вещественный σ -процесс) пространства V в начале координат. Для этого рассмотрим подмногообразие $\tilde{V}$ в прямом произведении $V \times SV \cong V \times (V \setminus \{0\}/\mathbb{R}_+)$, задаваемое посредством

$$\tilde{V} = \{(x, [v]) \in V \times SV : x_i v_j = x_j v_i, \quad i, j = 1, \dots, n\}.$$

Здесь через $[v]$ обозначается класс вектора $v \in V \setminus \{0\}$ в $SV \cong V \setminus \{0\}/\mathbb{R}_+$. Естественная проекция $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$, сопоставляющая $(x, [v]) \mapsto x$, отождествляет $\tilde{V} \setminus \{0\}$ с $V \setminus \{0\}$, при этом $\pi^{-1}(0) = SV$. Таким образом, $\tilde{V}$ является подмногообразием в $V \times SV$ с краем SV . Иначе говоря, можно представлять себе $\tilde{V}$ как пространство $V \setminus \{0\}$ с “вклеенной” в него в начале координат сферой SV .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Отображение $U \in \tau(V)$ будем называть *коноидом* с вершиной в начале координат и с профилем $\Lambda \in \tau(SV)$, если $U(0) \succ \tilde{\Lambda}(0)$ и существует непрерывное продолжение отображения U с $V \setminus \{0\}$ до отображения $\tilde{U} \in \tau(\tilde{V})$ такого, что

$$U_*(s, 0) \equiv \Lambda(s), \quad s \in SV.$$

Иными словами, U является коноидом с профилем Λ тогда и только тогда, когда для любого $v \in V$ такого, что $\tilde{\Lambda}(v) = \circ$, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $0 < \lambda < \varepsilon$ справедливо $U(\lambda v) = \circ$.

Аналогично определяется коноид с вершиной в произвольной точке пространства V .

Рассмотрим важный пример коноида, который будет использован нами ниже в § 3.

ПРИМЕР 2. Пусть $f: V \rightarrow \mathbb{R} - C^1$ -гладкая функция на V такая, что $f(0) \leq 0$. Рассмотрим отображение $\theta(f) \in \tau(V)$ из примера 1 и покажем, что оно является коноидом с вершиной в начале координат, профиль которого совпадает с $\circ$, если $f(0) < 0$, и с $\theta(df(0))$, если $f(0) = 0$. При этом допустимое отображение $\theta(df(0))$ определяется следующим образом:

$$\theta(df(0))(s) = \begin{cases} \circ, & \text{если } \frac{\partial f}{\partial s}(0) < 0, \\ \bullet, & \text{если } \frac{\partial f}{\partial s}(0) \geq 0, \end{cases} \quad s \in SV.$$

2.2. Тубоиды. Пусть M есть гладкое подмногообразие размерности m в V . Рассмотрим сферическое нормальное расслоение $S_M V = S(TV/TM)$, слой которого в точке $\xi \in M$ есть $S(T_\xi V/T_\xi M)$.

Обобщая понятие профиля коноида из определения 5, введем профиль $\Lambda \in \tau(S_M V)$, являющийся непрерывным семейством профилей $\Lambda_\xi \in \tau(S(T_\xi V/T_\xi M))$, где ξ пробегает многообразие M . Мы можем также рассматривать Λ_ξ как профиль в $T_\xi V \simeq V$, поднимая Λ_ξ в $\tau(S(T_\xi V))$ с помощью проекции $T_\xi V \rightarrow T_\xi V/T_\xi M$.

Непрерывное семейство коноидов с вершинами в точках $\xi \in M$ и профилями $\{\Lambda_\xi\}$ называется тубоидом. Объясним это более подробно.

Определим *раздутие (вещественный σ -процесс)* пространства V вдоль подмногообразия M . Оно является гладким многообразием $\tilde{V}_M$ с краем $S_M V$, которое строится по той же схеме, что и в п. 2.1. Именно, пусть $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – открытое покрытие V координатными окрестностями с локальными координатами $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$, выбранными так, что (в случае, если $M \cap W_\alpha \neq \emptyset$)

$$M \cap W_\alpha = \{x \in W_\alpha : x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Функции перехода от координатной окрестности W_α с локальными координатами $x = x^\alpha$ указанного вида к координатной окрестности W_β с локальными координатами $y = y^\beta$ имеют вид

$$y_j = \begin{cases} f_j(x), & j = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=m+1}^n x_k g_{jk}(x), & j = m+1, \dots, n, \end{cases}$$

с гладкими функциями $f_j = f_j^{\alpha\beta}$, $g_{jk} = g_{jk}^{\alpha\beta}$. Обозначим

$$\widetilde{W}_\alpha = \{(x, [v]) \in W_\alpha \times S\mathbb{R}^{n-m} : x_i v_j = x_j v_i, i, j = m+1, \dots, n\}.$$

Множества $\{\widetilde{W}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ играют роль координатных окрестностей для многообразия $\tilde{V}_M$, а роль координатных преобразований от окрестности $\widetilde{W}_\alpha$ с координатами $(x, [v])$ к окрестности $\widetilde{W}_\beta$ с координатами $(y, [w])$ играют замены координат вида

$$y_j = \begin{cases} f_j(x), & j = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=m+1}^n x_k g_{jk}(x), & j = m+1, \dots, n, \end{cases}$$

$$w_j = \sum_{k=m+1}^n v_k g_{jk}(x), \quad j = m+1, \dots, n.$$

Определим теперь $\tilde{V}_M$ как гладкое многообразие с краем $S_M V$, задаваемое атласом $\{\tilde{W}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ с указанными функциями перехода $\{f_j^{\alpha\beta}\}$, $\{g_{jk}^{\alpha\beta}\}$. Естественная проекция $\pi: \tilde{V}_M \rightarrow V$ отождествляет $\tilde{V}_M \setminus S_M V$ с $V \setminus M$, при этом $\pi^{-1}(M) \cong S_M V$.

Теперь мы можем дать определение тубоида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Отображение $U \in \tau(V)$ называется *тубоидом с острием M и профилем $\Lambda \in \tau(S_M V)$* , если $U(\xi) \succ \tilde{\Lambda}_\xi(0)$ и U можно непрерывно продолжить с $V \setminus M$ до отображения $\tilde{U} \in \tau(\tilde{V}_M)$ так, что в каждой точке $\xi \in M$

$$\tilde{U}(\xi, s) = \Lambda_\xi(s) \quad \text{для всех } s \in S_M V_\xi.$$

Иначе говоря, U является коноидом с вершиной в ξ и профилем Λ_ξ для любого $\xi \in M$.

2.3. Вещественноподобные подмногообразия комплексного пространства. Обозначим через $V_{\mathbb{C}}$ n -мерное комплексное векторное пространство, являющееся комплексификацией евклидова векторного пространства V , с комплексным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$. Вещественная часть этого скалярного произведения, имеющая вид

$$(z, w) = (x, u) - (y, w), \quad (1)$$

определяет на $V_{\mathbb{C}}$ метрику сигнатуры (n, n) . Обозначим через E пространство $V_{\mathbb{C}}$ с этой метрикой, рассматриваемое как $2n$ -мерное вещественное псевдоевклидово векторное пространство.

Будем говорить, что вектор z *вещественноподобен*, если $(z, z) > 0$, *мнимоподобен*, если $(z, z) < 0$, и *изотропен*, если $(z, z) = 0$. Линейное подпространство π в E называется *вещественноподобным* (соответственно *мнимоподобным*, *изотропным*), если каждый ненулевой вектор из π вещественноподобен (соответственно мнимоподобен, изотропен).

Очевидно, все вещественноподобные и мнимоподобные подпространства вполне вещественны относительно исходной комплексной структуры на $E = V_{\mathbb{C}}$. Кроме того, подпространство, ортогональное вещественноподобному, мнимоподобно, и наоборот.

Пространство $E = V_{\mathbb{C}}$ является прямой суммой вещественноподобного “вещественного” пространства $\Re := V$ и мнимоподобного “мнимого” пространства $\Im$, ортогонального $\Re$: $E = \Re + \Im$.

Введем понятие псевдоугла между n -мерными вещественноподобными плоскостями в E . Если π – подпространство в E , то псевдоугол между вектором z и π определяется как

$$\psi(\pi, z) := \operatorname{arch} \max_{w \in \pi \setminus \{0\}} \frac{(z, w)}{\sqrt{(z, z)} \sqrt{(w, w)}}.$$

В частности, псевдоугол между z и вещественным пространством $\Re$ равен

$$\psi(\Re, z) = \operatorname{arch} \frac{\sqrt{(x, x)}}{\sqrt{(z, z)}}.$$

Если теперь π и π' – произвольные n -мерные вещественноподобные подпространства в E , то *псевдоугол* между ними равен по определению

$$\psi(\pi, \pi') := \max_{z \in \pi' \setminus \{0\}} \psi(\pi, z).$$

Можно показать, что псевдоугол $\psi(\pi, \pi')$ между подпространствами π и π' обладает свойством симметрии $\psi(\pi, \pi') = \psi(\pi', \pi)$ и удовлетворяет неравенству треугольника $\psi(\pi, \pi'') \leq \psi(\pi, \pi') + \psi(\pi', \pi'')$. Тем самым, псевдоугол определяет метрику на множестве вещественноподобных подпространств в E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Гладкое подмногообразие M в E называется *вещественноподобным* (соответственно *мнимоподобным*, *изотропным*), если касательное пространство $T_\xi M$ в каждой точке $\xi \in M$ вещественноподобно (соответственно мнимоподобно, изотропно).

Очевидно, проекция $M \rightarrow \mathfrak{R}$ любого n -мерного вещественноподобного подмногообразия на вещественное пространство является локальным диффеоморфизмом. В этой работе рассматриваются n -мерные вещественноподобные подмногообразия в E , являющиеся графиками над $\mathfrak{R}$, т.е. глобально диффеоморфные $\mathfrak{R}$.

2.4. Основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть M есть n -мерное гладкое вещественноподобное подмногообразие в E , являющееся графиком C^2 -гладкого отображения $H: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{S}$, удовлетворяющего условию $\|H'(x)\| < 1$, $x \in \mathfrak{R}$. Пусть $\Lambda \in \tau(S_M E)$ есть послойно открыто выпуклый профиль над M , т.е. для каждого $\xi \in M$ множество $\{\tilde{\Lambda}_\xi = 0\}$ выпукло в $\tau(S(T_\xi V))$. Тогда для любого тубоида U с острием M и профилем Λ найдется тубоид $D \prec U$ с тем же профилем Λ , который является областью голоморфности в $V_\mathbb{C}$.

§ 3. Доказательство основного результата

Искомый тубоид D будем строить в виде пересечения компактного семейства стандартных областей голоморфности в $V_\mathbb{C}$, являющихся псевдошарами в метрике сигнатуры (n, n) на $E = V_\mathbb{C}$.

3.1. Псевдошары.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Псевдошаром радиуса r с центром в точке z_0 называется область вида

$$P(z_0, r) = \{z \in E : (z - z_0, z - z_0) + r^2 > 0\}.$$

Иначе говоря, $P(z_0, r)(z) = \theta(-(z - z_0, z - z_0) - r^2)$ (см. пример 1).

Очевидно, любой псевдошар является областью голоморфности в $V_\mathbb{C}$. Можно, обобщая это определение, ввести области

$$Q_w = \theta(q_w) = \{z \in E : q_w(z) < 0\},$$

где $q_w(z) = q(\varepsilon, w, \eta)(z) = -(\varepsilon z - 2w, z) - \eta$. Здесь, $w = [\varepsilon, w, \eta] \in W := \mathbb{R} \times E \times \mathbb{R}$, так что $P(z_0, r)$ отвечает области Q_w с $w = [1, z_0, (z_0, z_0) + r^2]$. Легко видеть, что при $\lambda > 0$ $Q_{\lambda w} = Q_w$ и области Q_w непрерывно зависят от $w \in SW$. Кроме того, они регулярны в смысле определения 4 и $Q_{-w} = -Q_w$.

Пусть теперь M есть вещественноподобное подмногообразие в E , удовлетворяющее условию основной теоремы. В каждой точке $\xi \in M$ имеем разложение

$$E \cong T_\xi E = \mathfrak{R}_\xi \oplus \mathfrak{S}_\xi,$$

где $\mathfrak{R}_\xi = T_\xi M$, а $\mathfrak{Z}_\xi$ – его ортогональное дополнение в $T_\xi E$.

Определим *функцию кривизны* многообразия M , полагая

$$\kappa(\xi) := \overline{\lim}_{M \ni \xi' \rightarrow \xi} \frac{\psi(\mathfrak{R}_\xi, \mathfrak{R}_{\xi'})}{\rho(\xi, \xi')}, \quad \xi \in M,$$

где $\rho(\xi, \xi')$ – расстояние между ξ и ξ' , вычисленное в метрике M , индуцированной метрикой (1) на E (п. 2.3).

Если многообразие M задается в окрестности точки ξ графиком гладкого отображения $H_\xi: \mathfrak{R}_\xi \rightarrow \mathfrak{Z}_\xi$, так что $H_\xi(\xi) = H'_\xi(\xi) = 0$, то $\kappa(\xi) = \|H''_\xi(0)\|$. Функция $\kappa(\xi)$ непрерывна, если M класса C^2 .

Введем также *характерный масштаб* многообразия M в точке ξ по формуле

$$\mu(\xi) := \min \left\{ 1, \inf_{\xi' \in M} \left(2\rho(\xi, \xi') + \frac{1}{\kappa(\xi')} \right) \right\}. \quad (2)$$

Для многообразия M класса C^2 , удовлетворяющего условию теоремы, формула (2) определяет непрерывную функцию $\mu: M \rightarrow (0, 1]$ такую, что $\kappa(\xi) \leq 1/\mu(\xi)$. Имея характерный масштаб в точке $\xi \in M$, задаваемый $\mu(\xi)$, естественно ввести нормированное скалярное произведение на $T_\xi E$, полагая

$$(z, z')_\xi := \frac{(z, z')}{\mu(\xi)^2}$$

для $z, z' \in E \cong T_\xi E$. Это скалярное произведение определяет риманову метрику на M , которую мы обозначим через $\gamma(\xi, \xi')$.

Обозначим через $B_\xi = \{v \in \mathfrak{Z}_\xi : |v|_\xi \leq R\}$ замкнутый шар радиуса R (далее считаем $R = 1/4$) в пространстве $\mathfrak{Z}_\xi$, а через $\mathring{B}_\xi$ его внутренность, т.е. открытый шар радиуса R относительно $|\cdot|_\xi$ с центром в нуле. Объединение B шаров B_ξ по всем точкам $\xi \in M$ образует замкнутую трубчатую окрестность (“переменного радиуса”) подмногообразия M в E , которую можно отождествить с шаровым подрасслоением в нормальном расслоении $N_M V$. Объединение шаров $\mathring{B}_\xi$ по $\xi \in M$ совпадает с внутренностью $\mathring{B}$ трубки B .

Следующая лемма позволяет дать эквивалентное определение тубоида в терминах введенного расслоения $\mathring{B}$.

ЛЕММА 4. *Допустимое отображение $U \in \tau(\mathring{B})$ является тубоидом с острием M и профилем Λ тогда и только тогда, когда $U(\xi, 0) \succ \Lambda_\xi(0)$ и продолжение U на $S_M E \times [0, R)$, задаваемое формулой*

$$\tilde{U}(\xi, s, r) = \begin{cases} U(\xi, s, r) & \text{при } r > 0, \\ \Lambda_\xi(s) & \text{при } r = 0, \end{cases}$$

непрерывно.

Псевдошары с центрами в точках B являются тубоидами с острием на M , профиль которых устанавливается в следующей лемме.

ЛЕММА 5. Пусть точка $\xi \in M$ и $v \in B_\xi$. Если $|v|_\xi < R$ (т.е. $v \in \mathring{B}_\xi$), то псевдошар $P((\xi, v), R\mu(\xi))$ с центром в точке $(\xi, v) \in B$ является тубоидом с профилем $\circ$. Если же $|v|_\xi = R$, то псевдошар $P((\xi, v), R\mu(\xi))$ является тубоидом, профиль которого в точке ξ совпадает с $\theta(-(v, \cdot))$ и с $\circ$ в остальных точках M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $z \in T_\xi E \cong E$ обозначим через $z = x_\xi + y_\xi$ его разложение в соответствии с представлением $T_\xi E = \mathfrak{R}_\xi + \mathfrak{I}_\xi$. Возьмем в качестве z произвольную точку $\xi' \in M$ с $|x_\xi|_\xi < 1/2$. (В доказательстве леммы всюду рассматривается норма $|\cdot|_\xi$, поэтому индекс ξ в этом обозначении будем в дальнейшем опускать.)

Тогда

$$\psi(\mathfrak{R}_\xi, \mathfrak{R}_{\xi'}) \leq \gamma(\xi, \xi') \leq -\frac{1}{2} \log(1 - 2|x_\xi|).$$

Следовательно, при $|x_\xi| < 1/2$ имеем

$$\frac{d|y_\xi|}{d|x_\xi|} \leq 2|x_\xi|.$$

С другой стороны, из условия вещественной подобности вытекает, что при $|x_\xi| \geq 1/2$ имеет место неравенство $|dy_\xi| < |dx_\xi|$. Отсюда получаем, что при $|x_\xi| < 1/2$ справедливо неравенство $|y_\xi| \leq |x_\xi|^2$, а при $|x_\xi| \geq 1/2$ — неравенство $|y_\xi| \geq |x_\xi| - 1/4$. Из этих неравенств вытекает утверждение леммы.

3.2. Построение компактного семейства областей. Рассмотрим семейство областей

$$Q_w = Q(\varepsilon, w, \eta) = \{z : \varepsilon(z, z) - 2(w, z) + \eta > 0\},$$

где параметр w пробегает подмножество

$$\tilde{\Phi} = \{w = [\varepsilon, w, \eta] \in SW : \varepsilon \geq 0, (w, w) \leq \varepsilon\eta \leq (w, w) + R^2\varepsilon^2\}.$$

Очевидно, $\tilde{\Phi}$ является замкнутым подмножеством в SW и потому компактно. Выделим в нем замкнутое подмножество

$$\Phi = \left\{w \in W : \bigvee_M Q_{-w} = \bullet\right\}.$$

Иначе говоря, Φ состоит из тех $w \in \tilde{\Phi}$, для которых замыкание области Q_w содержит M . Это подмножество тоже компактно и распадается в объединение $\Phi = \Phi_{\text{fin}} \cup \Phi_{\text{inf}}$, где

$$\Phi_{\text{fin}} = \{w \in \Phi : \varepsilon > 0\}, \quad \Phi_{\text{inf}} = \{w \in \Phi : \varepsilon = 0\} = \{[0, w, \eta] \in \Phi\}.$$

ЛЕММА 6. Для любого $w \in \Phi_{\text{inf}}$ область Q_w есть тубоид с профилем $\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, при $w_1 = [0, 0, 1]$ имеем $Q_{w_1} \equiv \circ$. Заметим также, что точка $w_2 = [0, 0, -1] \notin \Phi_{\text{inf}}$, поскольку в этом случае $Q_{w_1} \equiv \bullet$. Поэтому если $w \in \Phi_{\text{inf}}$ и $w \neq w_1$, то оно имеет вид $w = [0, w, \eta]$, где $w \neq 0$ (при этом $(w, w) = 0$). Предположим противное: найдется $\xi \in M$, для которого $Q_w(\xi) = \bullet$. Так как $Q_{-w}(\xi) = \bullet$ по определению Φ , то ξ лежит на границе области Q_w . Но тогда ξ принадлежит пересечению M с плоскостью $\{z : 2(z, w) - \eta = 0\}$. Заметим, что M не может касаться $\{z : 2(z, w) - \eta = 0\}$, так как вектор w изотропен, а M вещественно-подобно. Итак, ξ – точка трансверсального пересечения M с указанной плоскостью и потому найдется точка $\xi' \in M$, близкая к ξ , для которой $Q_{-w}(\xi') = \circ$, что невозможно по определению Φ .

Мы собираемся построить искомым тубоид D как пересечение областей Q_w из некоторого компактного подсемейства в Φ . Лемма 7 показывает, что пересечение с областями Q_w , $w \in \Phi_{\text{inf}}$, не будет приводить к сужению профиля тубоида D .

Заметим, что каждой точке $z = (\xi, v) \in B$ можно сопоставить $w \in \Phi_{\text{fin}}$ по формуле

$$z \mapsto w = w(z) = [1, z, (z, z) + R^2 \mu(\xi)^2];$$

соответствующая область Q_w совпадает при этом с псевдoshаром $P(z, R\mu(\xi))$. Это определяет вложение $B \rightarrow \Phi_{\text{fin}}$. Объединение образа B с Φ_{inf} задает компактное подмножество $\tilde{B}$ в Φ .

ЛЕММА 7. Для заданного послойно выпуклого профиля $\Lambda \in \tau(S_M E)$ найдется непрерывная функция $\chi: S_M E \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\Lambda \equiv \theta(-\chi)$ и для любого l , $0 \leq l < \infty$, отображение $\theta(l - \chi)$ послойно открыто выпукло.

3.3. Конструкция тубоида. Искомый тубоид будет строиться в несколько шагов путем “отсечения лишнего” у исходного тубоида U с профилем Λ . Для построения будет применяться операция топологического сопряжения (см. п. 1.4).

Пусть U – исходный тубоид с острием M и послойно открыто выпуклым профилем Λ . Согласно лемме 7 этот профиль задается непрерывной характеристической функцией $\chi: S_M E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Применим к нему операцию послойного замкнутого насыщения, а именно, для каждого $\xi \in M$ положим $K := SB_\xi$, $L := \mathring{S}\tilde{B}_\xi$ и определим ядро сопряжения формулой $C_k(l) := \theta(\chi(\xi, k) - l)$. Замкнутое насыщение слоя $U_{\xi, r}$ приводит к $V_{\xi, r} = U''_{\xi, r} \prec U_{\xi, r}$, причем $V_{\xi, 0} = \Lambda_\xi$ для всех $\xi \in M$. Тем самым, мы получаем тубоид $V \in C(M \times [0, R], \tau(SB))$ с острием M , для которого $V|_{M \times \{0\}} \prec U$ и $V|_{M \times \{0\}}$ имеет тот же самый профиль Λ . Кроме того, V обладает еще одним важным свойством: $V_{\xi, r}$ открыто выпукло в $\tau(SB_\xi)$ для любых $\xi \in M$ и $0 \leq r \leq R$.

Вторым шагом будет переход от тубоида V к тубоиду со сферически выпуклыми слоями. Для этого мы применим к V операцию послойного топологического сопряжения на $\tau(B_\xi)$, задаваемую ядром сопряжения

$$c(k, l) = (k, l)_\xi, \quad (k, l) \in K \times L, \quad (3)$$

где K – сфера радиуса r в B_ξ , а L – сфера “сопряженного” радиуса $r^* = \sqrt{R^2 - r^2}$ в $\mathring{B}_\xi$.

Указанное сопряжение в точке $\xi \in M$ приводит к $\Omega \in \tau(B)$, задаваемому посредством

$$\Omega(\xi, r) = \begin{cases} \bullet & \text{при } r = 0, \\ V'_{\xi, r^*} & \text{при } r > 0, \\ \Lambda'_\xi & \text{при } r = R. \end{cases}$$

Переход от V к Ω можно рассматривать как “выворачивание” острия тубоида V на границу трубки B .

Для того чтобы пояснить смысл проведенного построения, рассмотрим тубоид Ω' , задаваемый послойным “сферическим” сопряжением Ω относительно $K := B_\xi$, $L := \mathring{B}_\xi$ и ядра сопряжения, определяемого формулой $C_k(l) = \theta(R - |v' - v|_\xi)$. Насыщенность относительно указанной операции топологического сопряжения совпадает со сферической выпуклостью в том смысле, что сферически выпуклое открытое подмножество $Q' \in \tau(\mathring{B})$ является пересечением семейства открытых шаров радиуса R с центрами в точках множества $Q = \bullet$.

Заметим, что $\Omega'_\xi \prec V_\xi$. Действительно, если выполнено $\Omega'_\xi(s', r^*) = \circ$ в некоторой точке $(s', r^*) \in \mathring{B}_\xi$, то для любого s такого, что $\Omega_\xi(s, r) = \bullet$, расстояние между (s', r^*) и (s, r) строго меньше R : $|sr - s'r^*| < R$; откуда $(s, s') > 0$. Это условие означает, что $\Omega'_{\xi, r}(s') = \circ$ (сопряжение задается ядром $c(s, s')$, определенным формулой (3)). Отсюда в силу определения Ω и послойной открытой выпуклости V следует, что $V_{\xi, r^*}(s') = \circ$, т.е. $\Omega'_\xi(s', r^*) \prec V_{\xi, r^*}(s')$.

Далее, профиль тубоида Ω' в силу соотношения $\Omega_{\xi, R} = \Lambda'_\xi$ совпадает с $\Lambda''_\xi = \Lambda_\xi$ (ввиду послойной открытой выпуклости профиля Λ). Тем самым, мы получаем тубоид Ω' с острием M , который имеет сферически выпуклые слои и профиль Λ такой, что $\Omega' \prec V$.

Перейдем к третьему, заключительному, шагу нашей конструкции. Продолжим отображение $\Omega \in \tau(B)$ по непрерывности на $\tilde{B}$, пользуясь построенным в п. 3.2 вложением $B \hookrightarrow \Phi_{\text{fin}}$. Для этого положим $\Omega \equiv \circ$ на $\Phi_{\text{fin}} \setminus B$ и $\Omega \equiv \bullet$ на $\Phi_{\text{inf}} \setminus B$. Далее, обозначим

$$\Phi_0 = \{w \in \Phi : \Omega(w) = \bullet\} = \{w \in B : \Omega(w) = \bullet\} \cup \Phi_{\text{inf}}.$$

Теперь мы можем определить искомый тубоид D , полагая

$$D := \bigcap_{w \in \Phi_0} Q_w = \bigcap_{\xi \in M, v \in B_\xi : \Omega_\xi(v) = \bullet} P((\xi, v), R\mu(\xi)) \wedge \bigcap_{w \in \Phi_{\text{inf}}} Q_w. \quad (4)$$

Иными словами, D является пересечением компактного семейства областей Q_w , которые совпадают с псевдосферами в “конечных” точках Φ (т.е. в точках Φ_{fin}) и с полупространствами (или всем пространством) в “бесконечных” точках (т.е. в точках Φ_{inf}). Тубоид D является областью голоморфности как пересечение семейства областей голоморфности (см., например, [5, следствие 2.5.7]).

Покажем, что D лежит внутри $\mathring{B}$. Действительно, если $w = w(\xi, 0) \in \Phi_0$, то область Q_w совпадает с псевдосферой $P(\xi, R\mu(\xi))$, пересечение которого с плоскостью $\Im_\xi$ равно $\mathring{B}_\xi$. Поэтому D лежит внутри $\mathring{B}$.

Рассмотрим слой $D_\xi \subset \mathring{B}_\xi$, $\xi \in M$, и докажем, что $D_\xi \prec \Omega'_\xi$. Действительно, D_ξ заведомо содержится в пересечении множеств $Q_{w, \xi} \cap \mathring{B}_\xi$ с $w = w(\xi, v) \in \Phi_0$. Но $Q_{w, \xi} \cap \mathring{B}_\xi$

совпадает с шаром радиуса R (в метрике $|\cdot|_\xi$) с центром в точке v , а пересечение всех таких шаров есть по определению Ω'_ξ . Следовательно, $D \prec \Omega'$.

Покажем, что профиль D совпадает с Λ . Формулу (4) согласно определению Q_w можно переписать в виде

$$D = \bigwedge_{w \in \Phi_0} \theta(q_w),$$

где $q_w(z) = -(\varepsilon z - 2w, z) - \eta$ есть непрерывное семейство квадратичных функций на E , гладко зависящее от параметра $w \in \Phi$. Докажем, что в каждой точке $\xi_0 \in M$ D является коноидом с вершиной в ξ_0 и профилем Λ_{ξ_0} . Для этого применим к функциям q_w , ограниченным на $\hat{B}$, конструкцию из примера 2. Если $w \in \Phi_0$, то возможны три случая:

- 1) из $w \in \Phi_{\inf}$ следует, что функция q_w отрицательна на всем M и потому профиль D в точке ξ_0 равен 0;
- 2) из $w = w(\xi, s, r)$, где $r < R$, следует, что функция q_w отрицательна на всем M и потому профиль D в точке ξ_0 равен 0;
- 3) из $w = w(\xi, s, R)$ следует, что если $\xi \neq \xi_0$, то профиль D в точке ξ_0 равен 0, если же $\xi = \xi_0$, то $q_w(\xi_0) = 0$, причем градиент

$$\left. \frac{\partial q_w}{\partial s'} \right|_{\xi_0}$$

совпадает по направлению с $-(s, s')$, т.е. Q_w является коноидом с вершиной в ξ_0 и профилем – полупространством $\theta(-(s, s'))$, где $s' \in T_{\xi_0} E$; отсюда в силу непрерывной зависимости Q_w от w (как коноида с вершиной в ξ_0) следует, что D есть коноид с вершиной в ξ_0 и профилем

$$\bigwedge_{s \in S_{\xi_0} M : \Lambda'_{\xi_0}(s) = \bullet} \theta(-(s, s')) = \Lambda''_{\xi_0}(s') = \Lambda_{\xi_0}(s').$$

Итак, для любого $\xi_0 \in M$ D является коноидом с вершиной в ξ_0 и профилем Λ_{ξ_0} . Это означает, что D является тубоидом с острием M и профилем Λ .

Окончательно, имеем цепочку вложений $D \prec \Omega' \prec V \prec U$, откуда следует, что $D \prec U$. Тем самым, тубоид $D \prec U$ является областью голоморфности и имеет тот же профиль Λ , что и исходный тубоид U . Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору А.Г. Сергееву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cartan H. Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes // Bull. Soc. Math. France. 1957. V. 85. P. 77–100.
- [2] Grauert H. On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds // Ann. of Math. (2). 1958. V. 68. P. 460–472.
- [3] Bros J., Iagolnitzer D. Tuboides et structure analytique des distributions. Sémin. Goulaouic–Lions–Schwartz. V. 16, 18, 1975.
- [4] Bros J., Iagolnitzer D. Tuboides dans $\mathbb{C}^n$ et généralisation d'un théorème de Grauert // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1976. V. 26. №3. P. 49–72.
- [5] Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.