Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Пилиди, Обобщенная фредгольмовость и априорные оценки для линейных операторов в тензорных произведениях гильбертовых пространств, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 902–912

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:38:46

УДК 517.9

ОБОБЩЕННАЯ ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. С. Пилиди

Для линейного непрерывного оператора, действующего в гильбертовом пространстве, доказывается равносильность обобщенной фредгольмовости (обратимости по модулю некоторого идеала) и наличия некоторых априорных оценок. Этот результат применяется к доказательству утверждений о связи n -, d -нормальности и фредгольмовости (обобщенной и обычной) линейных операторов, действующих в тензорных произведениях гильбертовых пространств, с наличием соответствующих априорных оценок.

Библиография: 6 названий.

Напомним, что линейный непрерывный оператор A , действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, называется n -нормальным (d -нормальным), если его образ замкнут и подпространство $\ker A$ (соответственно $\ker A^*$) конечномерно. Оператор называется Φ -оператором (фредгольмовым оператором), если он n - и d -нормален (в литературе используется и несколько иное определение фредгольмова оператора [1, § 14]).

Пусть $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ ($\mathcal{K}(\mathfrak{X})$) – множество всех линейных непрерывных операторов, действующих в пространстве $\mathfrak{X}$. Фредгольмовость оператора A равносильна обратимости смежного класса $A + \mathcal{K}(\mathfrak{X}) \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})/\mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Если $\mathfrak{X}$ – гильбертово пространство, то n -нормальность (d -нормальность) оператора A равносильна обратимости этого смежного класса слева (справа).

Указанное свойство позволяет обобщить понятие фредгольмовости, связывая ее с идеалом, отличным от множества $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Из работ в этом направлении упомянем статью [2], где исследуются идеалы, связанные с обобщенным условием Реллиха (приводимое ниже условие Б)), и ассоциированная с ними обобщенная фредгольмовость. В работе [3] обобщенная фредгольмовость использована для исследования обычной фредгольмовости бисингулярных операторов.

Предположим, что банахово пространство $\mathfrak{X}$ компактно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$. Известно (см., например, [1, § 7]), что n -нормальность оператора A равносильна тому, что выполняется априорная оценка

$$\|x\|_{\mathfrak{X}} \leq \text{const} (\|Ax\|_{\mathfrak{X}} + \|x\|_{\mathfrak{Y}}), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Аналогичная оценка для оператора A^* равносильна d -нормальности оператора A .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01195.

В настоящей работе мы распространяем этот результат на случай обобщенной фредгольмовости линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. В п. 1 вводится понятие обобщенной фредгольмовости и устанавливается связь между этим понятием и наличием априорных оценок. Полученный здесь результат используется в п. 2 для доказательства равносильности свойств n -, d -нормальности, фредгольмовости (обобщенной и обычной) и наличия смешанных априорных оценок для операторов некоторого класса. Отметим, что применяемая в доказательстве леммы 2 конструкция изоморфного вложения опирается на схему, предложенную в статье [4] для построения изометрического представления факторалгебры $\mathcal{B}(\mathfrak{X})/\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ (алгебры Калкина) в случае гильбертова пространства $\mathfrak{X}$.

1. Всюду далее буквой H (с индексами или без них) обозначаются сепарабельные бесконечномерные комплексные гильбертовы пространства. Напомним, что любые два таких пространства H_1 и H_2 *изометрически изоморфны*, т.е. существует изометрический обратимый линейный оператор $U: H_1 \rightarrow H_2$.

Всюду в этом пункте предполагается, что $\mathfrak{A}(\subset \mathcal{B}(H))$ – некоторая C^* -алгебра, содержащая единичный оператор, $\mathfrak{K}(\subset \mathfrak{A})$ – собственный замкнутый двусторонний $*$ -идеал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор $A \in \mathfrak{A}$ назовем $\Phi_{\mathfrak{K}}$ -оператором, если смежный класс $A + \mathfrak{K} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ обратим.

Если $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}$ – C^* -алгебра, в которой $\mathfrak{K}$ является двусторонним идеалом, и $A \in \mathfrak{A}$, то смежный класс $A + \mathfrak{K}$ обратим в $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда он обратим в $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ [5, теорема 2.4.11]. Иначе говоря, $\Phi_{\mathfrak{K}}$ -свойство оператора A не зависит от содержащей этот оператор C^* -алгебры, в которой $\mathfrak{K}$ является двусторонним идеалом.

Нам потребуется аналогичное утверждение для односторонней обратимости смежного класса $A + \mathfrak{K}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{A}_1$ – C^* -алгебра с единицей, $\mathfrak{A}_0$ – ее C^* -подалгебра с той же единицей. Если элемент $a \in \mathfrak{A}_0$ односторонне обратим в $\mathfrak{A}_1$, то он обратим с той же стороны в $\mathfrak{A}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно ограничиться случаем обратимости слева и предполагать, что $\mathfrak{A}_1 = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ – некоторое гильбертово пространство. Предположим, что оператор A обратим слева в $\mathfrak{A}_1$. Это равносильно тому, что выполняется оценка

$$\|Ax\| \geq c\|x\|, \quad x \in \mathcal{H}, \quad (1)$$

с некоторой константой $c > 0$. Рассмотрим полярное разложение оператора A (см. [5, теорема 2.3.4]): $A = UP$, где $P = (A^*A)^{1/2} (\geq 0)$, U – частичная изометрия, $\ker U = \ker A$. Из (1) следует, что $\ker A = \{0\}$. Поэтому U – изометрия и $U^*U = I$. Для любого $x \in \mathcal{H}$

$$\|Px\|^2 = ((A^*A)^{1/2}x, (A^*A)^{1/2}x) = (A^*Ax, x) = \|Ax\|^2.$$

Поэтому для оператора P выполняется оценка вида (1); следовательно, он обратим. Учтем, что $P \in \mathfrak{A}_0$. Тогда $P^{-1} \in \mathfrak{A}_0$ (см. [5, теорема 2.4.11]). Теперь из равенства $U = AP^{-1}$ вытекает, что $U \in \mathfrak{A}_0$. Тогда для оператора $B = P^{-1}U^* (\in \mathfrak{A}_0)$ имеем $BA = I$. Лемма доказана.

Пока будем предполагать, что выполнено такое условие:

$$A) \bigcap_{T \in \mathfrak{K}} \ker T = \{0\}.$$

Ниже на идеал $\mathfrak{K}$ будут наложены дополнительные ограничения.

Пусть x, x_n ($n = 1, 2, \dots$) – элементы из H . Запись

$$\mathfrak{K}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

означает, что для любого $T \in \mathfrak{K}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n - x)\| = 0.$$

В силу условия А) последнему равенству удовлетворяет не более одного элемента x .

Напомним теперь определение обобщенного предела (подробности, включая существование обобщенного предела, см., например, в [6, гл. 3]). Как обычно, через ℓ^∞ обозначаем банахово пространство ограниченных последовательностей комплексных чисел с суп-нормой. Через $\ell_{\mathbb{R}}^\infty$ обозначим аналогичное пространство последовательностей вещественных чисел. *Обобщенный предел* – это линейный непрерывный функционал $\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, определенный на пространстве $\ell_{\mathbb{R}}^\infty$ и обладающий свойствами:

1) если $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell_{\mathbb{R}}^\infty$ и $x_n \leq y_n$ для всех n , то

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

2) для всех $\{x_n\} \in \ell_{\mathbb{R}}^\infty$

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Из свойства 2) следует, что если $\{x_n\} \in \ell_{\mathbb{R}}^\infty$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Функционал Lim очевидным образом распространяется на пространство ℓ^∞ .

Обозначим через $\ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$ множество всех ограниченных по норме последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ элементов пространства H таких, что

$$\mathfrak{K}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Это множество становится линейным пространством, если операции ввести равенствами:

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}, \quad \alpha \{x_n\} = \{\alpha x_n\}, \quad \{x_n\}, \{y_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K}), \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Потребуем дополнительно, чтобы выполнялось следующее условие:

Б) существует последовательность $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ ортопроекторов из идеала $\mathfrak{K}$ такая, что для любого $A \in \mathfrak{K}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - AR_n\| = 0. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В приводимых в п. 2 приложениях полученных здесь результатов операторы R_n при $n \rightarrow \infty$ сильно сходятся к единичному оператору. Отсюда немедленно вытекает, что идеал $\mathfrak{K}$ обладает свойством А).

Справедливо утверждение.

ЛЕММА 2. Если $A \in \mathfrak{A}$ и для любой последовательности $\{x_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = 0, \quad (3)$$

то $A \in \mathfrak{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что выполнено (2). Отсюда, учитывая, что для всех n $AR_n \in \mathfrak{K}$, получим требуемое утверждение. Допустим противное, т.е.

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A - AR_n\| > 0.$$

Возьмем последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ элементов из H такую, что $\|y_n\| = 1$ для всех n и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|(A - AR_n)y_n\| = \delta.$$

Положим $x_n = (I - R_n)y_n$, $n = 1, 2, \dots$. Из условия Б) следует, что $\{x_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$. Переписывая предыдущее равенство в виде

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = \delta(> 0),$$

получаем противоречие с условием. Лемма доказана.

Определим в пространстве $\ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$ полуторалинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ формулой

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle = \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n).$$

Правая часть этой формулы определена корректно ввиду ограниченности последовательности $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$. Форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обладает всеми свойствами скалярного произведения, кроме положительной определенности, являясь *положительно полуопределенной*. Построим из линейного пространства $\ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$ гильбертово пространство следующим стандартным способом.

Множество $\mathfrak{N}$ всех элементов $\{x_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$, удовлетворяющих условию

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0,$$

является подпространством линейного пространства $\ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$. Введем скалярное произведение в факторпространстве $\ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})/\mathfrak{N}$:

$$(\{x_n\} + \mathfrak{N}, \{y_n\} + \mathfrak{N}) = \langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle.$$

Очевидно, что правая часть этой формулы не зависит от выбора представителей смежных классов $\{x_n\} + \mathfrak{N}$ и $\{y_n\} + \mathfrak{N}$ и левая часть является скалярным произведением в линейном пространстве $\ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})/\mathfrak{N}$. Обозначим через $\mathbb{H}$ пополнение этого предгильбертова пространства.

Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Если $\{x_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$, то $\{Ax_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$. Из оценки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

вытекает, что линейный оператор $\hat{A}: \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})/\mathfrak{N} \rightarrow \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})/\mathfrak{N}$, действующий по правилу

$$\hat{A}: \{x_n\} + \mathfrak{N} \mapsto \{Ax_n\} + \mathfrak{N},$$

определен корректно и непрерывен. Продолжение по непрерывности этого оператора на все пространство $\mathbb{H}$ также будем обозначать через $\hat{A}$. Отметим, что $\|\hat{A}\| \leq \|A\|$. Мы доказали, что отображение $\Xi: A \mapsto \hat{A}$, действующее из $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, является непрерывным. Справедливо более точное утверждение.

ЛЕММА 3. *Отображение $\Xi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H})$ является непрерывным *-гомоморфизмом, $\ker \Xi = \mathfrak{K}$, и индуцированный гомоморфизм $\hat{\Xi}: \mathfrak{A}/\mathfrak{K} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H})$ является изометрически *-изоморфным вложением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что отображение Ξ является *-гомоморфизмом. Его непрерывность была отмечена выше.

Рассмотрим $\ker \Xi$. Если $A \in \mathfrak{K}$, то для любой последовательности $\{x_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$ выполнено (3), т.е. $\{Ax_n\} \in \mathfrak{N}$. Поэтому $\hat{A} = 0$ и $\mathfrak{K} \subset \ker \Xi$.

Пусть $A \in \ker \Xi$, т.е. $A \in \mathfrak{A}$ и $\hat{A} = 0$. Последнее означает, что для любой последовательности $\{x_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = 0.$$

Покажем, что при этом выполнено (3). Действительно, допустим, что это не так. Тогда

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| > 0.$$

Выберем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ax_{n_k}\| = \delta.$$

Мы получили противоречие, поскольку $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ax_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Ax_{n_k}\| = \delta \neq 0.$$

Из леммы 2 следует, что $A \in \mathfrak{K}$, т.е. $\ker \Xi \subset \mathfrak{K}$ и, окончательно, $\ker \Xi = \mathfrak{K}$.

Утверждение об изометричности индуцированного *-изоморфного вложения является известным результатом теории алгебр [5, теорема 3.1.5]. Лемма доказана.

Пусть L_1 и L_2 – линейные пространства над одним полем. Напомним, что *вложением* пространства L_1 в L_2 называется линейное инъективное отображение $J: L_1 \rightarrow L_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вложение $J: H \rightarrow H_1$ назовем $\mathfrak{K}$ -вложением, если существует изоморфизм $U: H_1 \rightarrow H$ такой, что $UJ \in \mathfrak{K}$.

Очевидно, что $\mathfrak{K}$ -вложение является непрерывным.

Пусть $J: H \rightarrow H_1$ является $\mathfrak{K}$ -вложением. отождествим пространство H с его образом при этом вложении. Для элементов из H теперь определены две нормы, которые будем обозначать через $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_{H_1}$ соответственно. Отметим, что для любой последовательности $\{x_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{H_1} = 0.$$

Наложим последнее ограничение на идеал $\mathfrak{K}$:

- В) существует подмножество $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$, плотное в $\mathfrak{K}$ в равномерной операторной топологии, такое, что для любого оператора $A \in \mathfrak{K}'$ найдется константа $c(= c(A))$ такая, что для всех $x \in H$

$$\|Ax\|_H \leq c \cdot \|x\|_{H_1}.$$

В этих обозначениях и предположениях справедливо утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $J: H \rightarrow H_1$ является $\mathfrak{K}$ -вложением. Для оператора $A \in \mathfrak{A}$ следующие условия равносильны:*

- 1) смежный класс $A + \mathfrak{K} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ обратим слева;
- 2) выполняется априорная оценка

$$\|x\|_H \leq \text{const} (\|Ax\|_H + \|x\|_{H_1}), \quad x \in H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Выберем произвольный оператор R из смежного класса, обратного слева к $A + \mathfrak{K}$. Тогда имеет место равенство $RA = I + T$, где $T \in \mathfrak{K}$. Воспользуемся свойством В). Выберем оператор $T_0 \in \mathfrak{K}'$, для которого $\|T - T_0\| < 1/2$. Положим $\Delta = T - T_0$. Оператор $I + \Delta$ обратим и

$$\|(I + \Delta)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\Delta\|} \leq 2.$$

Тогда, учитывая равенство $I + \Delta = RA - T_0$, получаем

$$\|x\|_H \leq \|(I + \Delta)^{-1}\| \cdot \|(RA - T_0)x\|_H \leq \text{const} (\|Ax\|_H + \|x\|_{H_1})$$

с константой, не зависящей от $x \in H$.

2) $\Rightarrow$ 1). Обратимость слева линейного непрерывного оператора B , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, равносильна наличию оценки

$$\|x\| \leq \text{const} \|Bx\|, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (4)$$

Выполнение оценки достаточно проверить на произвольном плотном в $\mathcal{H}$ множестве. Покажем, что из условия 2) теоремы вытекает оценка вида (4) для оператора $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$.

Пусть $\{x_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$. Тогда

$$\|x_n\|_H \leq \text{const} (\|Ax_n\|_H + \|x_n\|_{H_1}).$$

Применяя к обеим частям неравенства функционал Lim и учитывая, что

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{H_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{H_1} = 0,$$

получаем

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_H \leq \text{const} \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|_H.$$

Это означает, что для любого $\overline{x} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})/\mathfrak{N}$

$$\|\overline{x}\| \leq \text{const} \|\widehat{A}\overline{x}\|.$$

Тогда оператор $\widehat{A}$ обратим слева в $\mathscr{B}(\mathbb{H})$. Множество $\Xi(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$ является C^* -подалгеброй в $\mathscr{B}(\mathbb{H})$. В силу леммы 1 оператор $\widehat{A}$ обратим слева в $\Xi(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$. Тогда смежный класс $A + \mathfrak{K} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ обратим слева. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что $J: H \rightarrow H_1$ является $\mathfrak{K}$ -вложением. Для оператора $A \in \mathfrak{A}$ следующие условия равносильны:*

- 1) *A является $\Phi_{\mathfrak{K}}$ -оператором;*
- 2) *выполняются априорные оценки*

$$\begin{aligned} \|x\|_H &\leq \text{const} (\|Ax\|_H + \|x\|_{H_1}), & x \in H, \\ \|y\|_H &\leq \text{const} (\|A^*y\|_H + \|y\|_{H_1}), & y \in H. \end{aligned}$$

Мы будем использовать также модификацию теоремы 1. Рассмотрим следующее условие:

Г) в пространстве H задана норма $\|\cdot\|_1$ такая, что для любой последовательности $\{x_n\} \in \ell_0^\infty(H, \mathfrak{K})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_1 = 0.$$

Будем предполагать, что условие В) выполняется с заменой $\|\cdot\|_{H_1}$ на $\|\cdot\|_1$. Отметим, что именно условие вида Г) (вытекающее из предположения о том, что J является $\mathfrak{K}$ -вложением) используется в доказательстве теоремы 1. Тогда, *добавляя* к ограничениям на идеал $\mathfrak{K}$ условие Г), можно снять условие о $\mathfrak{K}$ -вложении. Мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для оператора $A \in \mathfrak{A}$ следующие условия равносильны:*

- 1) *смежный класс $A + \mathfrak{K} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ обратим слева;*
- 2) *выполняется априорная оценка*

$$\|x\|_H \leq \text{const} (\|Ax\|_H + \|x\|_1), \quad x \in H.$$

2. Перейдем теперь к приложениям теоремы 1.

Обозначим через $H \hat{\otimes} H$ пополнение алгебраического тензорного произведения $H \otimes H$ по стандартной норме [5, с. 230]. Рассмотрим множество всех операторов из $\mathcal{B}(H \hat{\otimes} H)$, представимых в виде конечных сумм $\sum_i A_i \otimes B_i$, где $A_i \in \mathcal{K}(H)$, $B_i \in \mathcal{B}(H)$ для всех значений индекса i . Обозначим через $\mathcal{K}(H) \hat{\otimes} \mathcal{B}(H)$ замыкание указанного множества в равномерной операторной топологии. Введем обозначение $\mathfrak{K}_1 = \mathcal{K}(H) \hat{\otimes} \mathcal{B}(H)$. Аналогично определим множества

$$\mathfrak{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}(H) \hat{\otimes} \mathcal{B}(H), \quad \mathfrak{K}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}(H) \hat{\otimes} \mathcal{K}(H), \quad \mathfrak{K}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{K}(H) \hat{\otimes} \mathcal{K}(H).$$

Обозначим через $\mathfrak{K}_{12}$ алгебраическую сумму множеств $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$. Тогда (см. [1, с. 284]) $\mathfrak{A}$ является C^* -подалгеброй алгебры $\mathcal{B}(H \hat{\otimes} H)$ (легко показать, что $\mathfrak{A} \neq \mathcal{B}(H \hat{\otimes} H)$), $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_{12}$ суть собственные замкнутые двусторонние $*$ -идеалы в $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_0 = \mathcal{K}(H \hat{\otimes} H)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор $A \in \mathfrak{A}$ назовем Φ_1 -оператором, если смежный класс $A + \mathfrak{K}_1 \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_1$ обратим.

Аналогично с идеалами $\mathfrak{K}_2$ и $\mathfrak{K}_{12}$ связываем понятия Φ_2 - и Φ_{12} -операторов.

ЛЕММА 4. Оператор $A \in \mathfrak{A}$ является n -нормальным тогда и только тогда, когда смежные классы

$$A + \mathfrak{K}_1 \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_1, \quad A + \mathfrak{K}_2 \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_2 \quad (5)$$

обратимы слева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что A является n -нормальным. Из леммы 1 получаем, что смежный класс $A + \mathfrak{K}_0 \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_0$ обратим слева. Тогда из вложений $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_2$ вытекает обратимость смежных классов (5).

Допустим, что смежные классы (5) обратимы слева, R_1 и R_2 – представители соответствующих обратных смежных классов. Тогда

$$R_1 A = I + T_1, \quad R_2 A = I + T_2,$$

где $T_1 \in \mathfrak{K}_1$, $T_2 \in \mathfrak{K}_2$. Рассмотрим оператор $R = R_1 + R_2 - R_1 A R_2$. Учтем, что $R \in \mathfrak{A}$, $RA - I = -(RA_1 - I)(RA_2 - I) = -T_1 T_2$. Поскольку $T_1 T_2 \in \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 (= \mathfrak{K}_0)$, отсюда выводим обратимость смежного класса $A + \mathfrak{K}_0 \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_0$ слева. Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает, что d -нормальность оператора $A \in \mathfrak{A}$ равносильна обратимости смежных классов (5) справа. Отсюда получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Оператор $A \in \mathfrak{A}$ является Φ -оператором тогда и только тогда, когда он является Φ_1 - и Φ_2 -оператором.

Предположим, что $J: H \rightarrow H_1$ – компактное вложение. Покажем, что пространства $H \hat{\otimes} H, H_1 \hat{\otimes} H$, вложение

$$J_1 \stackrel{\text{def}}{=} J \otimes I: H \hat{\otimes} H \rightarrow H_1 \hat{\otimes} H,$$

алгебра $\mathfrak{A}$ и ее идеал $\mathfrak{K}_1$ удовлетворяют всем требованиям теоремы 1.

Пусть $U: H_1 \rightarrow H$ – изоморфизм пространств H_1 и H . Тогда $U \otimes I: H_1 \widehat{\otimes} H \rightarrow H \widehat{\otimes} H$ является изоморфизмом пространств $H_1 \widehat{\otimes} H$ и $H \widehat{\otimes} H$. Кроме того, $(U \otimes I)J_1 = UJ \otimes I \in \mathfrak{K}_1$, так как $UJ \in \mathfrak{K}(H)$, т.е. J_1 является $\mathfrak{K}_1$ -вложением. Перейдем теперь к проверке условий А)–В).

Пусть $\{P_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность конечномерных ортопроекторов в $H \widehat{\otimes} H$, сильно сходящаяся к единичному оператору. Для любого оператора $T \in \mathfrak{K}(H)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - TP_n\| = 0.$$

Отсюда вытекает такое утверждение.

ЛЕММА 6. Для оператора $A \in \mathfrak{A}$ следующие условия равносильны:

- 1) $A \in \mathfrak{K}_1$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A(P_n \otimes I)\| = 0$.

Полагая $R_n = P_n \widehat{\otimes} I$, $n = 1, 2, \dots$, получаем, что для идеала $\mathfrak{K}_1$ выполнено условие В). При $n \rightarrow \infty$ операторы R_n сильно сходятся к единичному оператору. Поэтому для идеала $\mathfrak{K}_1$ выполнено условие А).

Перейдем к проверке условия В). Оператор $J^*: H_1 \rightarrow H$ имеет плотный в пространстве H образ, поскольку $\ker J = \{0\}$. Рассмотрим множество всех действующих в пространстве H операторов вида

$$Tx = u(x, v)_H, \quad x \in H, \quad (6)$$

где $u \in H$, $v \in \operatorname{im} J^*$.

Пусть $v = J^*w$, $w \in H_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|Tx\|_H &= \|u\|_H |(x, J^*w)_H| = \|u\|_H |(Jx, w)_{H_1}| \\ &\leq \|u\|_H \|w\|_{H_1} |Jx|_{H_1} = \|u\|_H \|w\|_{H_1} \|x\|_{H_1} \leq \operatorname{const} \|x\|_{H_1}, \quad x \in H. \end{aligned} \quad (7)$$

Для оператора вида (6) имеет место оценка $\|T\|_{H \rightarrow H} \leq \|u\|_H \|v\|_H$. Из нее следует, что любой одномерный оператор в H (имеющий вид (6) с произвольным элементом $v \in H$) может быть приближен по норме операторами вида (6). Поэтому любой конечномерный оператор, действующий в пространстве H , может быть приближен конечными суммами операторов вида (6). Тогда этим свойством обладает и любой компактный оператор в H .

Обозначим через $\mathfrak{K}'_1$ множество всех действующих в пространстве $H \widehat{\otimes} H$ операторов, представимых в виде конечных сумм

$$\sum_i T_i \otimes B_i,$$

где для всех значений индекса i операторы T_i имеют вид (6), $B_i \in \mathcal{B}(H)$.

В силу сказанного множество $\mathfrak{K}'_1$ плотно в $\mathfrak{K}_1$ в равномерной операторной топологии. Из (7) получаем, что для любого $A \in \mathfrak{K}'_1$ выполняется оценка

$$\|Ax\|_{H \widehat{\otimes} H} \leq \operatorname{const} \|x\|_{H_1 \widehat{\otimes} H}, \quad x \in H \widehat{\otimes} H.$$

Мы доказали, что выполняется условие В).

В приводимой ниже теореме 2 используются следующие априорные оценки:

$$\|x\|_{H \hat{\otimes} H} \leq \text{const} (\|Ax\|_{H \hat{\otimes} H} + \|x\|_{H_1 \hat{\otimes} H}), \quad x \in H \hat{\otimes} H, \quad (8)$$

$$\|y\|_{H \hat{\otimes} H} \leq \text{const} (\|A^*y\|_{H \hat{\otimes} H} + \|y\|_{H_1 \hat{\otimes} H}), \quad y \in H \hat{\otimes} H, \quad (9)$$

$$\|x\|_{H \hat{\otimes} H} \leq \text{const} (\|Ax\|_{H \hat{\otimes} H} + \|x\|_{H \hat{\otimes} H_1}), \quad x \in H \hat{\otimes} H, \quad (10)$$

$$\|y\|_{H \hat{\otimes} H} \leq \text{const} (\|A^*y\|_{H \hat{\otimes} H} + \|y\|_{H \hat{\otimes} H_1}), \quad y \in H \hat{\otimes} H. \quad (11)$$

Из теоремы 1, лемм 4, 5 и приведенных выше построений получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Смежный класс $A + \mathfrak{K}_1 \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_1$ обратим слева (справа) тогда и только тогда, когда выполняется оценка (8) (оценка (9)). Оператор A является Φ_1 -оператором (Φ_2 -оператором) тогда и только тогда, когда выполняются оценки (8), (9) (оценки (10), (11)). Оператор A является n -нормальным (d -нормальным) тогда и только тогда, когда выполняются оценки (8), (10) (оценки (9), (11)). Оператор A является Φ -оператором тогда и только тогда, когда выполняются оценки (8)–(11).

Перейдем теперь к идеалу $\mathfrak{K}_{12}$. Здесь, как и выше, предполагается, что пространство H компактно вложено в пространство H_1 . Мы воспользуемся следствием 2 из теоремы 1.

Определим в пространстве $H \hat{\otimes} H$ норму

$$\|x\|_{12} = \|x\|_{H_1 \hat{\otimes} H} + \|x\|_{H \hat{\otimes} H_1}.$$

Покажем, что алгебра $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H) \hat{\otimes} \mathcal{B}(H)$, идеал $\mathfrak{K}_{12}$ и эта норма удовлетворяют условиям А)–Г).

Рассмотрим последовательность операторов

$$R_n = (I \otimes I) - (I - P_n) \otimes (I - P_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

действующих в пространстве $H \hat{\otimes} H$, где $\{P_n\}$ – введенная выше последовательность конечномерных ортопроекторов. Легко видеть, что для каждого n оператор R_n является ортопроектором и при $n \rightarrow \infty$ операторы R_n сильно сходятся к единичному оператору из $\mathcal{B}(H \hat{\otimes} H)$. Покажем, что выполняется условие Б).

Пусть $A = T \otimes B$, где $T \in \mathcal{K}(H)$, $B \in \mathcal{B}(H)$. Тогда

$$\|A - AR_n\| = \|T(I - P_n)\| \cdot \|B(I - P_n)\| \leq \|T(I - P_n)\| \cdot \|B\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Из симметричных соображений получаем, что требуемое равенство выполняется для оператора $B \otimes T$ с сомножителями указанного вида. Поскольку эти операторы образуют в $\mathfrak{K}_{12}$ полное множество, доказываемое равенство выполняется для всех операторов из $\mathfrak{K}_{12}$.

Перейдем к свойству В) (с заменой H на $H \hat{\otimes} H$, $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{K}_{12}$ и $\|\cdot\|_{H_1}$ на $\|\cdot\|_{12}$). Рассмотрим множество $\mathfrak{K}'_{12}$ всех операторов в $H \hat{\otimes} H$, представимых в виде конечных сумм

$$\sum_i T_i \otimes B_i + \sum_j B'_j \otimes T'_j,$$

где для всех значений индексов i, j операторы T_i, T'_j имеют вид (6), $B_i, B'_j \in \mathcal{B}(H)$.

Учитывая результаты, полученные выше при доказательстве свойства В) для идеала $\mathfrak{K}_1$, и симметричные результаты для $\mathfrak{K}_2$, получаем, что это свойство выполняется и для $\mathfrak{K}_{12}$.

Перейдем к свойству Г). Пусть $\{x_n\} \in \ell^\infty(H \hat{\otimes} H, \mathfrak{K}_{12})$. Тогда $\{x_n\} \in \ell^\infty(H \hat{\otimes} H, \mathfrak{K}_1)$. Снова учитывая полученный результат для $\mathfrak{K}_1$, выводим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{H_1 \hat{\otimes} H} = 0.$$

Из симметричных соображений следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{H \hat{\otimes} H_1} = 0,$$

т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{12} = 0.$$

В формулировке теоремы 3 используются следующие априорные оценки для оператора $A \in \mathcal{B}(H \hat{\otimes} H)$:

$$\|x\|_{H \hat{\otimes} H} \leq \text{const} (\|Ax\|_{H \hat{\otimes} H} + \|x\|_{H_1 \hat{\otimes} H} + \|x\|_{H \hat{\otimes} H_1}), \quad x \in H \hat{\otimes} H, \quad (12)$$

$$\|y\|_{H \hat{\otimes} H} \leq \text{const} (\|A^*y\|_{H \hat{\otimes} H} + \|y\|_{H_1 \hat{\otimes} H} + \|y\|_{H \hat{\otimes} H_1}), \quad y \in H \hat{\otimes} H. \quad (13)$$

Согласно следствию 2 из теоремы 1 получаем такое утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Смежный класс $A + \mathfrak{K}_{12} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_{12}$ обратим слева (справа) тогда и только тогда, когда выполняется оценка (12) (оценка (13)). Оператор A является Φ_{12} -оператором тогда и только тогда, когда выполняются оценки (12) и (13).

Автор признателен В. М. Деундяку за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
- [2] Cordes H. O. On a class of C^* -algebras // Math. Ann. 1967. V. 170. № 4. P. 283–313.
- [3] Пилиди В. С. Многомерных бисингулярных операторах // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201. № 1. С. 787–789.
- [4] Calkin J. W. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators // Ann. of Math. 1941. V. 42. № 2. P. 839–873.
- [5] Мёрфи Дж. C^* -алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
- [6] Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1968.