Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Васильева, Нижние оценки скорости сходимости алгоритмов динамической реконструкции для систем с распределенными параметрами, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 675–687

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 06:47:38

УДК 517.977

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е. В. Васильева

Получены нижние оценки скорости сходимости алгоритмов реконструкции для системы параболического типа с распределенными параметрами. В случае поточечного ограничения на управление для известного ранее алгоритма реконструкции доказана нижняя оценка скорости сходимости, показывающая, что при выполнении определенных условий для каждого решения системы можно выбрать такой набор измерений, что ошибка восстановления будет не меньше некоторой величины. В случае неограниченных управлений получены нижние оценки возможной ошибки восстановления для каждой траектории, а также для заданного множества траекторий. Для системы специального вида построен алгоритм, для которого получены верхняя и нижняя оценки точности, имеющие одинаковый порядок при определенном выборе согласования параметров.

Библиография: 14 названий.

Рассматривается задача получения нижних оценок скорости сходимости алгоритмов динамической реконструкции для системы, описываемой уравнением

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = Bu(t), \quad t \in T = [0, \theta], \quad x(0) = x_0 \in V. \quad (1)$$

Здесь $(V, \|\cdot\|)$ – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, плотно и непрерывно вложенное в гильбертово пространство $(H, |\cdot|)$, отождествляемое со своим сопряженным: $H = H^*$. Производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле распределений $D^*(T; V^*)$ [1, с. 172]. Управление в системе – функция $u(\cdot) \in U_0 \subset L_2(T; U)$, где U_0 – выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве U . Оператор $A: V \rightarrow V^*$ линейный, непрерывный, сильно монотонный; оператор $B: U \rightarrow H$ линейный, непрерывный. При этих условиях уравнение (1) имеет единственное решение со свойствами $x(\cdot) \in L_2(T; V)$, $\dot{x}(\cdot) \in L_2(T; V^*)$ [1, с. 239], при этом $x(\cdot) \in C(T; H)$. Мы рассмотрим два случая: $U_0 = L_2(T; U)$ и $U_0 = P_T$, где

$$P_T = \{u(\cdot) \in L_2(T; U) : u(t) \in P \text{ для п.в. } t \in T\}, \quad (2)$$

P – ограниченное замкнутое множество в пространстве U .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00566 и № 03-01-00737.

Сформулируем задачу динамической реконструкции управления по неточным измерениям выхода [2]. Пусть для каждого $h \in (0, 1]$ выбрано равномерное разбиение отрезка T :

$$\Delta_h = \{\tau_i^h\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0^h = 0, \quad \tau_{m_h}^h = \theta.$$

Шаг разбиения $\delta = \delta(h)$, причем $\delta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. В моменты времени τ_i^h производятся измерения состояний системы $x(\tau_i^h)$. Результаты измерений – элементы $\xi_i^h \in Y$ – обладают свойством

$$\|\xi_i^h - x(\tau_i^h)\|_Y \leq h. \quad (3)$$

Здесь h – погрешность измерения, Y – банахово пространство мгновенных измерений. Мы рассмотрим случаи $Y = H$ и $Y = V$, причем свойства функции $x(\cdot)$ в каждом из рассматриваемых случаев обеспечивают включение $x(\cdot) \in C(T; Y)$. Пусть $U(x(\cdot)) \subset U_0$ – множество управлений, порождающих движение $x(\cdot)$; $u_*(\cdot) = u_*(x(\cdot))$ – минимальный по норме $L_2(T; U)$ элемент этого множества (он существует в силу линейности оператора B и свойств множества U_0). Требуется указать алгоритм, позволяющий по результатам измерений осуществить процесс динамического восстановления управления $u_*(\cdot)$. Так как точное восстановление невозможно, необходимо вычислять некоторое приближение функции $u_*(\cdot)$. Это приближение должно быть тем лучше, чем меньше величина погрешности измерения состояний $x(\tau_i^h)$ и чем гуще сетка Δ_h , взятая на промежутке T .

Для более точной формулировки задачи введем следующие обозначения. Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое множество траекторий системы (1). Для любых $x(\cdot) \in \mathcal{X}$ и $h \in (0, 1]$ обозначим символом $\Xi(h, x(\cdot))$ множество измеримых функций $\xi(\cdot): T \rightarrow Y$, удовлетворяющих условиям:

$$\|\xi(\tau_i^h) - x(\tau_i^h)\|_Y \leq h, \quad 0 \leq i \leq m_h,$$

и пусть

$$\Xi(h, \mathcal{X}) = \bigcup \{\Xi(h, x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathcal{X}\}.$$

Рассмотрим семейство операторов

$$D_h: \Xi(h, \mathcal{X}) \rightarrow L_2(T; U), \quad h \in (0, 1]. \quad (4)$$

Обозначим

$$\nu(h, x(\cdot) | D_h) = \sup \{\|D_h \xi(\cdot) - u_*(x(\cdot))\|_{L_2(T; U)} : \xi(\cdot) \in \Xi(h, x(\cdot))\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точностью семейства операторов $\{D_h\}$ называют функцию

$$\mu(h, \mathcal{X} | D_h) = \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{X}} \nu(h, x(\cdot) | D_h).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [3]. Семейство операторов $\{D_h\}$ называют *регуляризующим*, если имеет место сходимость

$$\mu(h, \mathcal{X} | D_h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [4]. Пусть X и Y – множества функций, определенных на отрезке T . Оператор $D: X \rightarrow Y$ называют *динамическим (вольтерровым)*, если для любых $t_0 \in T$, $x_1(\cdot) \in X$ и $x_2(\cdot) \in X$ таких, что $x_1(t) = x_2(t)$ для всех $t \in [0, t_0]$, образы этих функций $y_1(\cdot) = Dx_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) = Dx_2(\cdot)$ удовлетворяют тому же условию: $y_1(t) = y_2(t)$ для всех $t \in [0, t_0]$.

Задача динамической реконструкции входа системы по измерениям выхода заключается в построении регуляризующего семейства динамических операторов (4).

Опишем метод решения рассматриваемой задачи, следуя [5], [6]. Этот метод базируется на одном из известных принципов позиционного управления – принципе вспомогательных моделей. Прежде всего, выбирается динамическая система M (называемая *моделью*), движение которой $w_h(\cdot)$ является решением подходящим образом выбранного дифференциального уравнения. После того, как модель определена, алгоритм решения описанной выше задачи отождествляется с законом формирования управлений в модели по принципу обратной связи. Процедуре управления моделью предшествует выбор ее начального состояния $w_h(0)$. Алгоритм решения задачи реконструкции есть семейство операторов $\{D_h\}$, зависящих от величины погрешности измерения h . При этом каждый из операторов D_h отождествляется с тройкой $D_h = (\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$, где M – модель, $\mathcal{U}_h$ – закон управления моделью по принципу обратной связи. Закон формирования управления $v_h(\cdot)$ в модели, называемый, по терминологии, принятой в теории позиционного управления [7], [8], *стратегией*, отождествляется с функцией $\mathcal{U}_h$, ставящей в соответствие каждой паре $\{\xi_i^h, w_h(\tau_i^h)\}$ элемент

$$v_{h,i} = \mathcal{U}_h(\xi_i^h, w_h(\tau_i^h)) \in U. \quad (5)$$

Таким образом, тройка $(\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ при каждом $h \in (0, 1]$ определяет некоторый оператор D_h на множестве измерений $\Xi(h, \mathcal{X})$, формирующий по принципу обратной связи выход $D_h \xi(\cdot) = v_h(\cdot)$, где $v_h(\cdot) \in L_2(T; U)$ – кусочно-постоянная функция:

$$v_h(t) = v_{h,i}, \quad t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h). \quad (6)$$

Работа алгоритма при фиксированном $h \in (0, 1]$ протекает по следующей схеме. До начального момента времени выбираются и фиксируются разбиение Δ_h отрезка T , а также вспомогательная система – модель M . Алгоритм разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. Очередной шаг выполняется на промежутке времени $[\tau_i^h, \tau_{i+1}^h)$, $i \geq 0$. В течение этого шага осуществляются следующие операции. В момент τ_i^h замеряется (с ошибкой) выход $x(\tau_i^h)$; результат измерения – элемент $\xi_i^h \in Y$ со свойством (3). После этого по правилу (5) определяется управление в модели. Затем осуществляется пересчет фазового состояния модели: вместо $w_h(\tau_i^h)$ находится элемент $w_h(\tau_{i+1}^h)$. Вся процедура заканчивается в момент θ .

В работах [6], [9], [10] были получены нижние оценки скорости сходимости алгоритмов динамической реконструкции для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и систем типа Гурса–Дарбу. Здесь будут получены нижние оценки функций $\nu(h, x(\cdot)|D_h)$ и $\mu(h, \mathcal{X}|D_h)$ для нескольких алгоритмов динамической реконструкции управления в системе (1).

1. Рассмотрим сначала один из алгоритмов реконструкции, укладывающийся в общую схему, приведенную в работах [9], [11], [12]. Пусть $Y = H$ и $U_0 = P_T$, где множество P_T определено формулой (2). В качестве модели возьмем копию реальной системы

$$\dot{w}_h(t) + Aw_h(t) = Bv_h(t), \quad w_h(0) = x_0. \quad (7)$$

Выход алгоритма — функция $v_h(\cdot)$, которая формируется по правилу (6), причем

$$v_{h,i} = \arg \min \{ 2(Bv, w_h(\tau_i^h) - \xi_i^h) + \alpha(h) \|v\|_U^2 : v \in P \}. \quad (8)$$

Здесь $\alpha(h): (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ — регуляризатор. В [9], [11], [12] приведены условия, обеспечивающие сходимость алгоритма, а в [9, с. 53] при некоторых дополнительных условиях получена следующая верхняя оценка скорости сходимости:

$$\nu(h, x(\cdot)|D_h) \leq K \left(\sqrt{h + \delta(h) + \alpha(h)} + \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \right)^{1/2},$$

где константа K зависит от $x(\cdot)$, но не зависит от h .

Введем обозначения. Для любого $\varepsilon > 0$ пусть

$$P_\varepsilon = \{ z \in P : \rho(z, \partial P) \leq \varepsilon \},$$

где ∂P — граница множества P , а $\rho(z, \partial P) = \inf \{ \|z - y\|_U : y \in \partial P \}$. Для семейства алгоритмов реконструкции $\{D_h\}$, определенного согласно (6), (8), верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $h_0 \in (0, 1]$ удовлетворяет условию: при всех $h \in [0, h_0)$

$$m_h > 1 \quad \text{и} \quad \frac{h}{\alpha(h)} \leq \frac{2\varepsilon}{\|B\|}.$$

Тогда для любого управления $u_*(\cdot)$ такого, что $u_*(t) \in P_\varepsilon$ при п.в. $t \in T$, и для отвечающего этому управлению решения $x(\cdot)$ уравнения (1) при $h \in (0, h_0]$

$$\nu(h, x(\cdot)|D_h) \geq \frac{\|B\|\sqrt{\theta}}{2} \cdot \frac{h}{\alpha}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $h \in (0, 1]$ и элемент $s \in H$ со свойствами $|s| = 1$, $\|B^*s\|_U \geq \|B\|/\sqrt{2}$. Для сокращения записи обозначим $\tau_i = \tau_i^h$, $m = m_h$, $w_i = w_h(\tau_i)$, $x_i = x(\tau_i)$, $\xi_i^h = \xi_i$, $v_i = v_{h,i}$. Пусть

$$\begin{aligned} g_i(y) &= \frac{B^*(y - w_i)}{\alpha} \quad \text{для любого } y \in H, \\ V_i &= \{ g_i(y) : |y - x_i| \leq h \}, \quad q_i = \left(B^*s, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (u_*(t) - g_i(x_i)) dt \right)_U, \\ d_i &= \begin{cases} 1, & \text{если } q_i \leq 0, \\ -1, & \text{если } q_i > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Зададим измерения ξ_i , $i = 1, \dots, m$, по правилу: если $V_i \subset P$, положим $\xi_i = x_i + d_i h s$, в противном случае пусть $\xi_i \in H$ – элемент такой, что $|\xi_i - x_i| \leq h$ и $g_i(\xi_i) \in V_i \setminus P$. Существование ξ_i во втором случае следует из определения множества V_i . Далее, для любых $1 \leq i \leq m$, $v \in P$ справедливо равенство

$$2(Bv, w_i - \xi_i) + \alpha \|v\|_U^2 = \alpha \|v - g_i(\xi_i)\|_U^2 - \alpha \|g_i(\xi_i)\|_U^2,$$

из которого следует, что элемент $v_i \in P$, выбираемый по правилу (8), является проекцией элемента $g_i(\xi_i)$ на множество P , т.е.

$$v_i = \arg \min \{ \|v - g_i(\xi_i)\|_U : v \in P \}.$$

Рассмотрим сначала случай $V_i \subset P$. Поскольку $g_i(\xi_i) \in V_i$, то $g_i(\xi_i) \in P$ и $v_i = g_i(\xi_i)$. Справедливо соотношение

$$u_*(t) - v_i = (u_*(t) - g_i(x_i)) - d_i \frac{h}{\alpha} B^* s,$$

поэтому

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|u_*(t) - v_i\|_U^2 dt = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|u_*(t) - g_i(x_i)\|_U^2 dt - 2d_i g_i \frac{h}{\alpha} + \frac{\delta h^2}{\alpha^2} \|B^* s\|^2 \geq \frac{\delta h^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\|B\|^2}{2}. \quad (11)$$

Теперь рассмотрим случай $V_i \setminus P \neq \emptyset$. Поскольку $g_i(\xi_i) \in V_i \setminus P$, а v_i – проекция $g_i(\xi_i)$ на P , то $v_i \in \partial P$. По условию теоремы $u_*(t) \in P_\varepsilon$ при почти всех $t \in T$; поэтому для почти всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ имеем $\|u_*(t) - v_i\|_U \geq \varepsilon$. Следовательно,

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|u_*(t) - v_i\|_U^2 dt \geq \delta \varepsilon^2 \geq \frac{\delta h^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\|B\|^2}{2}.$$

Итак, в обоих случаях получаем

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|u_*(t) - v_i\|_U^2 dt \geq \frac{\delta h^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\|B\|^2}{2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Просуммируем последнее неравенство по i от 1 до $m - 1$. Получим

$$\|u_*(\cdot) - v_h(\cdot)\|_{L_2(T;U)} \geq \frac{\|B\| \sqrt{\theta - \delta}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{h}{\alpha},$$

откуда выводим (9). Теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь алгоритм восстановления неограниченных управлений, описанный в работе [13]. Будем предполагать, что пространство V гильбертово, оператор A симметричный и пространство измерений $Y = H$. В качестве модели возьмем копию реальной системы (7). Зададим закон $\mathcal{U}_h$ формирования управления в модели:

$$v_{h,i} = \frac{B^*(\xi_i^h - w_h(\tau_i^h))}{\alpha(h)}, \quad (12)$$

где $\alpha(h): (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ – некоторая функция. Выход алгоритма – функция $v_h(\cdot)$, определяемая согласно (6).

В работе [13] доказано, что если параметры алгоритма согласованы определенным образом, то алгоритм является регуляризирующим.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выход алгоритма динамической реконструкции D_h формируется согласно (6), (12). Тогда для любого решения уравнения (1) при таких $h \in (0, 1]$, для которых $m_h > 1$, верна оценка (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1. Зафиксируем $h \in (0, 1]$ и элемент $s \in H$ со свойствами $|s| = 1$, $\|B^*s\|_U \geq \|B\|/\sqrt{2}$; обозначим

$$q_i = \left(B^*s, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(u_*(t) - \frac{B^*(x_i - w_i)}{\alpha} \right) dt \right)_U$$

и определим d_i согласно (10). Пусть $\xi_i = x_i + d_i h s$. Тогда аналогично (11) выводим

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|u_*(t) - v_i\|_U^2 dt \geq \frac{\delta h^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\|B\|^2}{2},$$

откуда получаем нужную оценку величины $\nu(h, x(\cdot)|D_h)$. Теорема доказана.

Пусть также $U = H$, B – тождественный оператор. Пусть a_1, a_2, a_3 – положительные числа. Пусть множество $\mathcal{X}$ содержит все траектории системы (1), соответствующие начальным значениям $x_0 \in V$ и управлениям $u(\cdot) \in L_2(T; H)$ таким, что $\|x_0\|_V \leq a_1$, $\|u(t)\|_V \leq a_2$ почти для всех $t \in T$ и $\text{var}(u, T, V) \leq a_3$, где $\text{var}(u, T, V)$ – полная вариация функции $u: T \rightarrow V$. Как следует из результатов работы [13], определенное таким образом множество $\mathcal{X}$ является классом корректности задачи динамической реконструкции, причем справедлива оценка

$$\mu(h, \mathcal{X}|D_h) \leq C \left(\sqrt{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} + \frac{h^2}{\alpha\delta} \right)^{1/2}.$$

В следующей теореме получена нижняя оценка той же величины.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выход алгоритма динамической реконструкции D_h формируется согласно (6), (12) и у оператора A есть собственное значение λ . Тогда найдется $h_0 \in (0, 1]$ такое, что для всех $h \in (0, h_0]$ верна оценка

$$\mu(h, \mathcal{X}|D_h) \geq \frac{a\lambda}{4} \sqrt{\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор A сильно монотонный, то $\lambda > 0$. Пусть $p \in V$ – собственный вектор оператора A , соответствующий собственному значению λ , причем $|p| = 1$. Здесь, как обычно, $|p|$ обозначает норму элемента p в пространстве H . Рассмотрим функцию $x(t) \equiv ap$, $t \in T$. Эта функция является решением уравнения (1), соответствующим начальному значению $x_0 = ap$ и управлению $u(t) \equiv a\lambda p$. Выберем $h_0 \in (0, 1]$ такое, что для всех $h \in (0, h_0]$ выполнены неравенства

$$\frac{\delta}{\alpha} \leq \frac{2}{9}, \quad \alpha \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \alpha \leq \frac{6\theta}{\ln 2}. \quad (13)$$

Зафиксируем $h \in (0, h_0]$, и пусть $\xi_i = x_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, m_h$. Тогда движение модели задается равенством $w_h(t) = az(t)p$, где функция $z(\cdot) \in C(T; \mathbb{R})$ определяется по правилу: $z(0) = 1$,

$$\dot{z}(t) + \lambda z(t) = \frac{1 - z(\tau_i)}{\alpha} \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Обозначим $z_i = z(\tau_i)$, $g_i = (1 - z_i)/\alpha$. Тогда

$$z_{i+1} = e^{-\lambda\delta} z_i + \frac{1 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda} g_i. \quad (14)$$

Пусть $r_i = \lambda - g_i$. Последовательно используя подстановки $g_{i+1} = (1 - z_{i+1})/\alpha$, (14), $z_i = 1 - \alpha g_i$ и $g_i = \lambda - r_i$, выводим

$$r_{i+1} = b(\delta, \alpha) r_i + \lambda(1 - e^{-\lambda\delta}), \quad (15)$$

где

$$b(\delta, \alpha) = e^{-\lambda\delta} - \frac{1 - e^{-\lambda\delta}}{\alpha\lambda}.$$

Заметим, что в силу (13) имеет место оценка

$$b(\delta, \alpha) \geq 1 - \lambda\delta - \frac{\delta}{\alpha} \geq 1 - \frac{2\delta}{\alpha} \geq 1 - \frac{3\delta}{\alpha} + \frac{9\delta^2}{2\alpha^2} \geq e^{-3\delta/\alpha}.$$

Используя это неравенство и соотношение (15), по индукции можно доказать, что

$$r_i \geq e^{-3i\delta/\alpha} \lambda. \quad (16)$$

Рассмотрим функцию $r(t) = e^{-3t/\alpha} \lambda$. Из (16) получаем $r_i \geq r(i\delta) \geq r(t)$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Учитывая, что $u(t) - v_i = ar_i p$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, выводим оценку

$$\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T;H)}^2 = a^2 \sum_{i=0}^{m_h-1} r_i^2 \delta \geq a^2 \int_0^\theta r^2(t) dt = \frac{a^2 \alpha \lambda^2}{6} (1 - e^{-6\theta/\alpha}) \geq \frac{a^2 \alpha \lambda^2}{12}.$$

Следовательно,

$$\mu(h, \mathcal{X} | D_h) \geq \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T;H)} \geq \frac{a\lambda}{4} \sqrt{\alpha}.$$

Теорема доказана.

3. В этом пункте будет рассмотрен алгоритм, для которого удастся получить верхнюю оценку точности, совпадающую с нижней. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(y, t)}{\partial t} + Ax(y, t) &= u(y, t), \quad (y, t) \in Q = \Omega \times [0, \theta], \\ x(y, 0) &= x_0(y), \quad y \in \Omega, \\ x(y, t) &= 0, \quad (y, t) \in \partial\Omega \times [0, \theta]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с достаточно гладкой границей; оператор A , заданный равенством

$$Ax = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y, t) \frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n a_i(y, t) \frac{\partial x}{\partial y_i} + a(y, t)x, \quad (18)$$

равномерно параболический, т.е. существуют положительные числа q_1, q_2 такие, что для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и для всех $(y, t) \in \overline{Q}$ выполнены неравенства

$$q_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y, t) \xi_i \xi_j \leq q_2 |\xi|^2.$$

Зафиксируем число $r \in (1/2, 1)$, и пусть $l = 2r - 1$. Предполагаем, что коэффициенты оператора A , а также управление $u(\cdot, \cdot)$ принадлежат классу $H^{l, l/2}(\overline{Q})$ (см. [14]), а начальная функция $x_0(\cdot)$ удовлетворяет условиям: $x_0 \in H^{l+2}(\overline{\Omega})$ и $x_0(y) = 0$, $Ax_0(y) = u(y, 0)$ для всех $y \in \partial\Omega$. В [14, гл. 4, теорема 5.2] доказано, что при этих условиях задача (17) имеет единственное решение из класса $H^{l+2, l/2+1}(\overline{Q})$, и для этого решения справедливо неравенство

$$|x|_Q^{(l+2)} \leq c(|u|_Q^{(l)} + |x_0|_\Omega^{(l+2)}), \quad (19)$$

где $|x|_Q^{(l+2)}, |u|_Q^{(l)}, |x_0|_\Omega^{(l+2)}$ – соответствующие нормы, определенные в [14].

Введем обозначения [14] $V = \dot{W}_{1,2}(\Omega)$, $H = L_2(\Omega)$. Отождествляя пространства H и H^* , получим цепочку вложений $V \subset H \subset V^*$. Как показано в [1], оператор A , заданный равенством (18), можно рассматривать как линейный непрерывный оператор, действующий из V в V^* . Тогда задачу (17) можно переписать в виде

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = u(t), \quad t \in T = [0, \theta], \quad x(0) = x_0. \quad (20)$$

В этой задаче пространство управлений $U = V^*$.

Зафиксируем множество допустимых управлений $\mathcal{U} \subset L_2(T; V^*)$ и множество допустимых начальных функций $\mathcal{X}_0 \subset H$ в задаче (20): пусть a_1, a_2, a_3 – положительные числа,

$$\mathcal{U} = \{u \in H^{l, l/2}(\overline{Q}) : |u|_Q^{(l)} \leq a_1, \text{var}(u, T, V^*) \leq a_2\}, \quad (21)$$

$$\mathcal{X}_0 = \{x_0 \in H^{l+2}(\overline{\Omega}) : x_0|_{\partial\Omega} = 0, |x_0|_\Omega^{(l+2)} \leq a_3\}. \quad (22)$$

Пусть $\mathcal{X}$ – множество траекторий системы (20), отвечающих всем согласованным между собой управлениям $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и начальным функциям $x_0 \in \mathcal{X}_0$. Под *согласованием управления и начальной функции* понимается равенство $Ax_0(y) = u(y, 0)$ для всех $y \in \partial\Omega$.

Опишем алгоритм решения задачи динамической реконструкции управления в системе (20). Пусть пространство измерений $Y = V$,

$$\tilde{\xi}_h(t) \equiv \xi_i^h \quad \text{при } t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h).$$

Введем модель

$$\dot{w}_h(t) + A\tilde{\xi}_h(t) = v_h(t), \quad w_h(0) = \xi_0^h.$$

Выход алгоритма – функция $v_h(\cdot)$, определяемая по правилу (6), причем

$$v_{h,i} = \frac{\xi_i^h - w_h(\tau_i^h)}{\alpha(h)}, \quad (23)$$

где $\alpha(h)$ – некоторая функция $(0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Для описанного алгоритма справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функции $\alpha(h)$, $\delta(h)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \delta &\leq \frac{\alpha}{2}, & h \leq \alpha \leq 1, \\ \alpha + \frac{\delta}{\alpha} + \frac{h}{\alpha} &\rightarrow 0 & \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда построенное семейство операторов является регуляризующим и справедливы следующие оценки.

1) Верхняя оценка

$$\mu(h, \mathcal{X} | D_h) \leq A_1 \left(\alpha + \frac{h}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} + \delta^r \right)^{1/2}. \quad (25)$$

2) Пусть у оператора A есть собственное число λ , которому соответствует собственный вектор $p \in V \cap H^{l+2}(\bar{\Omega})$, $\|p\|_V = 1$. Тогда при таких h , для которых $\alpha \leq 2\theta/\ln 2$, справедлива оценка

$$\mu(h, \mathcal{X} | D_h) \geq A_2 \left(\sqrt{\alpha} + \frac{h}{\alpha} \right). \quad (26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\alpha(h) = \sqrt{h}$ и $\delta \leq h/2$, то верхняя и нижняя оценки имеют одинаковый порядок $h^{1/4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Зафиксируем $h \in (0, 1]$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}$, $\xi(\cdot) \in \Xi(h, x(\cdot))$, $v(\cdot) = D_h \xi(\cdot)$. Для краткости будем писать $\tau_i = \tau_i^h$, $w(\cdot) = w_h(\cdot)$, $\xi_i = \xi(\tau_i)$. Обозначим $y(t) = w(t) - x(t)$,

$$a(t) = \frac{w(t) - w_i}{\alpha}, \quad b(t) = \frac{\xi_i - x(t)}{\alpha}, \quad \beta(t) = \left(\frac{\alpha}{t - \tau_i} - 1 \right)^{-1}$$

при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Вычислим $\dot{y}(t)$. Пусть $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$; тогда

$$\dot{y}(t) = \frac{\xi_i - w_i}{\alpha} - A\xi_i - \dot{x}(t) = -\frac{y(t)}{\alpha} + a(t) + b(t) - A\xi_i - \dot{x}(t).$$

Заметим, что

$$a(t) = \frac{t - \tau_i}{\alpha} (v_i - A\xi_i) = \frac{t - \tau_i}{\alpha} \left(-\frac{y(t)}{\alpha} + a(t) + b(t) - A\xi_i \right),$$

поэтому

$$a(t) = \beta(t) \left(-\frac{y(t)}{\alpha} + b(t) - A\xi_i \right).$$

Следовательно,

$$\dot{y}(t) = -\frac{1 + \beta(t)}{\alpha} y(t) + f(t),$$

где $f(t) = (1 + \beta(t))(b(t) - A\xi_i) - \dot{x}(t)$. Пусть

$$\gamma(t, \tau) = \int_{\tau}^t (1 + \beta(s)) ds;$$

тогда

$$y(t) = \exp\left(-\frac{\gamma(t, 0)}{\alpha}\right) y(0) + \int_0^t \exp\left(-\frac{\gamma(t, \tau)}{\alpha}\right) f(\tau) d\tau.$$

Учитывая непрерывность вложений $V \subset H \subset V^*$, неравенства (3), (19), (24) и соотношения (20)–(22), получаем, что при некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ выполнены неравенства $\|f(t)\|_{V^*} \leq c_1$ для почти всех $t \in T$ и $\|y(0)\|_{V^*} \leq c_2$. Здесь и далее константы $c_j > 0$ не зависят от h . Таким образом,

$$\|y(t)\|_{V^*} \leq c_2 \alpha + c_1 \int_0^t \exp\left(-\frac{\gamma(t, \tau)}{\alpha}\right) d\tau.$$

Поскольку

$$\int_0^t \exp\left(-\frac{\gamma(t, \tau)}{\alpha}\right) d\tau \leq \int_0^t \exp\left(-\frac{t - \tau}{\alpha}\right) d\tau = \alpha \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right)\right) \leq \alpha,$$

получаем

$$\|x(t) - w(t)\|_{V^*} \leq (c_1 + c_2)\alpha. \quad (27)$$

Из этого неравенства и соотношений (3), (23) выводим оценку

$$\|v_i\|_{V^*} \leq c_3. \quad (28)$$

Рассмотрим функцию

$$V(t) = \|w(t) - x(t)\|_{V^*}^2 + \alpha \int_0^t \|v(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau.$$

Пусть $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Оценим разность

$$\begin{aligned} V(t) - V(\tau_i) &= 2 \int_{\tau_i}^t (\dot{w}(s) - \dot{x}(s), w(s) - x(s))_{V^*} ds + \alpha \int_{\tau_i}^t \|v(s)\|_{V^*}^2 ds \\ &= \int_{\tau_i}^t (2(v_i - u(s), w_i - \xi_i)_{V^*} + \alpha \|v_i\|_{V^*}^2) ds \\ &\quad + 2 \int_{\tau_i}^t (v_i - u(s), w(s) - x(s) - w_i + \xi_i)_{V^*} ds \\ &\quad + 2 \int_{\tau_i}^t (Ax(s) - A\xi_i, w(s) - x(s))_{V^*} ds. \end{aligned}$$

В силу (23) первое слагаемое можно оценить сверху величиной

$$\alpha \int_{\tau_i}^t \|u(s)\|_{V^*}^2 ds.$$

Учитывая также соотношения (19), (21), (3), (27) и (28), получаем оценку

$$V(t) - V(\tau_i) \leq \alpha \int_{\tau_i}^t \|u(s)\|_{V^*}^2 ds + c_4(h + \delta + \alpha\delta^r)(t - \tau_i), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Последнее неравенство выполнено для всех $i = 0, 1, \dots, m-1$, поэтому при любом $t \in T$

$$V(t) \leq \alpha \int_0^t \|u(s)\|_{V^*}^2 ds + c_5(h + \delta + \alpha\delta^r).$$

Следовательно,

$$\|v(\cdot)\|_{L_2(T; V^*)}^2 \leq \|u(\cdot)\|_{L_2(T; V^*)}^2 + c_5\left(\frac{h}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} + \delta^r\right). \quad (29)$$

Воспользуемся равенством

$$\|v(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2(T; V^*)}^2 = \|v(\cdot)\|_{L_2(T; V^*)}^2 - \|u(\cdot)\|_{L_2(T; V^*)}^2 + 2 \int_0^\theta (u(t) - v(t), u(t))_{V^*} dt. \quad (30)$$

Для оценки последнего слагаемого используем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть $T = [0, \theta]$, X – гильбертово пространство, $f \in L_\infty(T; X)$, $g: T \rightarrow X$ – функция с ограниченной вариацией и для всех $t \in T$ выполнены неравенства

$$\left\| \int_0^t f(\tau) d\tau \right\|_X \leq \varepsilon, \quad \|g(t)\|_X \leq G.$$

Тогда

$$\left| \int_0^\theta (f(\tau), g(\tau))_X d\tau \right| \leq \varepsilon(G + \text{var}(g, T, X)).$$

Полагая в лемме $X = V^*$, $f(t) = u(t) - v(t)$, $g(t) = u(t)$, получаем

$$2 \int_0^\theta (u(t) - v(t), u(t))_{V^*} dt \leq c_6(\alpha + \delta^r). \quad (31)$$

Объединяя (29)–(31) и учитывая, что траектория системы $x(\cdot) \in \mathcal{X}$ и функция $\xi(\cdot) \in \Xi(h, x(\cdot))$ выбраны произвольно, получаем (25).

Получим теперь нижнюю оценку величины $\mu(h, \mathcal{X} | D_h)$. Зафиксируем произвольную траекторию $x(\cdot) \in \mathcal{X}$ и зададим функцию $\xi(\cdot) \in \Xi(h, x(\cdot))$ по следующему правилу. Обозначим

$$f_i(t) = u(t) - \frac{x_i - w_i}{\alpha}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

$$q_i = \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_i(t) dt, p \right)_{V^*}, \quad d_i = \begin{cases} 1, & \text{если } q_i \leq 0, \\ -1, & \text{если } q_i > 0. \end{cases}$$

Пусть $\xi_i = x_i + d_i h p$, $\xi(t) = \xi_i$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Заметим, что измерения выбраны корректно, так как при вычислении функции $f_i(t)$ используются лишь $\xi_0, \dots, \xi_{i-1}$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|u(t) - v_i\|_{V^*}^2 dt &= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\| f_i(t) - \frac{\xi_i - x_i}{\alpha} \right\|_{V^*}^2 dt \\ &\geq -\frac{2}{\alpha} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (f_i(t), \xi_i - x_i)_{V^*} dt + \frac{\delta}{\alpha^2} \|\xi_i - x_i\|_{V^*}^2 \geq \frac{\delta h^2 \|p\|_{V^*}^2}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T; V^*)} \geq \frac{h}{\alpha} \sqrt{\theta} \|p\|_{V^*}.$$

Это означает, что

$$\nu(h, x(\cdot) | D_h) \geq \sqrt{\theta} \|p\|_{V^*} \frac{h}{\alpha} \quad (32)$$

для любой траектории $x(\cdot) \in \mathcal{X}$.

Рассмотрим случай $\lambda \neq 0$. Пусть

$$b_1 = \min \left\{ \frac{a_2}{|p|_{\Omega}^{(l+2)}}, \frac{a_1}{|p|_{\Omega}^{(l)}} \right\}, \quad x(t) \equiv b_1 p.$$

Нетрудно проверить, что $x(\cdot) \in \mathcal{X}$ и $u(x(\cdot)) = \lambda b_1 p$. Пусть измерения производятся без ошибок: $\xi_i = x_i$, $i = 0, 1, \dots, m$. Обозначим $z_i = v_i - \lambda b_1 p$ и проведем следующие выкладки:

$$z_{i+1} - z_i = v_{i+1} - v_i = -\frac{1}{\alpha}(w_{i+1} - w_i) = -\frac{\delta}{\alpha}(v_i - A\xi_i) = -\frac{\delta}{\alpha}z_i.$$

Следовательно, $z_{i+1} = (1 - \delta/\alpha)z_i$. Поскольку в условиях теоремы

$$1 - \frac{\delta}{\alpha} \geq 1 - \frac{2\delta}{\alpha} + \frac{2\delta^2}{\alpha^2} > e^{2\delta/\alpha},$$

то $\|z_i\|_{V^*} \geq e^{-2\tau_i/\alpha} \|z_0\|_{V^*}$. Отсюда получаем оценки

$$\begin{aligned} \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T; V^*)}^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} \delta \|z_i\|_{V^*}^2 \geq \|z_0\|_{V^*}^2 \int_0^{\theta} e^{-2t/\alpha} dt = \|z_0\|_{V^*}^2 \frac{\alpha}{4}, \\ \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T; V^*)} &> \frac{|\lambda| b_1 \|p\|_{V^*}}{2} \sqrt{\alpha}. \end{aligned} \quad (33)$$

В случае $\lambda = 0$ положим $b_2 = a_1/|p|_{\Omega}^{(l)}$, $x(t) = b_2 p t$, $\xi_i = x_i$ и аналогично рассмотренному случаю получим оценку

$$\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T; V^*)} > \frac{b_2 \|p\|_{V^*}}{2} \sqrt{\alpha}. \quad (34)$$

Объединяя (32)–(34), получаем оценку (26). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
- [2] Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
- [3] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
- [4] Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Московского гос. ун-та. (А). Т. 1. М.: ГОНТИ, 1939.
- [5] Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И. Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 579–597.
- [6] Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
- [7] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [8] Красовский Н. Н., Субботин Ю. Н. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984.
- [9] Максимов В. И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2000.
- [10] Короткий А. И., Цепелев И. А. Верхняя и нижняя оценки точности в задаче динамического определения операторов // Тр. ИММ УрО РАН. Т. 4. С. 227–238.
- [11] Максимов В. И. Об устойчивом решении обратных задач для нелинейных распределенных систем, I // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2059–2067; Об устойчивом решении обратных задач для нелинейных распределенных систем, II // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 4. С. 597–603.
- [12] Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И. Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. Препринт ИММ УрО АН СССР, 1991.
- [13] Васильева Е. В., Максимов В. И. О динамической реконструкции неограниченных управлений в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 23–29.
- [14] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.