Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Саакян, О теореме Бора для кратных рядов Фурье,
Матем. заметки, 1998, том 64, выпуск 6, 913–924

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:37:56

УДК 517.518.475

О ТЕОРЕМЕ БОРА ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

А. А. Саакян

Статья посвящена вопросам равномерной сходимости по Прингсхейму кратных рядов Фурье по тригонометрической системе. Доказан многомерный аналог теоремы Бора о равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной функции после гомеоморфной замены переменной.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть $C(T)$ ($C(T^2)$) – пространство непрерывных, 2π -периодических (по каждой переменной) функций на $\mathbb{R}^1$ ($\mathbb{R}^2$). Для одномерных тригонометрических рядов Фурье хорошо известна (см. [1, с. 303])

ТЕОРЕМА (Г. Бор). *Для $f \in C(T)$ существует гомеоморфизм $\tau(t)$ отрезка $T = [-\pi, \pi]$, т.е. непрерывная функция с условием*

$$-\pi = \tau(-\pi) < \tau(t_1) < \tau(t_2) < \tau(\pi) = \pi, \quad -\pi < t_1 < t_2 < \pi, \quad (1)$$

такая, что ряд Фурье суперпозиции $f \circ \tau(t)$ равномерно сходится на T .

В работах [2], [3] получены разные усиления этой теоремы. В частности, в [2] доказано, что гомеоморфизм τ в теореме Бора можно построить единым для заданного компакта в $C(T)$.

ТЕОРЕМА (Ж.-П. Кахан, И. Кацнельсон). *Пусть*

$$\omega \in C(0, \infty), \quad 0 = \omega(0) < \omega(\delta_1) < \omega(\delta_2) < \infty, \quad 0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty. \quad (2)$$

Существует гомеоморфизм τ отрезка T такой, что для произвольной функции $f \in C(T)$ с модулем непрерывности $\omega(\delta, f) \leq \omega(\delta)$ ряд Фурье суперпозиции $f \circ \tau(t)$ равномерно сходится на T .

В [4] приведен аналог теоремы Бора для кратных тригонометрических рядов Фурье. Однако, как выяснилось, доказательство этого результата содержит пробел: построенная в теореме 2 работы [4] функция $\tau(x)$ не является гомеоморфизмом (условие б) на с. 99 в общем случае не выполняется; автор благодарит профессора С. В. Конягина, указавшего на эту ошибку).

Сформулированная ниже теорема 1 является обобщением теоремы Кахана и Кацнельсона на многомерный случай и устанавливает, в частности, справедливость теоремы Бора для кратных рядов Фурье. Для $F \in C(T^2)$ обозначим

$$\omega(\delta, F) = \sup_{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq \delta^2} |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)|, \quad 0 < \delta < \infty,$$

и пусть $S_{n,m}(F, x, y)$ – прямоугольная частная сумма ряда Фурье функции F :

$$S_{n,m}(F, x, y) = \sum_{k=-n}^n \sum_{j=-m}^m c_{k,j}(F) e^{i(kx+jy)}, \quad (x, y) \in T^2, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Напомним, что сходимость ряда Фурье по Прингсхейму означает сходимость прямоугольных частных сумм при $n, m \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольной функции $\omega(\delta)$ с условиями (2) существует гомеоморфизм $\tau(t)$ отрезка T такой, что ряд Фурье произвольной функции F вида*

$$F(x, y) = f(\tau(x), \tau(y)), \quad f \in C(T^2), \quad \omega(\delta, f) \leq \omega(\delta), \quad (3)$$

равномерно сходится по Прингсхейму на квадрате T^2 . Более того, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\|S_{n,m}(F) - F\|_C \leq \varepsilon \quad \text{при } n, m > N \quad (4)$$

для всех функций F вида (3).

Для формулировки следующей теоремы нам потребуется ряд обозначений. Через $M(T)$ ($M(T^2)$) обозначим пространство 2π -периодических (по каждой переменной), измеримых, ограниченных на $\mathbb{R}^1$ ($\mathbb{R}^2$) функций $f(x)$, полагая, что

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R} \ (x \in \mathbb{R}^2)} |f(x)|.$$

Рассмотрим интервалы

$$\Delta_k^\delta(x, n) := \delta \left(x + \frac{2k-1}{n} \pi, x + \frac{2k}{n} \pi \right), \quad x \in T, \quad k, n = 1, 2, \dots, \quad \delta = \pm 1,$$

где $\delta(a, b)$ – интервал с концами δa и δb .

Для функции $f \in M(T)$ обозначим $f(\Delta) = f(b) - f(a)$, если $\Delta = (a, b)$, и положим

$$W_n^\delta(f, x) := \left| \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{f(\Delta_k^\delta(x, n))}{k} \right|, \quad x \in T, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \delta = \pm 1.$$

Пусть

$$W_n(f) := \sup_{x \in T, \delta = \pm 1} W_n^\delta(f, x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Для равномерной сходимости одномерных рядов Фурье хорошо известен признак Салема (см. [1, с. 283]).

ТЕОРЕМА (Р. Салем). Если $f \in C(T)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(f) = 0,$$

то ряд Фурье функции f равномерно сходится на T .

Пусть теперь $F(x, y) \in M(T^2)$ и

$$F(\Delta_1, \Delta_2) := F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1), \quad (5)$$

если $\Delta_1 = (x_1, y_1)$, $\Delta_2 = (x_2, y_2)$. Положим

$$W_{n,m}^{\delta_1, \delta_2}(F, x, y) := \left| \sum_{k=1}^{[n/2]} \sum_{j=1}^{[m/2]} \frac{F(\Delta_k^{\delta_1}(x, n), \Delta_j^{\delta_2}(y, m))}{kj} \right|,$$

$$(x, y) \in T^2, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad \delta_1, \delta_2 = \pm 1.$$

Пусть

$$W_{n,m}(F) := \sup_{(x,y) \in T^2, \delta_1, \delta_2 = \pm 1} \{W_{n,m}^{\delta_1, \delta_2}(F, x, y) + W_n^{\delta_1}(F(\cdot, y), x) + W_m^{\delta_2}(F(x, \cdot), y)\}.$$

Следующая теорема является аналогом признака Салема для двойных рядов Фурье. Она была доказана в работе [5], но мы приводим ее с полным доказательством, так как при обосновании второго утверждения теоремы 1 (см. (4)), кроме равномерной сходимости ряда Фурье, нам понадобится оценка, полученная в лемме 4.

ТЕОРЕМА 2 (Б.И. Голубов). Если $F(x, y) \in C(T^2)$ и

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} W_{n,m}(F) = 0,$$

то ряд Фурье функции F равномерно сходится по Прингсгейму на T^2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для краткости изложения мы приводим теоремы 1 и 2 в двумерном случае, но их аналоги справедливы в $\mathbb{R}^k$ при любом $k \geq 2$ и доказываются аналогично. Более того, функция τ в теореме 1 может быть построена не зависящей от размерности пространства.

2. Вспомогательные утверждения. Всюду ниже через C мы обозначаем абсолютные константы, которые могут быть разными даже в одной и той же формуле. Выражение вида $O(\Omega)$ означает величину, удовлетворяющую условию

$$|O(\Omega)| \leq C|\Omega|.$$

Доказательство следующей леммы фактически содержится в доказательстве признака Салема (см. [1, с. 284–286]), но мы приводим его для полноты изложения.

ЛЕММА 1. Существует убывающая последовательность $\{\eta_n\}$ с $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$ такая, что для произвольной функции $\varphi \in M(T)$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt = \varphi(x) + O(U_n(\varphi)), \quad x \in T, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где

$$U_n(\varphi) := W_n(\varphi) + \omega\left(\frac{\ln n}{n}, \varphi\right) + \|\varphi\|_{\infty} \eta_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in T$ и $n = 2n_0 + 1 + \gamma$, $\gamma \in \{0, 1\}$, фиксированы. Положим

$$\psi(t) := \varphi(x + t) - \varphi(x), \quad \eta'_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{t} dt - 1.$$

Тогда $|\psi(t)| \leq \omega(|t|, \varphi)$, $t \in T$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta'_n = 0$ и

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + t) \frac{\sin nt}{t} dt - \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) \frac{\sin nt}{t} dt + \eta'_n \varphi_n(x). \quad (7)$$

Оценим интеграл по $[0, \pi]$ (интеграл по $[-\pi, 0]$ оценивается аналогично):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{2n_0+\gamma} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \psi(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \\ &\leq \pi \|\psi\|_{L^\infty(0, \pi/n)} + \frac{\pi}{n} \|\psi\|_\infty + \left| \sum_{k=1}^{2n_0} \int_0^{\pi} \psi\left(\frac{t+k\pi}{n}\right) \frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi} dt \right| \\ &\leq \omega\left(\frac{\pi}{n}, \varphi\right) + \frac{2\pi}{n} \|\varphi\|_\infty + \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n_0} \left(\frac{\psi((t+2k\pi)/n)}{t+2k\pi} - \frac{\psi((t+(2k-1)\pi)/n)}{t+(2k-1)\pi} \right) \right| dt \\ &\leq \omega\left(\frac{\pi}{n}, \varphi\right) + \frac{2\pi}{n} \|\varphi\|_\infty + \pi \sup_{t \in [0, \pi]} \left| \sum_{k=1}^{n_0} I_k(t) \right|, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$I_k(t) := \frac{\psi((t+2k\pi)/n)}{t+2k\pi} - \frac{\psi((t+(2k-1)\pi)/n)}{t+(2k-1)\pi}.$$

Представим величину $I_k(t)$ в виде

$$\begin{aligned} I_k(t) &= \frac{\psi((t+2k\pi)/n) - \psi((t+(2k-1)\pi)/n)}{t+2k\pi} - \frac{\pi\psi((t+(2k-1)\pi)/n)}{(t+2k\pi)(t+(2k-1)\pi)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi((t+2k\pi)/n) - \varphi((t+(2k-1)\pi)/n)}{k} \\ &\quad - \frac{t}{2\pi} \frac{\varphi((t+2k\pi)/n) - \varphi((t+(2k-1)\pi)/n)}{k(t+2k\pi)} - \frac{\pi\psi((t+(2k-1)\pi)/n)}{(t+2k\pi)(t+(2k-1)\pi)} \\ &=: \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi((t+2k\pi)/n) - \varphi((t+(2k-1)\pi)/n)}{k} + I'_k(t) + I''_k(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n_0} I'_k(t) \right| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\pi/n, \varphi)}{k^2} \leq C\omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) \quad (10)$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n_0} I''_k(t) \right| &\leq C \left(\sum_{k=1}^{[\ln n]} \frac{\omega((\pi \ln n)/n, \varphi)}{k^2} + \|\varphi\|_\infty \sum_{k=[\ln n]+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \\ &\leq C \left(\omega\left(\frac{\ln n}{n}, \varphi\right) + \|\varphi\|_\infty \eta''_n \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\eta_n'' := \sum_{k=[\ln n]+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из (7)–(11) получим (6) с $\eta_n = \max_{k \geq n} \{\eta_k' + \eta_k''\}$. Лемма 1 доказана.

Обозначим через $\omega_1(\delta, f)$ интегральный модуль непрерывности функции f . Для коэффициентов Фурье хорошо известна оценка (см. [1, с. 80])

$$|c_m(u)| \leq \omega_1\left(\frac{1}{m}, u\right). \quad (12)$$

Обозначим также

$$g(t) := \frac{1}{2 \operatorname{tg}(t/2)} - \frac{1}{t}, \quad 0 < |t| \leq \pi, \quad g(0) = 0. \quad (13)$$

ЛЕММА 2. Существует постоянная $K > 0$ такая, что для произвольной функции $F \in M(T^2)$ имеет место неравенство

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) g(s) \frac{\sin nt}{t} e^{ims} dt ds \right| \leq K U_{n,m}(F), \quad (14)$$

$$(x, y) \in T^2, \quad n, m = 1, 2, \dots,$$

где

$$U_{n,m}(F) := W_{n,m}(F) + \omega\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln m}{m}, F\right) + \|F\|_{\infty} \gamma_{n,m} \quad (15)$$

и (см. лемму 1)

$$\gamma_{n,m} := \omega_1\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}, g\right) + \eta_n + \eta_m \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} dt = F(x, y+s) + O(U_{n,m}(F)).$$

Значит, необходимо оценить коэффициенты Фурье функции $u(s) := F(x, y+s)g(s)$. Имеем

$$\begin{aligned} |u(s+h) - u(s)| &\leq |F(x, y+s+h) - F(x, y+s)| \cdot |g(s+h)| \\ &\quad + |F(x, y+s)| \cdot |g(s+h) - g(s)| \\ &\leq \|g\|_{\infty} \omega(h, F) + \|F\|_{\infty} |g(s+h) - g(s)|. \end{aligned}$$

Тем самым,

$$\omega_1(\delta, u) \leq C(\omega(\delta, F) + \|F\|_{\infty} \omega_1(\delta, g)), \quad \delta > 0. \quad (16)$$

Отсюда с учетом оценки (12) вытекает (14). Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что оценка (14) остается в силе, если вместо функции $g(t)$, определенной в (13), взять $g(t) \equiv 1$.

3. Доказательство теорем. Утверждение теоремы 2 непосредственно вытекает из следующей ниже леммы 4. Сначала мы докажем, что справедлива

ЛЕММА 3. Для произвольных $F \in M(T^2)$, $(x, y) \in T^2$, $n, m = 1, 2, \dots$, имеет место соотношение

$$S_{n,m}(F, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} dt ds + O(U_{n,m}(F)), \quad (17)$$

где $U_{n,m}(F)$ определяется формулой (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем равенство

$$S_{n,m}(F, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) D_n(t) D_m(s) dt ds, \quad (18)$$

где D_n – ядро Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin(t/2)}, \quad t \in T.$$

Применив равенство (см. (13))

$$D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + g(t) \sin nt + \frac{1}{2} \cos nt, \quad t \in T,$$

из (18) получим

$$\begin{aligned} \pi^2 S_{n,m}(F, x, y) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} dt ds \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \left(g(s) \sin ms + \frac{1}{2} \cos ms \right) dt ds \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) \frac{\sin ms}{s} \left(g(t) \sin nt + \frac{1}{2} \cos nt \right) dt ds \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) \left(g(t) \sin nt + \frac{1}{2} \cos nt \right) \left(g(s) \sin ms + \frac{1}{2} \cos ms \right) dt ds \\ &=: \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} dt ds + \sum_{p=1}^3 Q_{n,m}^{(p)}(x, y). \end{aligned}$$

Остается доказать, что при $p = 1, 2, 3$

$$Q_{n,m}^{(p)}(x, y) = O(U_{n,m}(F)), \quad (x, y) \in T^2, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

При $p = 1$ и $p = 2$ это вытекает из леммы 2 (см. также замечание 2), а при $p = 3$ – из (12) и (16). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Для произвольной $F \in M(T^2)$ имеет место соотношение

$$S_{n,m}(F, x, y) = F(x, y) + O(U_{n,m}(F)), \quad (x, y) \in T^2, \quad n, m = 1, 2, \dots,$$

где $U_{n,m}(F)$ определяется формулой (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3 мы докажем лемму 4, если покажем, что

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} dt ds = F(x, y) + O(U_{n,m}(F)). \quad (19)$$

Соотношение (19) достаточно получить в случае интеграла по прямоугольнику $[0, \pi] \times [0, \pi]$, т.е. доказать, что

$$J := \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} dt ds - \frac{1}{4} F(x, y) = O(U_{n,m}(F)).$$

Обозначим $\Phi(t, s) := F(x+t, y+s) - F(x, y)$. Пусть $n = 2n_0 + 1 + \gamma$, $m = 2m_0 + 1 + \sigma$, $\gamma, \sigma \in \{0, 1\}$. Согласно (17) (с $F \equiv 1$) имеем

$$\begin{aligned} \pi^2 J &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(t, s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} dt ds + O(U_{n,m}(F)) \\ &= \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} + \int_0^{\pi/m} \int_{\pi/n}^{\pi} + \int_{\pi/m}^{\pi} \int_0^{\pi/n} + \int_{(2m_0+1)\pi/m}^{\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} \\ &\quad + \int_{\pi/m}^{(2m_0+1)\pi/m} \int_{(2n_0+1)\pi/n}^{\pi} + \int_{\pi/m}^{(2m_0+1)\pi/m} \int_{\pi/n}^{(2n_0+1)\pi/n} + O(U_{n,m}(F)) \\ &=: \sum_{p=1}^6 J_p + O(U_{n,m}(F)). \end{aligned}$$

Докажем, что

$$|J_p| = O(U_{n,m}(F)), \quad p = 1, \dots, 6. \quad (20)$$

При $p = 1$ условие (20) очевидно. Согласно (6) для любого $s \in T$

$$\int_{\pi/n}^{\pi} \Phi(t, s) \frac{\sin nt}{t} dt = O(U_n(F(x + \cdot, y+s), t)),$$

откуда вытекает (20) при $p = 2$ и $p = 4$. Аналогично доказывается (20) при $p = 3$ и $p = 5$. Осталось рассмотреть случай $p = 6$. Имеем

$$\begin{aligned} J_6 &= \sum_{k=1}^{2n_0} \sum_{j=1}^{2m_0} \int_{j\pi/m}^{(j+1)\pi/m} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \Phi(t, s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} dt ds \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{m_0} I_{k,j}(t, s) \sin t \sin s dt ds, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} I_{k,j}(t, s) &:= \frac{\Phi((t+2k\pi)/n, (s+2j\pi)/m)}{(t+2k\pi)(s+2j\pi)} - \frac{\Phi((t+(2k-1)\pi)/n, (s+2j\pi)/m)}{(t+(2k-1)\pi)(s+2j\pi)} \\ &\quad - \frac{\Phi((t+2k\pi)/n, (s+(2j-1)\pi)/m)}{(t+2k\pi)(s+(2j-1)\pi)} + \frac{\Phi((t+(2k-1)\pi)/n, (s+(2j-1)\pi)/m)}{(t+(2k-1)\pi)(s+(2j-1)\pi)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta_h^{(1)} \Phi(t, s) = \Phi(t+h, s) - \Phi(t, s), \quad \Delta_h^{(2)} \Phi(t, s) = \Phi(t, s+h) - \Phi(t, s).$$

Ясно, что

$$|\Delta_h^{(1)}\Phi(t, s)| = |\Delta_h^{(1)}F(t, s)| \leq \omega(h, F), \quad |\Phi(t, s)| \leq \omega((t^2 + s^2)^{1/2}, F). \quad (22)$$

Величину $I_{k,j}(t, s)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} I_{k,j}(t, s) &= \frac{1}{(t + 2k\pi)(s + 2j\pi)} \Delta_{\pi/n}^{(1)} \Delta_{\pi/m}^{(2)} \Phi\left(\frac{t + 2k\pi}{n}, \frac{s + 2j\pi}{m}\right) \\ &+ \frac{\pi}{(t + 2k\pi)(s + 2j\pi)(s + (2j - 1)\pi)} \Delta_{\pi/n}^{(1)} \Phi\left(\frac{t + 2k\pi}{n}, \frac{s + (2j - 1)\pi}{m}\right) \\ &+ \frac{\pi}{(t + 2k\pi)(t + (2k - 1)\pi)(s + 2j\pi)} \Delta_{\pi/m}^{(2)} \Phi\left(\frac{t + (2k - 1)\pi}{n}, \frac{s + 2j\pi}{m}\right) \\ &+ \frac{\pi^2}{(t + 2k\pi)(t + (2k - 1)\pi)(s + 2j\pi)(s + (2j - 1)\pi)} \Phi\left(\frac{t + (k + 1)\pi}{n}, \frac{s + j\pi}{m}\right) \\ &=: \sum_{p=1}^4 I_{k,j}^{(p)}(t, s). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы 4 нам с учетом (19) и (21) остается показать, что

$$\sum_{k=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{m_0} I_{k,j}^{(p)}(t, s) = O(U_{n,m}(F)), \quad p = 1, 2, 3, 4. \quad (23)$$

Для доказательства этого соотношения при $p = 1$ воспользуемся равенством (здесь $k, j = 1, 2, \dots, t, s \in [0, \pi]$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(t + 2k\pi)(s + 2j\pi)} &= \frac{1}{4\pi^2 kj} - \frac{s}{4\pi^2 j(s + 2j\pi)k} - \frac{t}{4\pi^2 k(s + 2k\pi)j} \\ &+ \frac{ts}{4\pi^2 j(s + 2j\pi)k(t + 2k\pi)} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 kj} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \frac{1}{j} + O\left(\frac{1}{k^2 j^2}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{m_0} I_{k,j}^{(1)}(t, s) \right| &\leq \frac{1}{4\pi^2} \left| \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{m_0} \frac{1}{kj} \Delta_{\pi/n}^{(1)} \Delta_{\pi/m}^{(2)} \Phi\left(\frac{t + 2k\pi}{n}, \frac{s + 2j\pi}{m}\right) \right| \\ &+ \left| \sum_{j=1}^{m_0} O\left(\frac{1}{j^2}\right) \Delta_{\pi/m}^{(2)} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{j} \Delta_{\pi/n}^{(1)} \Phi\left(\frac{t + 2k\pi}{n}, \frac{s + 2j\pi}{m}\right) \right| \\ &+ \left| \sum_{k=1}^{n_0} O\left(\frac{1}{k^2}\right) \Delta_{\pi/n}^{(1)} \sum_{j=1}^{m_0} \frac{1}{j} \Delta_{\pi/m}^{(2)} \Phi\left(\frac{t + 2k\pi}{n}, \frac{s + 2j\pi}{m}\right) \right| \\ &+ \left| \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{m_0} O\left(\frac{1}{k^2 j^2}\right) \Delta_{\pi/n}^{(1)} \Delta_{\pi/m}^{(2)} \Phi\left(\frac{t + 2k\pi}{n}, \frac{s + 2j\pi}{m}\right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq CW_{n,m}(F) \left(\frac{1}{4\pi^2} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) + C\omega \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{m}, F \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 j^2} \\ &\leq CU_{n,m}(F). \end{aligned}$$

Соотношение (23) при $p = 2$ и $p = 3$ доказывается аналогично с использованием равенств (сравни с (24))

$$\begin{aligned} \frac{1}{(t+2k\pi)(s+2j\pi)(s+(2j-1)\pi)} &= O\left(\frac{1}{j^2}\right) \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2 j^2}\right), \\ \frac{1}{(t+2k\pi)(s+(2k-1)\pi)(s+2j\pi)} &= O\left(\frac{1}{k^2}\right) \frac{1}{j} + O\left(\frac{1}{k^2 j^2}\right). \end{aligned}$$

Остается доказать (23) при $p = 4$. С учетом (22) имеем

$$\begin{aligned} |I_{k,j}^{(4)}(t,s)| &\leq \|\Phi\|_{C((0,(\pi \ln n)/n) \times (0,(\pi \ln m)/m))} \sum_{k=1}^{[\ln n]} \sum_{j=1}^{[\ln m]} \frac{1}{k^2 j^2} \\ &\quad + 2\|\Phi\|_{\infty} \left(\sum_{k=[\ln n]+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 j^2} + \sum_{k=1}^{[\ln n]} \sum_{j=[\ln m]+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 j^2} \right) \\ &\leq C \left(\omega \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{m}, F \right) + \|F\|_{\infty} (\eta_n + \eta_m) \right) \leq CU_{n,m}(F). \end{aligned}$$

Лемма 4, а следовательно, и теорема 2 доказаны.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Для $F \in M(T^2)$, $x, y, a, b \in T$ обозначим

$$V_{a,b}(x,y) := \sum_{k=1}^{[\pi/|a|]} \sum_{j=1}^{[\pi/|b|]} \frac{|F(I_k, \Delta_j)|}{kj} + \sum_{k=1}^{[\pi/|a|]} \frac{|F(I_k, y)|}{k} + \sum_{j=1}^{[\pi/|b|]} \frac{|F(x, \Delta_j)|}{j}, \quad (25)$$

где $I_k = (x + (k-1)a, x + ka)$, $\Delta_j = (y + (j-1)b, y + jb)$; $F(I, \Delta)$ – смешанная разность F на прямоугольнике $I \times \Delta$ (см. (5)); $F(I, y)$ – приращение функции F на интервале $I \times y$; $F(x, \Delta)$ – приращение F на интервале $x \times \Delta$. Положим

$$V_h(F) := \sup_{|a| \leq h, |b| \leq h, (x,y) \in T^2} V_{a,b}(x,y), \quad V(F) := \sup_{h > 0} V_h(F).$$

Ясно, что

$$W_{n,m}(F) \leq V_h(F), \quad \text{если} \quad \max \left\{ \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{m} \right\} \leq h. \quad (26)$$

Это означает (см. теорему 2), что ряд Фурье функции F равномерно сходится по Прингсхейму, если выполнено условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_h(F) = 0. \quad (27)$$

Величина $V(F)$ имеет много общего с гармонической вариацией функции F , которая определяется как супремум от правой части (25) по всевозможным системам $\{I_k\}$ и $\{\Delta_j\}$

непересекающихся интервалов из T (см. [6]). В одномерном случае гармоническая вариация была введена в [7], где было доказано, что ряд Фурье непрерывной функции ограниченной гармонической вариации сходится равномерно. Равномерная сходимости по Прингсхейму двумерных рядов Фурье непрерывной функции ограниченной гармонической вариации доказана в [6]. Теорема 2 является усилением этого результата, так как для непрерывной функции из ограниченности гармонической вариации вытекает условие (27) (см. [6]). Отметим, что это существенное усиление, так как функция, удовлетворяющая условию (27), может не иметь ограниченной гармонической вариации. Последнее вытекает из того, что, с одной стороны, гармоническая вариация инвариантна относительно замены переменных вида (3), с другой стороны, как показывает следующая лемма 5, с помощью такой замены переменных можно достичь выполнения условия (27).

ЛЕММА 5. *Для произвольной функции $\omega(\delta)$ вида (2) существует гомеоморфизм $\tau(t)$ отрезка T такой, что для произвольной функции F вида (3) выполнены условия*

$$V(F) < \infty, \quad \lim_{h \rightarrow 0} V_h(F) = 0. \quad (28)$$

Более того, условия (28) выполнены равномерно на множестве функций F вида (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем последовательность $\{\delta_n\}$ так, чтобы

$$0 < 4\delta_{n+1} < \delta_n < 1, \quad \omega(\delta_n) \leq 4^{-n}\varepsilon_{n+1}^2, \quad \text{где } \varepsilon_n = 4^{-n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Индукцией по $n = 0, 1, \dots$ построим множества

$$T_n = \{t_n^i\}_{i=0}^{4^n}, \quad \Lambda_n = \{\lambda_n^i\}_{i=0}^{4^n}.$$

Пусть $t_0^0 = \lambda_0^0 = -\pi$, $t_0^1 = \lambda_0^1 = \pi$. Считая, что T_{n-1} и Λ_{n-1} уже построены, положим

$$\begin{aligned} t_n^{4^i} &= t_{n-1}^i, & \lambda_n^{4^i} &= \lambda_{n-1}^i, & i &= 0, \dots, 4^{n-1}, \\ t_n^{4^i-1} &= t_{n-1}^i - \varepsilon_n, & \lambda_n^{4^i-1} &= \frac{\lambda_{n-1}^{i-1} + \lambda_{n-1}^i}{2} + \delta_n, & i &= 1, \dots, 4^{n-1}, \\ t_n^{4^i-2} &= \frac{t_{n-1}^{i-1} + t_{n-1}^i}{2}, & \lambda_n^{4^i-2} &= \frac{\lambda_{n-1}^{i-1} + \lambda_{n-1}^i}{2}, & i &= 1, \dots, 4^{n-1}, \\ t_n^{4^i-3} &= \frac{t_{n-1}^{i-1} + t_{n-1}^i}{2} - \varepsilon_n, & \lambda_n^{4^i-3} &= \lambda_{n-1}^{i-1} + \delta_n, & i &= 1, \dots, 4^{n-1}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что множества T_n и Λ_n разбивают отрезок T на интервалы

$$d_n^i = (t_n^{i-1}, t_n^i), \quad \rho_n^i = (\lambda_n^{i-1}, \lambda_n^i), \quad i = 1, \dots, 4^n,$$

длины которых удовлетворяют условиям

$$|d_n^{2^i-1}| = \varepsilon_n, \quad \frac{\varepsilon_{n-1}}{4} \leq |d_n^{2^i}| \leq 2^{-n}, \quad |\rho_n^{2^i-1}| \leq 2^{-n}, \quad |\rho_n^{2^i}| = \delta_n, \quad i = 1, \dots, 4^{n-1/2}. \quad (30)$$

Положим

$$\tau(t_n^i) = \lambda_n^i, \quad i = 0, \dots, 4^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Из (30) следует, что функция τ определена и возрастает на объединении множеств T_n , которое всюду плотно в T . Так как множество значений этой функции также всюду плотно в T , ее можно продолжить на T и получить непрерывную функцию вида (1). Ясно, что при этом

$$\tau(d_n^i) = \rho_n^i, \quad i = 1, \dots, 4^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Формулы (30) и (31) показывают, что гомеоморфизм τ переводит большие интервалы d_n^{2i} в очень маленькие, а маленькие интервалы d_n^{2i-1} – в сравнительно большие. Эта замена переменной делает непрерывную функцию очень близкой к кусочно-постоянной. Такой метод построения гомеоморфизма был применен Б. С. Капиным (см. [3]) для улучшения скорости убывания коэффициентов Фурье, а также Каханом и Кацнельсоном в [2].

Допустим теперь, что F – функция вида (3), и докажем (28). Оценим $V_{a,b}(x, y)$ для $0 < a \leq b \leq h$. Выберем n и m так, чтобы

$$\varepsilon_{n+1} < a \leq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_{m+1} < b \leq \varepsilon_m, \quad m \leq n. \quad (32)$$

Рассмотрим первую сумму в (25):

$$A := \sum_{k \in \Omega(a), j \in \Omega(b)} \frac{|F(I_k, \Delta_j)|}{kj}, \quad \Omega(a) := \left\{1, \dots, \left[\frac{\pi}{a}\right]\right\}, \quad \#\Omega(a) \leq \frac{\pi}{\varepsilon_{n+1}},$$

$$\Omega(b) := \left\{1, \dots, \left[\frac{\pi}{b}\right]\right\}, \quad \#\Omega(b) \leq \frac{\pi}{\varepsilon_{m+1}}$$

(здесь и далее, $\#E$ – количество элементов конечного множества E). Положим

$$\Omega_1(a) = \{k \in \Omega(a) : I_k \subset d_n^{2i} \text{ или } I_k \subset d_{n+1}^{2i} \text{ при некотором } i\},$$

$$\Omega_2(a) = \left\{k \in \Omega(a) \setminus \Omega_1(a) : \text{dist}(I_k, x) > \frac{\varepsilon_{n-1}}{4}\right\}, \quad \Omega_3(a) = \Omega(a) \setminus \Omega_1(a) \setminus \Omega_2(a).$$

Аналогично определяются множества $\Omega_\nu(b)$, $\nu = 1, 2, 3$ (с m вместо n и b вместо a).

Из (30) и (31) следует, что

$$|F(I_k, \Delta_j)| \leq \begin{cases} 2\omega(\delta_n) & \text{при } k \in \Omega_1(a), \\ 2\omega(\delta_m) & \text{при } j \in \Omega_1(b), \\ 2\omega(2^{-m}) & \text{при } k \in \Omega(a), j \in \Omega(b). \end{cases} \quad (33)$$

Легко видеть, что множество $\{I_k : k \notin \Omega_1(a)\}$ состоит из тех интервалов I_k , которые пересекаются с одним из интервалов d_n^{2i-1} , при этом с каждым из интервалов d_n^{2i-1} пересекаются не более пяти интервалов, а в $\Omega_3(a)$ входят те интервалы, которые пересекаются с ближайшим к x интервалом d_n^{2i-1} . Поэтому

$$\#\Omega_2(a) \leq 5 \cdot 4^n, \quad \#\Omega_3(a) \leq 5. \quad (34)$$

Разобьем A на суммы:

$$A = \sum_{k \in \Omega_1(a), j \in \Omega(b)} + \sum_{k \in \Omega_2(a), j \in \Omega(b)} + \sum_{k \in \Omega_3(a), j \in \Omega_1(b)} + \sum_{k \in \Omega_3(a), j \in \Omega_2(b)} + \sum_{k \in \Omega_3(a), j \in \Omega_3(b)} =: A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5.$$

Из (29), (32)–(34) получим

$$A_1 \leq 2\omega(\delta_n)(\#\Omega(a))(\#\Omega(b)) \leq C\omega(\delta_n) \frac{1}{\varepsilon_{n+1}^2} \leq C4^{-n},$$

$$A_3 \leq 5(\#\Omega(b))\omega(\delta_m) \leq C\omega(\delta_m) \frac{1}{\varepsilon_{m+1}} \leq C4^{-m}.$$

Далее, в силу (32) для $k \in \Omega_2(a)$, $j \in \Omega_2(b)$ имеем

$$k > \frac{\varepsilon_{n-1}}{4\varepsilon_n}, \quad j > \frac{\varepsilon_{m-1}}{4\varepsilon_m}.$$

Следовательно,

$$A_2 \leq C \sum_{k \in \Omega_2(a)} \frac{4\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \omega(2^{-m}) \ln(\#\Omega(b)) \leq C\omega(2^{-m})4^{-2n}n^24^n,$$

$$A_4 \leq 5\omega(2^{-m}) \frac{4\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}} (\#\Omega_2(b)) \leq C\omega(2^{-m})4^{-2m}4^m.$$

Наконец, в силу (33) и (34) выполнено $A_5 \leq 25\omega(2^{-m})$. Суммы A_1 и A_3 в (25) оцениваются аналогично. Из этих оценок находим, что

$$V_h(F) \leq C(4^{-m} + \omega(2^{-m})), \quad \varepsilon_{m+1} < h \leq \varepsilon_m.$$

Так как $m \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$, отсюда вытекает (28) (равномерно по функциям F вида (3)). Лемма 5 доказана.

Теорема 1 следует из лемм 4, 5 и (26). При этом условие (4) выполняется (при достаточно большом N) для всех F вида (3) с $\|F\|_\infty \leq \omega(2\pi)$. В случае произвольной F достаточно рассмотреть функцию $F(x, y) - F(0, 0)$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Kahane J.-P., Katznelson Y. Series de Fourier des fonctions bornées // Stud. Pure Math. A la Memoire de P. Turan. Akad. Kiadó: Budapest, 1983. P. 395–410.
- [3] Саакян А. А. О свойствах коэффициентов Фурье суперпозиции функций // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 2. С. 302–306.
- [4] Саакян А. А. О теореме Бора для кратных тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 94–103.
- [5] Голубов Б. И. Двойные ряды Фурье и функции ограниченной вариации // Изв. вузов. Матем. 1972. № 12 (127). С. 55–68.
- [6] Саакян А. А. О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // Изв. АН АрмССР. Матем. 1986. Т. 21. № 6. С. 517–529.
- [7] Waterman D. On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 1976. V. 44. № 1. P. 107–117.

Институт математики НАН Армении
E-mail: sart@instmath.sci.am

Поступило
10.03.98