Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Тимошенко, Центр некоторых разрешимых групп
с одним определяющим соотношением, *Матем. заметки*,
1998, том 64, выпуск 6, 925–931

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:34:56

УДК 512.544

ЦЕНТР НЕКОТОРЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ

Е. И. Тимошенко

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых центр метабелевых групп с одним определяющим соотношением нетривиален. Описан центр таких групп. Исследован центр групп вида $F/N'\langle g \rangle^F$ при некоторых ограничениях. С помощью другой техники усилен ранее полученный результат А. Ф. Красникова и автора о центре групп указанного вида.

Библиография: 8 названий.

В Коуровской тетради [1] М. И. Каргаполов в 1973 году поставил следующий вопрос.

ВОПРОС [1, вопрос 4.33 а)]. Пусть $\mathfrak{R}_n$ – класс групп с одним определяющим соотношением в многообразии n -ступенно разрешимых групп. При каких условиях $\mathfrak{R}_n$ -группа обладает нетривиальным центром? Может ли быть нетривиальным центр $\mathfrak{R}_n$ -группы, $n \geq 2$, не допускающей двух порождающих?

В работе автора [2] было доказано, что $\mathfrak{R}_2$ -группа имеет тривиальный центр, если она не допускает двух порождающих элементов.

В книге избранных трудов М. И. Каргаполова [3] собраны его вопросы по теории групп и приведены комментарии к ним В. Н. Ремесленникова, отметившего, что ответ на первую часть вопроса не получен.

В данной заметке приведены необходимые и достаточные условия того, что $\mathfrak{R}_2$ -группа имеет нетривиальный центр, и дано описание центра.

В совместной работе [4] А. Ф. Красникова и автора исследовался центр групп вида $F/N'\langle g \rangle^F$ при некоторых ограничениях. В частности, предполагалось, что группа F/N упорядочиваема. Использование кольца косых многочленов Лорана дает возможность доказать эту теорему в более общей формулировке.

1. Пусть $\mathfrak{A}$ – многообразие всех абелевых групп, а $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Можно указать очевидные случаи, когда центр $\mathfrak{R}_n$ -группы нетривиален. Например, если $G = \langle x_1, x_2 : g = 1, \mathfrak{A}^n \rangle$ и $g = [x_1, x_2]$ или g – примитивный элемент в группе $F_2(\mathfrak{A}^n)$. Можно найти и другие примеры $\mathfrak{R}_n$ -групп, имеющих нетривиальный центр. Если ограничиться случаем $n = 2$, то, как следует из [2], нужно рассматривать лишь группы с двумя порождающими. Покажем, например, что центр группы $G_1 = \langle x_1, x_2 : x_1^2[x_1, x_2] = 1, \mathfrak{A}^2 \rangle$ нетривиален, а именно, элемент $z = x_2^2$ является центральным в группе G_1 .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01948.

Пусть R – нормальное замыкание элемента $g = x_1^2[x_1, x_2]$ в свободной метабелевой группе $S = F_2(\mathfrak{A}^2)$. Достаточно доказать, что $[x_1, z]$ – элемент из R .

Имеем

$$[g, x_1] = [x_1, x_2]^{\overline{x}_1 - 1}, \quad [g, x_2] = [x_1, x_2]^{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}, \quad [x_1, x_2^2] = [x_1, x_2]^{1 + \overline{x}_1},$$

где черта означает образ элемента из S в группе $\overline{S} = S/S'$. Так как $1 + \overline{x}_2 = (-1)(\overline{x}_1 - 1) + (\overline{x}_1 + \overline{x}_2)$, то $[x_1, z] = [g, x_1]^{-1}[g, x_2]$, т.е. $[x_1, z] \in R$.

Вместе с тем можно доказать, что группы $G_m = \langle x_1, x_2 : x_1^m = 1, \mathfrak{A}^2 \rangle$ имеют тривиальный центр при $m \geq 2$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия того, что центр $\mathfrak{A}_2$ -группы является нетривиальным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть S – свободная метабелева группа с базисом x_1, x_2 , $G = \langle x_1, x_2 : g = 1, \mathfrak{A}^2 \rangle$ – метабелева группа с двумя порождающими и одним определяющим соотношением, $\overline{S} = S/S'$, $g = x_1^n[x_1, x_2]^\alpha$, $n \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}(\overline{S})$, $\alpha = \sum_{i=1}^l n_i \overline{g}_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, $\overline{g}_i \in \overline{S}$. Пусть H – подгруппа $\overline{S}$, порожденная элементами $\overline{g}_i^{-1} \overline{g}_j$, когда i, j пробегают все, необязательно разные, значения от 1 до l . Тогда

- 1) центр группы G есть свободная абелева группа ранга 2, если $n = 0$ и α – единица кольца $\mathbb{Z}(\overline{S})$;
- 2) центр группы G есть бесконечная циклическая группа, если $n = 0$, H – бесконечная циклическая группа и элемент α является делителем элемента $(\overline{h}^m - 1)/(\overline{h} - 1)$ для некоторого целого $m > 0$ и некоторого примитивного элемента $\overline{h}$ из S ;
- 3) центр группы G есть бесконечная циклическая группа, если $n > 0$ и для некоторого целого $l \neq 0$ и некоторых элементов A, B из фундаментального идеала Δ кольца $\mathbb{Z}(\overline{S})$ имеет место

$$\overline{x}_2^{n_l} - 1 = A\alpha(1 - \overline{x}_1) + B\left(\alpha(1 - \overline{x}_2) + \frac{\overline{x}_1^n - 1}{\overline{x}_1 - 1}\right);$$

- 4) в остальных случаях центр $\mathbb{Z}(G)$ группы G тривиален;
- 5) центр группы G не содержит нетривиальных элементов из коммутанта G' .

Доказательство разобьем на несколько случаев в зависимости от расположения элемента g в группе S .

Случай 1. $g \in S'$, $g = [x_1, x_2]^\alpha$.

Покажем, что в этом случае $Z(G) \cap G' = 1$.

Предположим, что $z = [x_1, x_2]^\beta$, где $\beta \in \mathbb{Z}(\overline{S})$, – центральный элемент в группе G . Тогда для некоторых β_1, β_2 из $\mathbb{Z}(\overline{S})$ имеем

$$[z, x_1] = [x_1, x_2]^{\beta(\overline{x}_1 - 1)} = [x_1, x_2]^{\alpha\beta_1}, \quad [z, x_2] = [x_1, x_2]^{\beta(\overline{x}_2 - 1)} = [x_1, x_2]^{\alpha\beta_2}.$$

Значит,

$$\beta(\overline{x}_1 - 1) = \alpha\beta_1, \quad \beta(\overline{x}_2 - 1) = \alpha\beta_2. \quad (1)$$

Если β_1 делится на $\bar{x}_1 - 1$ или β_2 делится на $\bar{x}_2 - 1$ в $\mathbb{Z}(\bar{S})$, то $z = 1$ в группе G . Предположим, что это не так, т.е. $\alpha = \alpha'(\bar{x}_1 - 1)(\bar{x}_2 - 1)$. Тогда из (1) получаем

$$\beta = \beta'(\bar{x}_1 - 1)(\bar{x}_2 - 1).$$

Следовательно,

$$\beta'(\bar{x}_1 - 1) = \alpha'\beta_1, \quad \beta'(\bar{x}_2 - 1) = \alpha'\beta_2.$$

Так как процесс деления α и β на $(\bar{x}_1 - 1)(\bar{x}_2 - 1)$ должен оборваться, то z – элемент из $R = \langle g \rangle^S$.

Пусть центральный элемент z лежит в $S \setminus S'$.

Выберем базис y_1, y_2 группы S так, что $z = y_1^m[y_1, y_2]^\beta$, где $m > 0, \beta \in \mathbb{Z}(\bar{S})$.

Убедимся сначала, что если $z = y_1^m[y_1, y_2]^\beta$ – центральный элемент в группе G , то $z = y_1^m$ в группе G . Действительно,

$$[z, y_1] = [y_1, y_2]^{\beta(\bar{y}_1 - 1)}, \quad [z, y_2] = [y_1, y_2]^{(\bar{y}_1^m - 1)/(\bar{y}_1 - 1) + \beta(\bar{y}_2 - 1)}.$$

Запишем элемент g в виде $g = [y_1, y_2]^\gamma$, где γ – некоторый элемент из $\mathbb{Z}(\bar{S})$. Так как $[z, y_1]$ и $[z, y_2]$ – элементы из R , найдутся $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}(\bar{S})$ такие, что

$$\beta(\bar{y}_1 - 1) = \gamma\gamma_1, \tag{2}$$

$$\frac{\bar{y}_1^m - 1}{\bar{y}_1 - 1} + \beta(\bar{y}_2 - 1) = \gamma\gamma_2. \tag{3}$$

Применим к (3) отображение $\varepsilon: \mathbb{Z}(\bar{S}) \rightarrow \mathbb{Z}$. Так как $\varepsilon((\bar{y}_1^m - 1)/(\bar{y}_1 - 1)) = m \neq 0$, то $\varepsilon(\gamma) \neq 0$. Значит, элемент γ не делится на $\bar{y}_1 - 1$. Поэтому из (2) получим $\beta = \gamma\gamma'_1$ для некоторого $\gamma'_1 \in \mathbb{Z}(\bar{S})$. Значит,

$$zg^{-\gamma'_1} = y_1^m[y_1, y_2]^{\beta - \gamma\gamma'_1} = y_1^m.$$

Таким образом, можно считать, что $\beta = 0$. Тогда из (3) заключаем, что $(\bar{y}_1^m - 1)/(\bar{y}_1 - 1)$ делится на γ .

Определим связь между элементами α и γ . Известно [5], что любой автоморфизм группы S индуцирован некоторым автоморфизмом свободной группы F_2 с базисом u_1, u_2 . Любой автоморфизм группы F_2 переводит коммутатор $[u_1, u_2]$ в элемент $[u_1, u_2]^{\pm v}$, где $v \in F_2$ (см., например, [6]). Поэтому любой автоморфизм группы S переводит коммутатор $[x_1, x_2]$ в элемент $[x_1, x_2]^{\pm w}$, где $w \in S$.

Рассмотрим автоморфизм φ группы S : $\varphi = \{x_1 \mapsto y_1, x_2 \mapsto y_2\}$. Тогда

$$[y_1, y_2] = [\varphi(x_1), \varphi(x_2)] = [x_1, x_2]^{\pm w}$$

для некоторого $w \in S$. Поэтому

$$g = [x_1, x_2]^\alpha = [y_1, y_2]^\gamma = [x_1, x_2]^{\pm w\gamma},$$

т.е. $\alpha = \pm w\gamma$. Значит, элемент $(\bar{y}_1^m - 1)/(\bar{y}_1 - 1)$ делится на α .

Обратно, если для некоторого примитивного элемента y_1 из S и некоторого $m > 0$ элемент $(\bar{y}_1^m - 1)/(\bar{y}_1 - 1)$ делится на α в кольце $\mathbb{Z}(\bar{S})$, то элемент y_1^m является центральным, поскольку условия (2) и (3) для него выполнены.

Проверим, что $\mathbb{Z}(G)$ – бесконечная циклическая группа, если выполнены условия утверждения 2) теоремы. Действительно, в этом случае $l > 1$, так как H – бесконечная циклическая группа. Поэтому примитивный элемент y_1 определен однозначно по модулю S' элементом α . Из того, что $z = y_1^m c$, $c \in S'$, – центральный элемент в группе G , следует $z = y_1^m$ в G . Значит, $\mathbb{Z}(G)$ – бесконечная циклическая группа, порожденная степенью элемента y_1 .

Случай 2. $g \in S \setminus S'$, $g = x_1^n [x_1, x_2]^\alpha$, $n > 0$.

Обоснование того, что $Z(G) \cap G' = 1$, является практически дословным повторением п. 2 доказательства теоремы из [2].

Найдем необходимые и достаточные условия того, чтобы элемент $z \in S \setminus S'$ был центральным.

Пусть $z = x_1^{m_1} x_2^{m_2} [x_1, x_2]^{\beta'}$, где $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $\beta' \in \mathbb{Z}(\bar{S})$, является центральным элементом в группе G .

Рассмотрим свободную двуступенную нильпотентную группу $F_2(\mathbb{N}_2)$ ранга 2 с базисом a_1, a_2 и гомоморфизм $\theta = \{x_1 \mapsto a_1, x_2 \mapsto a_2\}$. Так как z – центральный элемент, то $[z, S] \leq [\langle g \rangle, S]$, где $\langle g \rangle$ – группа, порожденная элементом g .

Применим θ к этому включению. Тогда $[a_1, a_2]^{m_1}, [a_1, a_2]^{m_2}$ – элементы из группы $\langle [a_1, a_2]^n \rangle$. Поэтому $m_1 = nl_1, m_2 = nl$. Значит, в группе G элемент z равен элементу $x_2^{nl} [x_1, x_2]^\beta$, причем $l \neq 0$, так как $z \neq 1$ в G .

Итак, пусть $z = x_2^{nl} [x_1, x_2]^\beta$ – неединичный центральный элемент в группе G . Тогда

$$[x_1, z] = [x_1, x_2]^{(\bar{x}_2^{nl}-1)/(\bar{x}_2-1)+\beta(1-\bar{x}_1)}, \quad [x_2, z] = [x_1, x_2]^{\beta(1-\bar{x}_2)}$$

– элементы из R . Так как $R = \langle g \rangle [\langle g \rangle, S]$, то элементы $[x_1, z]$ и $[x_2, z]$ лежат в подгруппе $[\langle g \rangle, S]$. Нормальная подгруппа $[\langle g \rangle, S]$ порождена, как $\mathbb{Z}(\bar{S})$ -модуль, элементами

$$[x_1^n [x_1, x_2]^\alpha, x_1] = [x_1, x_2]^{\alpha(\bar{x}_1-1)}, \quad [x_1^n [x_1, x_2]^\alpha, x_2] = [x_1, x_2]^{(\bar{x}_1^n-1)/(\bar{x}_1-1)+\alpha(\bar{x}_2-1)}.$$

Поэтому элемент z является центральным в группе G тогда и только тогда, когда найдутся $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathbb{Z}(\bar{S})$ такие, что

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_2^{nl}-1}{\bar{x}_2-1} + \beta(1-\bar{x}_1) &= \gamma_1 \alpha(\bar{x}_1-1) + \gamma_2 \left(\frac{\bar{x}_1^n-1}{\bar{x}_1-1} + \alpha(\bar{x}_2-1) \right), \\ \beta(1-\bar{x}_2) &= \gamma_3 \alpha(\bar{x}_1-1) + \gamma_4 \left(\frac{\bar{x}_1^n-1}{\bar{x}_1-1} + \alpha(\bar{x}_2-1) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (4) эквивалентна одному уравнению

$$\bar{x}_2^{nl}-1 = (\gamma_1(\bar{x}_2-1) + \gamma_3(1-\bar{x}_1)) \alpha(\bar{x}_1-1) + (\gamma_2(\bar{x}_2-1) + \gamma_4(1-\bar{x}_1)) \left(\frac{\bar{x}_1^n-1}{\bar{x}_1-1} + \alpha(\bar{x}_2-1) \right).$$

Таким образом, если группа G имеет нетривиальный центр, то найдется $l \neq 0$ и элементы A, B из Δ такие, что

$$x_2^{nl}-1 = A \alpha(\bar{x}_1-1) + B \left(\frac{\bar{x}_1^n-1}{\bar{x}_1-1} + \alpha(\bar{x}_2-1) \right). \quad (5)$$

Верно и обратное, т.е. если существует $l \neq 0$ и $A, B \in \Delta$ удовлетворяют уравнению (5), то группа G имеет нетривиальный центр.

Покажем, что центр группы G есть бесконечная циклическая группа, если условия утверждения 3) теоремы выполнены.

Действительно, все центральные элементы в группе G имеют вид $x_2^{n l} [x_1, x_2]^{\beta}$. Пусть $z_1 = x_2^{n l_1} [x_1, x_2]^{\beta_1}$ и $z_2 = x_2^{n l_2} [x_1, x_2]^{\beta_2}$ – два центральных неединичных элемента из G и d – наибольший общий делитель чисел l_1, l_2 . Тогда $z = x_2^{n d} [x_1, x_2]^{\beta_3}$ – также центральный элемент в G при некотором $\beta_3 \in \mathbb{Z}(\bar{S})$. Но тогда найдется $t \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$x_2^{n l_1} [x_1, x_2]^{\beta_1} z^{-t} = [x_1, x_2]^{\delta}$$

– центральный элемент. Так как $Z(G) \cap G' = 1$, то $z_1 = z^t$. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1. $n = 2, \alpha = 1$.

При этих значениях уравнение (5) имеет решение $A = 1 - \bar{x}_2, B = \bar{x}_2 - 1, l = 1$. Этим значениям соответствует группа $G_1 = \langle x_1, x_2 : x_1^2 [x_1, x_2] = 1, \mathfrak{A}^2 \rangle$, имеющая нетривиальный центр.

ПРИМЕР 2. $n \geq 2, \alpha = 0$.

Из (5) получаем

$$\frac{\bar{x}_2^{n l} - 1}{\bar{x}_2 - 1} = B \frac{\bar{x}_1^n - 1}{\bar{x}_1 - 1}. \quad (6)$$

Применим к (6) эндоморфизм $\psi = \{\bar{x}_1 \mapsto 1, \bar{x}_2 \mapsto \bar{x}_2\}$. Тогда

$$\frac{\bar{x}_2^{n l} - 1}{\bar{x}_2 - 1} = n \cdot \psi(B). \quad (7)$$

Так как (7) невозможно при $n \geq 2$, центр группы $G_n = \langle x_1, x_2 : x_1^n = 1, \mathfrak{A}^2 \rangle$ тривиален при $n \geq 2$.

2. Пусть G – группа такая, что целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}(G)$ не имеет делителей нуля, N – нормальная подгруппа из G и G/N – свободная абелева группа ранга 2 с порождающими xN и yN .

Элемент y , действуя на подгруппу N сопряжением, индуцирует автоморфизм α кольца $\mathbb{Z}(N)$. Ввиду того, что группа G/N без кручения, каждый элемент a группового кольца группы $\langle N, y \rangle$, порожденной подгруппой N и элементом y , однозначно записывается в виде

$$a = a_i y^i + \dots + a_{i+d} y^{i+d},$$

где $i, d \in \mathbb{Z}, d \geq 0, a_j \in \mathbb{Z}(N)$. Таким образом, групповое кольцо $\mathbb{Z}(\langle N, y \rangle)$ является кольцом косых многочленов Лорана $\mathbb{Z}(N)[y]$ с автоморфизмом $\alpha(a) = y^{-1} a y, a \in \mathbb{Z}(N)$.

Аналогично, имеем

$$\mathbb{Z}(\langle N, x \rangle) = \mathbb{Z}(N)[x], \quad \mathbb{Z}(G) = \mathbb{Z}(\langle N, y \rangle)[x] = \mathbb{Z}(\langle N, x \rangle)[y].$$

Рассмотрим кольцо косых рядов Лорана от переменной y над кольцом $\mathbb{Z}(N)$. Элементы этого кольца – формальные суммы вида $a_i y^i + a_{i+1} y^{i+1} + \dots$, где $i \in \mathbb{Z}$,

$a_j \in \mathbb{Z}(N)$. Обозначим это кольцо через $\mathbb{Z}(N)[[y]]$. Заметим, что $\mathbb{Z}(N)[y]$ является подкольцом $\mathbb{Z}(N)[[y]]$.

Так как $G' \leq N$, сопряжение элементом x определяет автоморфизм кольца $\mathbb{Z}(N)[y]$. Распиряя этот автоморфизм до автоморфизма кольца $\mathbb{Z}(N)[[y]]$, мы получим кольцо ко- сых многочленов $\mathbb{Z}(N)[[y]][x]$, ненулевыми элементами которого являются суммы вида

$$a = a_i x^i + \dots + a_{i+d} x^{i+d},$$

где $i, d \in \mathbb{Z}, d \geq 0, a_j \in \mathbb{Z}(N)[[y]], a_i, a_{i+d} \neq 0$.

Назовем d степенью элемента a по переменной x . Таким образом, степень по x определена для трех колец:

$$\mathbb{Z}(\langle N, x \rangle) = \mathbb{Z}(N)[x], \quad \mathbb{Z}(G) = \mathbb{Z}(\langle N, y \rangle)[x], \quad \mathbb{Z}(N)[[y]][x].$$

Однако, эти определения дают один результат для общих элементов колец.

Доказательство следующей леммы можно найти в [7].

ЛЕММА. Предположим, что $a, b \in \mathbb{Z}(G)$ и $a - (1-x)(1-y)^{-1}b$ имеет нулевую степень по x , как элемент $\mathbb{Z}(N)[[y]][x]$. Тогда $b \in (1-y)\mathbb{Z}(G)$.

Теперь мы можем доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – свободная группа конечного ранга не менее 2, T – нормальная подгруппа из F , принадлежащая коммутанту F' группы F , f – элемент из F' , $R = \langle f \rangle^F$ – нормальное замыкание элемента f в группе F . Предположим, что центр группы $G = F/TR$ тривиален и кольцо $\mathbb{Z}(G)$ не содержит делителей нуля. Тогда центр группы $H = F/T'R$ также тривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через M группу TR . Тогда $T'R = M'R$, и нам достаточно доказать тривиальность центра группы $F/M'R$ при условии, что центр группы $G = F/M$ тривиален, кольцо $\mathbb{Z}(G)$ не имеет делителей нуля и элемент f взят из подгруппы M , принадлежащей коммутанту F' .

Заметим прежде всего, что если группа H имеет центральный элемент, то он лежит в подгруппе $M/M'R$.

Действительно, пусть взаимный коммутант $[z, F]$ лежит в $M'R$. Применим к включению $[z, F] \leq M'R$ естественный гомоморфизм группы F на группу G . Обозначим через $\bar{z}$ образ элемента z при этом гомоморфизме. Так как $R \leq M$, имеет место $[\bar{z}, G] = 1$. Но центр группы G тривиален. Поэтому $z \in M$.

Пусть $x_1, \dots, x_r$ – свободные порождающие свободной группы F . Элементы $[z^{-1}, x_i^{-1}]$ лежат в $M'R$. Так как $z \in M$, в кольце $\mathbb{Z}(F/M)$ имеем

$$(1 - \bar{x}_i) \partial_j z = \partial_j [z^{-1}, x_i^{-1}], \quad j, i = 1, \dots, r. \quad (8)$$

Согласно лемме из [8] элемент $[z^{-1}, x_i^{-1}]$ лежит в подгруппе $M'R$ тогда и только тогда, когда

$$\partial_j [z^{-1}, x_i^{-1}] = \bar{\gamma}_i \partial_j f + \bar{\gamma}_{ij}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (9)$$

где $\bar{\gamma}_i \in \mathbb{Z}(F/M)$, $\bar{\gamma}_{ij}$ – элементы идеала I_f , порожденного элементом $\bar{f} - 1$ в кольце $\mathbb{Z}(G)$. Так как $f \in M$, то $\bar{\gamma}_{ij} = 0$ при всех $i = 1, \dots, r$. Поэтому из (8) и (9) получаем

$$(1 - \bar{x}_i) \partial_j z = \bar{\gamma}_i \partial_j f, \quad i = 1, \dots, r. \quad (10)$$

В группе G рассмотрим подгруппу N , порожденную элементами $\bar{x}_3, \dots, \bar{x}_r$ и коммутантом G' . Тогда G/N – свободная абелева группа ранга 2.

Из (10) при $i = 1, 2$ получаем

$$\partial_j z = (1 - \bar{x}_1)^{-1} \bar{\gamma}_1 \partial_j f, \quad \partial_j z = (1 - \bar{x}_2)^{-1} \bar{\gamma}_2 \partial_j f, \quad j = 1, \dots, r, \quad (11)$$

где $(1 - \bar{x}_1)^{-1} \bar{\gamma}_1 \partial_j f$ и $(1 - \bar{x}_2)^{-1} \bar{\gamma}_2 \partial_j f$ – элементы из кольца $\mathbb{Z}(\langle N \rangle)[[\bar{x}_1]][[\bar{x}_2]]$. Из (11) получаем

$$(1 - \bar{x}_1)^{-1} \bar{\gamma}_1 \partial_j f = (1 - \bar{x}_2)^{-1} \bar{\gamma}_2 \partial_j f.$$

Тогда

$$(1 - \bar{x}_2)(1 - \bar{x}_1)^{-1} \bar{\gamma}_1 \partial_j f = \bar{\gamma}_2 \partial_j f.$$

Таким образом,

$$((1 - \bar{x}_2)(1 - \bar{x}_1)^{-1} \bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2) \partial_j f = 0.$$

Теорема Ауслендера–Линдона утверждает, что если факторгруппа F/M бесконечна, то центр группы F/M' тривиален. Поэтому при $f = 1$ центр группы $F/M'R$ тривиален.

Если $f \neq 1$, то выберем j так, что $\partial_j f \neq 0$ в $\mathbb{Z}(G)$. Так как кольцо $\mathbb{Z}(N)[[\bar{x}_1]][[\bar{x}_2]]$ без делителей нуля, то

$$(1 - \bar{x}_2)(1 - \bar{x}_1)^{-1} \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2. \quad (12)$$

Согласно лемме равенство (12) справедливо при $\bar{\gamma}_1 = (1 - \bar{x}_1) \bar{\gamma}'_1, \bar{\gamma}'_1 \in \mathbb{Z}(G)$. Тогда из (11) имеем

$$\partial_j z = \bar{\gamma}'_1 \partial_j f \quad (13)$$

в $\mathbb{Z}(G)$ при $j = 1, \dots, r$. По лемме из [8] равенство (13) для элемента $z \in N$ означает, что z – элемент из $M'R$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ [4]. Пусть $G = F_r(\mathfrak{A}^n)$ – свободная разрешимая группа ступени $n \geq 3$ и ранга $r \geq 2$, f – элемент из последнего неединичного члена ряда коммутантов. Тогда центр группы $G/\langle f \rangle^G$ тривиален.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 13-е изд. Новосибирск, 1995.
- [2] Тимошенко Е. И. Центр группы с одним определяющим соотношением в многообразии метабелевых групп // Сиб. матем. ж. 1973. Т. 14. № 6. С. 1351–1355.
- [3] Каргаполов М. И. Избранные труды. Группы. Новосибирск: Наука, 1991.
- [4] Красников А. Ф., Тимошенко Е. И. Два замечания о группах вида $F/[N, N]$ // Деп. ВИНТИ № 4567–В85. М.: ВИНТИ, 1985.
- [5] Bachmuth S. Automorphisms of free metabelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 118. P. 93–104.
- [6] Мальцев А. И. Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и логика. 1962. Т. 1. № 5. С. 45–50.
- [7] Bachmuth S., Formanek E., Mochizuki H. Y. IA-automorphisms of two-generator torsion-free groups // J. Algebra. 1976. V. 40. № 1. P. 19–30.
- [8] Тимошенко Е. И. О примитивных элементах свободных групп многообразий $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_n$ // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 6. С. 884–889.