Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Хромов, Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 932–942

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 04:42:38

УДК 517.928

ОБ ОБРАЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, РАЗРЫВНЫМИ НА ДИАГОНАЛЯХ

А. П. Хромов

Найдены условия, при которых интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^1 A(x, t)f(t) dt$$

с ядром $A(x, t)$, допускающим разрывы первого рода при $t = x$ и $t = 1 - x$, обратим. Даны точные формулы обращения, а также приложения к задаче нахождения квадратных корней из оператора $y''(x)$ с произвольными краевыми условиями и к задаче разложения по собственным функциям.

Библиография: 3 названия.

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^1 A(x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

действующий из $L[0, 1]$ в $C[0, 1]$. Предположим, что ядро $A(x, t)$ имеет вид

$$A(x, t) = \alpha_1 A_1(x, t)\varepsilon(x, t) + \alpha_2 A_2(x, t)\varepsilon(t, x) + \alpha_3 A_3(1 - x, t)\varepsilon(1 - x, t) + \alpha_4 A_4(1 - x, t)\varepsilon(t, 1 - x),$$

где

$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq x, \\ 0 & \text{при } t > x, \end{cases}$$

$A_i(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по x и $A_i(x, t) = 1 + o(1)$, $x - t \rightarrow 0$. Таким образом, ядро $A(x, t)$ непрерывно дифференцируемо по x всюду, кроме прямых $t = x$ и $t = 1 - x$, а на этих прямых $A(x, t)$ и $A'_x(x, t)$ допускают разрывы первого рода.

Данный класс замечателен тем, что только в этом случае можно сравнительно просто исследовать поведение резольвент Фредгольма при больших значениях спектрального параметра, что важно при спектральном анализе таких операторов. И в первую очередь (см. [1]) интересна задача точного обращения, которой посвящена настоящая статья. Для таких операторов данная задача рассматривается по-видимому впервые.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.

1. ЛЕММА 1. Если $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \neq 0$, то оператор

$$Pf(x) = (\alpha_1 - \alpha_2)f(x) + (\alpha_4 - \alpha_3)f(1 - x)$$

обратим и

$$P^{-1}g(x) = \frac{1}{\delta}((\alpha_1 - \alpha_2)g(x) + (\alpha_3 - \alpha_4)g(1 - x)). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Pf(x) = g(x)$, т.е.

$$(\alpha_1 - \alpha_2)f(x) + (\alpha_4 - \alpha_3)f(1 - x) = g(x). \quad (3)$$

Меняя в (3) x на $1 - x$, получим

$$(\alpha_1 - \alpha_2)f(1 - x) + (\alpha_4 - \alpha_3)f(x) = g(1 - x). \quad (4)$$

Разрешая (3), (4) как систему уравнений относительно $f(x)$ и $f(1 - x)$, приходим к (2).

ЛЕММА 2. Если $\delta \neq 0$ и существует A^{-1} , то найдется комплексное число β_0 такое, что оператор

$$P^{-1}\left(\frac{d}{dx}A + \beta_0A\right)$$

непрерывно обратим в $L_2[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого важного предложения аналогично доказательству теоремы 2 из [1]. Имеем

$$\frac{d}{dx}Af(x) + \beta Af(x) = Pf(x) + \tilde{S}_\beta f(x),$$

где

$$\tilde{S}_\beta f(x) = \int_0^1 \tilde{S}_\beta(x, t)f(t) dt, \quad \tilde{S}_\beta(x, t) = A'_x(x, t) + \beta A(x, t).$$

Отсюда по лемме 1

$$P^{-1}\left(\frac{d}{dx}A + \beta A\right)f(x) = f(x) + S_\beta f(x),$$

где $S_\beta = P^{-1}\tilde{S}_\beta$ — интегральный оператор с ядром $S_\beta(x, t)$ непрерывным всюду, кроме прямых $t = x$ и $t = 1 - x$, на которых допускаются разрывы первого рода. Представим оператор S_β в виде $S_\beta = V_\beta + W_\beta$, где V_β — конечномерный оператор:

$$V_\beta f(x) = \sum_{s=1}^{m_\beta} (f, \psi_{s, \beta}) g_{s, \beta}(x),$$

$\{\psi_{s, \beta}\}_1^{m_\beta}, \{g_{s, \beta}\}_1^{m_\beta}$ — линейно независимые системы функций,

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\bar{g}(x) dx,$$

а оператор W_β имеет норму $\|W_\beta\| < 1$. Так как

$$E + S_\beta = (E + W_\beta)(E + (E + W_\beta)^{-1}V_\beta),$$

где E – единичный оператор, вопрос об обратимости оператора $E + S_\beta$ сводится к вопросу об обратимости оператора $E + (E + W_\beta)^{-1}V_\beta$. Имеем

$$(E + (E + W_\beta)^{-1}V_\beta)f(x) = f(x) + \sum_{s=1}^{m_\beta} (f, \psi_{s,\beta}) \tilde{g}_{s,\beta}(x),$$

где $\tilde{g}_{s,\beta}(x) = (E + W_\beta)^{-1}g_{s,\beta}(x)$. Поэтому если

$$f(x) + \sum_{s=1}^{m_\beta} (f, \psi_{s,\beta}) \tilde{g}_{s,\beta}(x) = g(x), \quad (5)$$

то

$$f(x) = g(x) + \sum_{s=1}^{m_\beta} \gamma_s \tilde{g}_{s,\beta}(x).$$

Подставляя последнее равенство в (5), получим

$$g(x) + \sum_{s=1}^{m_\beta} \gamma_s \tilde{g}_{s,\beta}(x) + \sum_{s=1}^{m_\beta} \left(g + \sum_{j=1}^{m_\beta} \gamma_j \tilde{g}_{j,\beta}, \psi_{s,\beta} \right) \tilde{g}_{s,\beta}(x) = g(x).$$

Отсюда получаем систему

$$\gamma_s + \sum_{j=1}^{m_\beta} \gamma_j (\tilde{g}_{j,\beta}, \psi_{s,\beta}) = -(g, \psi_{s,\beta}), \quad s = 1, \dots, m_\beta. \quad (6)$$

Система (6) эквивалентна (5). Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости системы (6) является

$$\Delta(\beta) = \det \|\delta_{s,j} + (\tilde{g}_{j,\beta}, \psi_{s,\beta})\|_1^{m_\beta} \neq 0,$$

где $\delta_{s,j}$ – символ Кронекера. Предположим, что $E + S_\beta$ необратим ни при каком β . Тогда $\Delta(\beta) \equiv 0$ и при любом β существует функция $f_\beta(x) \in L_2[0, 1]$, $f_\beta(x) \neq 0$ почти всюду, такая, что $f_\beta + S_\beta f_\beta = 0$. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{d}{dx} A + \beta A \right) f(x) = 0.$$

Значит, $Af_\beta = C(\beta)e^{-\beta x}$. Покажем, что хотя бы при одном β $C(\beta) = 0$. Допустим противное: пусть $C(\beta) \neq 0$ при всех β . Тогда

$$P^{-1} \frac{d}{dx} Af_\beta = f_\beta + S_0 f_\beta = C(\beta)(-\beta)P^{-1}(e^{-\beta x}).$$

Но $f_\beta + S_0 f_\beta = f_\beta + V_0 f_\beta + W_0 f_\beta$. Поэтому

$$f_\beta + (E + W_0)^{-1}V_0 f_\beta = C(\beta)(-\beta)g_1,$$

где $g_1(x) = (E + W_0)^{-1}P^{-1}(e^{-\beta x})$. Действительно,

$$f_\beta(x) + \sum_{s=1}^{m_0} (f_\beta, \psi_{s,0}) \tilde{g}_{s,0}(x) = C(\beta)(-\beta)g_1(x).$$

Отсюда

$$(f_\beta, \psi_{j,0}) + \sum_{s=1}^{m_0} (f_\beta, \psi_{s,0})(\tilde{g}_{s,0}, \psi_{j,0}) = C(\beta)(-\beta)(g_1, \psi_{j,0}), \quad j = 1, \dots, m_0.$$

Определитель этой системы $\Delta(0) = 0$. Значит, существуют компоненты ξ_k , $\sum_1^{m_0} |\xi_k| > 0$, не зависящие от β , такие, что $C(\beta)(-\beta)(g_1, \psi) = 0$, где $\psi(x) = \sum_j \xi_j \psi_{j,0}(x)$. Отсюда $(g_1, \psi) \equiv 0$ по β . Значит, $(e^{-\beta x}, \tilde{\psi}) \equiv 0$, где $\tilde{\psi}(x) = (P^{-1})^k (E + W_0^*)^{-1} \psi$. Отсюда $\tilde{\psi}(x) = 0$ почти всюду. Значит, и $\psi(x) = 0$ почти всюду. Противоречие. Поэтому существует β_0 такое, что $Af_{\beta_0} = 0$. Отсюда $f_{\beta_0} = 0$ почти всюду. Противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\delta \neq 0$ и существует A^{-1} . Если $y(x) = Af(x)$, где $f(x) \in L[0, 1]$, то

$$f(x) = (E + S_{\beta_0})^{-1}P^{-1}(y'(x) + \beta_0 y(x)), \quad (7)$$

$$y(0) = \int_0^1 A(0, t)(E + S_{\beta_0})^{-1}P^{-1}(y'(t) + \beta_0 y(t)) dt; \quad (8)$$

и обратно, из (7), (8) следует, что $y(x) = Af(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $f(x) \in L_2[0, 1]$. Тогда

$$(E + S_{\beta_0})f(x) = P^{-1}\left(\frac{d}{dx}A + \beta_0 A\right)f(x) = P^{-1}(y'(x) + \beta_0 y(x)).$$

Отсюда по лемме 2 получаем (7). Далее, в силу (7) из

$$y(0) = \int_0^1 A(0, t)f(t) dt$$

получаем (8).

Обратно, пусть выполнены (7) и (8). Тогда

$$y(0) = \int_0^1 A(0, t)f(t) dt. \quad (9)$$

Далее,

$$P(E + S_{\beta_0})f(x) = y'(x) + \beta_0 y(x). \quad (10)$$

Но

$$P(E + S_{\beta_0})f(x) = \frac{d}{dx}Af(x) + \beta_0 Af(x). \quad (11)$$

Значит, если положим $z(x) = y(x) - Af(x)$, то из (9)–(11) получим $z'(x) + \beta_0 z(x) = 0$, $z(0) = 0$. Отсюда $z(x) \equiv 0$, т.е. $y(x) = Af(x)$.

Чтобы убедиться в справедливости соотношений (7), (8) для $f(x) \in L[0, 1]$, необходимо записать их для последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) \in L_2[0, 1]$ и $\|f_n - f\|_{L[0, 1]} \rightarrow 0$, и затем перейти к пределу. Теорема доказана.

2. Условие существования A^{-1} трудно проверяемо. Поэтому укажем частные случаи, когда существование A^{-1} очевидно.

Прежде всего отметим следующий случай: все α_i , кроме одного, равны 0. Пусть, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$. В этом случае формула обращения легко получается и имеет вид

$$A^{-1}y = -\frac{1}{\alpha_3}(E + N)^{-1}y'(1-x), \quad y(1) = 0,$$

где

$$Nf(x) = \int_0^x N(x, t)f(t) dt, \quad N(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}A_3(x, t).$$

Кроме того, A^{-1} существует, если все α_i , кроме одного, достаточно малы. Мы не приводим здесь формулу для A^{-1} ввиду ее громоздкости.

Рассмотрим теперь менее тривиальный случай.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$, $\delta \neq 0$ и $A_1(x, t) \equiv A_3(x, t)$. Тогда A^{-1} существует, область определения $D_{A^{-1}}$ оператора A^{-1} состоит из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих граничному условию

$$\alpha_1 y(0) - \alpha_3 y(1) = 0, \quad (12)$$

и справедлива формула

$$A^{-1}y = \frac{1}{\delta}(E + N)^{-1}(\alpha_1 y'(x) + \alpha_3 y'(1-x)), \quad (13)$$

где

$$Nf(x) = \int_0^x N(x, t)f(t) dt, \quad N(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}A_1(x, t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y(x) = Af(x)$. Тогда

$$y(0) = \alpha_3 \int_0^1 A_3(1, t)f(t) dt, \quad y(1) = \alpha_1 \int_0^1 A_1(1, t)f(t) dt.$$

Отсюда следует (12). Далее, дифференцируя $y(x) = Af(x)$, получим

$$y'(x) = \alpha_1 f(x) - \alpha_3 f(1-x) + \alpha_1 \int_0^x N(x, t)f(t) dt - \alpha_3 \int_0^{1-x} N(1-x, t)f(t) dt. \quad (14)$$

Меняя x на $1-x$, получим

$$y'(1-x) = \alpha_1 f(1-x) - \alpha_3 f(x) + \alpha_1 \int_0^{1-x} N(1-x, t)f(t) dt - \alpha_3 \int_0^x N(x, t)f(t) dt. \quad (15)$$

Умножая (14) на α_1 , (15) на α_3 и складывая, получим

$$\alpha_1 y'(x) + \alpha_3 y'(1-x) = \delta(f(x) + Nf(x)). \quad (16)$$

Отсюда следует (13).

Обратно, обозначим через $f(x)$ правую часть (13). Тогда получаем (16). Меняя в (16) x на $1 - x$, находим

$$\alpha_1 y'(1-x) + \alpha_3 y'(x) = \delta \left(f(1-x) + \int_0^{1-x} N(1-x, t) f(t) dt \right). \quad (17)$$

Из (16), умноженного на α_1 , вычтем (17), умноженное на α_3 , и поделим полученный результат на δ . В итоге

$$y'(x) = \frac{d}{dx} A f(x).$$

Отсюда, интегрируя от 0 до x и от x до 1, получаем

$$y(x) - y(0) = A f(x) - A f(0), \quad y(1) - y(x) = A f(1) - A f(x). \quad (18)$$

Умножая первое соотношение в (18) на α_1 , второе на α_3 и складывая, в силу (12) и равенства $\alpha_1 A f(0) = \alpha_3 A f(1)$ получаем $(\alpha_1 - \alpha_3) y(x) = (\alpha_1 - \alpha_3) A f(x)$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\delta \neq 0$ и $A_2(x, t) \equiv A_4(x, t)$. Тогда A^{-1} существует, $D_{A^{-1}}$ состоит из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих граничному условию

$$\alpha_4 y(0) - \alpha_2 y(1) = 0,$$

и справедлива формула

$$A^{-1} y = -\frac{1}{\delta} (E - N)^{-1} (\alpha_2 y'(x) + \alpha_4 y'(1-x)),$$

где

$$N f(x) = \int_x^1 N(x, t) f(t) dt, \quad N(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} A_2(x, t).$$

Пусть теперь $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$, $\delta \neq 0$, но $A_1(x, t) \not\equiv A_3(x, t)$. В этом случае о существовании A^{-1} ничего не известно. Кроме того, если интегрирование идет не от 0, а от $1/2$, то получаем интересный класс вольтерровых операторов. Итак, пусть

$$A f(x) = \alpha_1 \int_{1/2}^x A_1(x, t) f(t) dt + \alpha_3 \int_{1/2}^{1-x} A_3(1-x, t) f(t) dt.$$

ТЕОРЕМА 4. Если $\delta \neq 0$, то A^{-1} существует, $D_{A^{-1}}$ состоит из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих граничному условию $y(1/2) = 0$, и справедлива формула

$$A^{-1} y(x) = \beta_{11} y'(x) - \beta_{12} y'(1-x) + \int_{1/2}^x N_{1,1}(x, t) y'(t) dt + \int_{1/2}^{1-x} N_{1,2}(x, 1-t) y'(t) dt.$$

Здесь $\{\beta_{11}, \beta_{12}\}$ – первая строка матрицы B^{-1} , обратной к

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_3 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{pmatrix},$$

$N_{i,j}(x, t)$ – компоненты ядра оператора

$$N = \left(B + \int_{1/2}^x \tilde{A}'_x(x, t) dt \right)^{-1} - B^{-1}$$

в пространстве $L_2[0, 1] \times L_2[0, 1]$ и

$$\tilde{A}(x, t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 A_1(x, t) & -\alpha_3 A_3(1-x, t) \\ \alpha_3 A_3(x, t) & -\alpha_1 A_1(1-x, t) \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y(x) = Af(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 \int_{1/2}^x A_1(x, t) f(t) dt - \alpha_3 \int_{1/2}^x A_3(1-x, 1-t) f(1-t) dt, \\ y(1-x) &= \alpha_3 \int_{1/2}^x A_3(x, t) f(t) dt - \alpha_1 \int_{1/2}^x A_1(1-x, 1-t) f(1-t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Положим $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1-x)$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(1-x)$, $Y(x) = \{y_1(x), y_2(x)\}^T$, $F(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}^T$. Тогда равенства (19) запишутся следующим образом:

$$Y(x) = \int_{1/2}^x \tilde{A}(x, t) F(t) dt. \quad (20)$$

Рассмотрим (20). Прежде всего покажем, что если $f_2(x) = f_1(1-x)$, то и $y_2(x) = y_1(1-x)$. В самом деле, в этом случае

$$\begin{aligned} y_2(1-x) &= \alpha_3 \int_{1/2}^{1-x} A_3(1-x, t) f_1(t) dt - \alpha_1 \int_{1/2}^{1-x} A_1(x, 1-t) f_1(1-t) dt \\ &= -\alpha_3 \int_{1/2}^x A_3(1-x, 1-t) f_1(1-t) dt + \alpha_1 \int_{1/2}^x A_1(x, t) f(t) dt = y_1(x). \end{aligned}$$

Теперь снова посмотрим на (20) как на матричную запись (19). Тогда $Y(1/2) = 0$ и, дифференцируя (20), получаем

$$(B^{-1} + N)Y'(x) = F(x). \quad (21)$$

Первая строка (21) дает

$$\beta_{11}y'(x) - \beta_{12}y'(1-x) + \int_{1/2}^x N_{1,1}(x, t)y'(t) dt + \int_{1/2}^{1-x} N_{1,2}(x, 1-t)y'(t) dt = f(x). \quad (22)$$

Обратно, пусть имеет место (22) и $y(1/2) = 0$. Для $F(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}^T$, где $f_2(x) = f_1(1-x) = f(1-x)$, положим

$$Z(x) = \int_{1/2}^x \tilde{A}(x, t) F(t) dt.$$

Тогда обязательно $z_2(1-x) = z_1(x)$ и по-доказанному $z(x) = z_1(x)$ удовлетворяет уравнению (22) и $z(1/2) = 0$. Положим $v(x) = z(x) - y(x)$. Тогда $v(x)$ удовлетворяет (22) при $f(x) \equiv 0$. Покажем, что $v(x) \equiv 0$. Положим $w_1(x) = v'(x)$, $w_2(x) = v'(1-x)$. Тогда

$$\beta_{11}w_1(x) - \beta_{12}w_2(x) + \int_{1/2}^x N_{1,1}(x, t)w_1(t) dt - \int_{1/2}^x N_{1,2}(x, t)w_2(t) dt = 0. \quad (23)$$

Меняя в (23) x на $1-x$, придем к соотношению

$$\beta_{12}w_1(x) - \beta_{11}w_2(x) - \int_{1/2}^x N_{1,2}(1-x, 1-t)w_1(t) dt + \int_{1/2}^x N_{1,1}(1-x, 1-t)w_2(t) dt = 0. \quad (24)$$

Так как $\beta_{11}^2 - \beta_{12}^2 = \delta^{-1} \neq 0$, из (23) и (24) следует, что $w(x) \equiv 0$. А так как $v(1/2) = 0$, то и $v(x) \equiv 0$. Значит, $y(x) = Af(x)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичный результат имеет место и для оператора

$$Af(x) = \alpha_2 \int_x^{1/2} A_2(x, t)f(t) dt + \alpha_4 \int_{1-x}^{1/2} A_4(1-x, t)f(t) dt, \quad \alpha_2^2 \neq \alpha_4^2.$$

Наконец, отметим еще один результат, который доказывается аналогично теореме 2.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A_i(x, t) \equiv 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и $\delta \neq 0$. Тогда A^{-1} существует, и если $y(x) = Af(x)$, то

$$\begin{aligned} A^{-1}y(x) &= \frac{1}{\delta} ((\alpha_1 - \alpha_2)y'(x) + (\alpha_3 - \alpha_4)y'(1-x)) = f(x), \\ U(y) &= (\alpha_1 + \alpha_4)y(0) - (\alpha_2 + \alpha_3)y(1) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

и обратно.

3. Укажем на одно применение дифференциально-разностного оператора, входящего в $A^{-1}y$. Рассмотрим в $L_2[0, 1]$ следующий дифференциально-разностный оператор $\mathcal{L}$:

$$l[y] = \beta_1 y'(x) + \beta_2 y'(1-x), \quad U(y) = c_0 y(0) - d_0 y(1) = 0.$$

Выражение $l[y]$ замечательно тем, что $l^2[y] = \delta y''(x)$, где $\delta = \beta_1^2 - \beta_2^2$. Это обстоятельство позволяет исследовать квадратные корни из оператора дифференцирования второго порядка с произвольными граничными условиями

$$U_i(y) = c_i y^{(i)}(0) - d_i y^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (26)$$

Обозначим через D множество функций $y(x)$, абсолютно непрерывных вместе с первой производной, $y''(x) \in L_2[0, 1]$, удовлетворяющих граничным условиям (26).

ТЕОРЕМА 6. Для того чтобы $D = D_{\mathcal{L}^2}$ при некоторых β_1 и β_2 , причем $\delta = \beta_1^2 - \beta_2^2 \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из трех условий:

- а) $c_0^2 \neq d_0^2$, $c_1^2 \neq d_1^2$;
- б) $c_0 = d_0$, $c_1 = d_1$;
- в) $c_0 = -d_0$, $c_1 = -d_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если $y(x) \in D_{\mathcal{L}^2}$, то

$$U(y) = c_0 y(0) - d_0 y(1) = 0, \quad U(l[y]) = (c_0 \beta_1 - d_0 \beta_2)y'(0) - (d_0 \beta_1 - c_0 \beta_2)y'(1) = 0.$$

Сравнивая эти условия с (26), имеем

$$c_0 \beta_1 - d_0 \beta_2 = c_1, \quad d_0 \beta_1 - c_0 \beta_2 = d_1. \quad (27)$$

Из этих соотношений легко получаем

$$(c_0^2 - d_0^2)\delta = c_1^2 - d_1^2. \quad (28)$$

Отсюда видно, что если $c_0^2 \neq d_0^2$, то и $c_1^2 \neq d_1^2$, и обратно.

Пусть теперь $c_0^2 = d_0^2$ и $c_1^2 = d_1^2$ одновременно. В этом случае, умножая первое соотношение из (27) на d_0 , второе на c_0 и вычитая из первого второе, получим $c_1 d_0 - c_0 d_1 = 0$. Отсюда следует б) или в).

Достаточность. Пусть c_0, c_1, d_0, d_1 таковы, что выполняется одно из условий а), б) или в). Покажем, что найдутся β_1 и β_2 такие, что $\delta = \beta_1^2 - \beta_2^2 \neq 0$ и выполняются (27). Пусть сначала выполняется а). Рассмотрим систему (27). Она однозначно разрешима относительно β_1 и β_2 , и из (28) следует, что $\delta \neq 0$. Пусть теперь выполняется б). Тогда система (27) превращается в одно уравнение $c_0 \beta_1 - d_0 \beta_2 = c_1$, которое всегда разрешимо, причем неоднозначно. Поэтому всегда можно выбрать это решение так, чтобы $\delta \neq 0$. Аналогично рассматривается случай в). Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай оператора $\mathcal{L}$, когда $\mathcal{L} = A^{-1}$ из теоремы 5.

ТЕОРЕМА 7. Для того чтобы $D = D_{A^{-2}}$, где A^{-1} определяется из (25) при некоторых α_i ($i = 1, 2, 3, 4$), причем $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $c_1 + d_1 = c_0^2 - d_0^2$ и выполнялось одно из двух условий:

- а) $c_0^2 \neq d_0^2, c_1^2 \neq d_1^2$;
- б) $c_0 = -d_0, c_1 = -d_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если $y(x) = A^2 f(x)$ и $\delta \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} y''(x) &= f(x), \\ (\alpha_1 + \alpha_4)y(0) - (\alpha_2 + \alpha_3)y(1) &= 0, \\ ((\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_4))y(0) & \\ + ((\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2))y(1) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Совпадение условий (26) и (29) ведет к разрешимости относительно α_i системы

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_4 &= c_0, & \alpha_2 + \alpha_3 &= d_0, \\ (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4) &= c_1, \\ (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2) &= -d_1. \end{aligned} \quad (30)$$

Система (30) эквивалентна следующей линейной системе:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_4 &= c_0, & \alpha_2 + \alpha_3 &= d_0, \\ c_0(\alpha_1 - \alpha_2) - d_0(\alpha_3 - \alpha_4) &= c_1, & c_0(\alpha_3 - \alpha_4) - d_0(\alpha_1 - \alpha_2) &= -d_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим систему (31). Вычитая из третьего уравнения четвертое, получим

$$(c_0 + d_0)(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_3) = c_1 + d_1; \quad (32)$$

а вычитая из первого уравнения второе –

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_3 = c_0 - d_0. \quad (33)$$

Из (32) и (33) находим

$$c_0^2 - d_0^2 = c_1 + d_1. \quad (34)$$

Теперь в силу теоремы 6 должно выполняться одно из трех ее условий а), б) или в). Ясно, что условие б) и (34) противоречивы. Поэтому может выполняться лишь условие а) или в) теоремы 6.

Достаточность. Пусть теперь выполняется (34) и одно из двух условий а) или б). Положим

$$\alpha_1 + \alpha_4 = c_0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = d_0. \quad (35)$$

Тогда в силу (34) имеем (32). Потребуем дополнительно

$$c_0(\alpha_1 - \alpha_2) - d_0(\alpha_3 - \alpha_4) = c_1. \quad (36)$$

Из условия а) или б) следует, что ранг системы (35), (36) равен 3, поэтому она совместна. Из (32) и (34) получаем $d_0(\alpha_1 - \alpha_2) + c_0(\alpha_4 - \alpha_3) = d_1$. Тем самым, получаем (31). Покажем, что $\delta \neq 0$. Имеем $(c_0^2 - d_0^2)\delta = c_1^2 - d_1^2$. Поэтому в случае а) $\delta \neq 0$. Пусть теперь выполняется б). В этом случае (31) переходит в

$$\alpha_1 + \alpha_4 = c_0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = -c_0, \quad c_0(\alpha_1 - \alpha_2) + c_0(\alpha_3 - \alpha_4) = c_1.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_3 = 2c_0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = \frac{c_1}{c_0}.$$

Значит, и в этом случае $\delta = 2c_1 \neq 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $c_1 + d_1 = c_0^2 - d_0^2$ и выполняется одно из условий а) или б) теоремы 7, то функция Грина $G(x, t)$ оператора $y''(x)$ с краевыми условиями (26) существует и существуют α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) такие, что

$$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \neq 0, \quad G(x, t) = \frac{1}{\delta} \int_0^1 A(x, \tau) A(\tau, t) d\tau,$$

где $A(x, t)$ — ядро оператора (1), когда $A_i(x, t) \equiv 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть

$$l[y] = \beta_1 y'(x) + \beta_2 y'(1-x) + \beta_3 y(1-x). \quad (37)$$

Тогда $l^2[y] = \delta y''(x) + \beta_3^2 y(x)$, где $\delta = \beta_1^2 - \beta_2^2$. Обозначим через D множество функций, абсолютно непрерывных вместе с первой производной, $y''(x) \in L_2[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$U_0(y) = c_0 y(0) - d_0 y(1) = 0, \quad U_1(y) = c_1 y'(0) - d_1 y'(1) + c_2 y(0) - d_2 y(1) = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ оператор (37) с краевым условием $U_0(y) = 0$.

Аналогично теореме 6 доказывается

ТЕОРЕМА 8. Для того чтобы $D = D_{\mathcal{L}^2}$ при некоторых $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, причем $\delta \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $|c_1| + |d_1| > 0$ и выполнялось одно из трех условий а), б) или в) теоремы 6.

4. В качестве другого приложения результатов п. 1, 2 приведем следующий результат, полученный совместно с А.П. Гуревичем в [2].

ТЕОРЕМА 9. Если ядро $A(x, t)$ оператора

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x, t) f(t) dt$$

трижды непрерывно дифференцируемо по x и дважды по t ,

$$A(x, x) \equiv 1, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} A(x, t) \right|_{t=x} \equiv 0,$$

то для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$ справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 < \delta \leq x \leq 1 - \delta} |S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)| = 0,$$

где $S_r(f, x)$ – частная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для k таких, что $|\lambda_k| < r^2$ (λ_k – характеристическое число оператора A , $\sigma_r(f, x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для k таких, что $|k\pi| < r$).

Доказательство сводится к простой проверке условий теоремы 5 из [1] для ядра оператора A^2 .

Без доказательств результаты статьи частично опубликованы в [2] и [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156). № 6. С. 378–405.
- [2] Хромов А.П., Гуревич А.П. Теоремы равносходимости для одного класса интегральных операторов // Восьмая Саратовская зимняя школа. Тезисы докл. Саратов, 1996. С. 117.
- [3] Хромов А.П. Об обращении одного класса интегральных операторов // Восьмая Саратовская зимняя школа. Тезисы докл. Саратов, 1996. С. 118.

Саратовский государственный университет
E-mail: khromov@scnit.saratov.su

Поступило
05.01.97
Исправленный вариант
08.09.97