Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Жевандров, А. Е. Мерзон, Устойчивость захваченных поверхностных волн при малых возмущениях плотности верхнего слоя, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 943–946

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:58:53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАХВАЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПЛОТНОСТИ ВЕРХНЕГО СЛОЯ

П. Н. Жевандров, А. Е. Мерзон

1. Введение. Захваченные волны на поверхности тяжелой жидкости – предмет многочисленных как строгих, так и формальных исследований (см. обзор [1]). Гораздо меньше известно о захваченных волнах в двухслойной жидкости. Отметим работу [2], в которой изучаются волны, захваченные цилиндром, целиком погруженным в один из слоев. Еще меньше известно о случае, когда поверхность раздела предполагает дно или препятствия (единственная известная нам ссылка – работа [3]; в этой работе предполагается, что дно описывается медленно изменяющейся функцией). Цель нашей заметки – изучение захваченных волн в ситуации, когда плотность ρ_1 верхнего слоя мала по сравнению с плотностью ρ_2 нижнего. Оказывается, дискретный спектр для одного нижнего слоя устойчив при малых возмущениях плотности верхнего. Это утверждение является простым следствием теории возмущений после редукции задачи к операторному уравнению. В качестве иллюстрации мы рассматриваем моды Урселла (дно – наклонная плоскость), здесь удастся предъявить явные формулы как для главного члена разложения в ряд по теории возмущений, так и для поправочных членов.

2. Постановка задачи и основной результат. Пусть две жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 и границей раздела $y = 0$ заполняют полупространство $y \geq -h(x)$, где $h(0) = 0$, $h(x) > 0$ при $x > 0$, $h(x) < 0$ при $x < 0$, $h(x)$ – кусочно-гладкая функция, $h(x) \sim x \operatorname{tg} \alpha$ при $x \rightarrow 0$, а при больших $|x|$ функция $h(x)$ линейна. Будем предполагать, что движение жидкости потенциально, $\rho_l \mathbf{v}_l = \nabla \Phi_l$, $l = 1, 2$ (здесь $\mathbf{v}_l$ – поля скоростей), и будем искать решение Φ_l в виде $\Phi_l = \Phi_l(x, y) \exp i(\omega t - kz)$. Тогда система уравнений для Φ_l принимает вид (после обезразмеривания $(x, y) \mapsto (kx, ky)$):

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1 - \Phi_1 &= 0, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad \Phi_{1y} = \beta \Phi_{2y}, \quad y = 0, \\ \Phi_{1y} - \lambda^2 \Phi_1 &= \Phi_{2y} - \lambda^2 \Phi_2, \quad y = 0, \quad \Delta \Phi_2 - \Phi_2 = 0, \quad (x, y) \in \Omega_2, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= 0, \quad y = -h(x), \quad x < 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0, \quad y = -h(x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\beta = \rho_1/\rho_2$, $\lambda^2 = \omega^2(gk)^{-1}$, $\Omega_1 = \{y > \max\{-h(x), 0\}\}$, $\Omega_2 = \{0 > y > -h(x), x > 0\}$, g – ускорение свободного падения, n – внешняя нормаль. Функции Φ_l , принадлежащие пространствам Соболева $H^1(\Omega_l)$, $l = 1, 2$, называются *потенциалами захваченных волн*, а ω – их частотами. Граничные значения нормальных производных функций Φ_l понимаются в смысле распределений. Например,

$$(\Phi_{1y}|_{y=0}, \psi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\Phi_{1y}|_{y=\varepsilon}, \psi|_{y=\varepsilon})$$

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке фонда CONACYT (Мексика). Работа второго автора выполнена при частичной поддержке франко-русского центра МГУ им. А. М. Ляпунова и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00527.

для всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\psi = 0$ в некоторой окрестности нуля. Кроме того, если Φ_l таковы, что следы их нормальных производных на границах углов принадлежат пространствам L_2 , то последнее равенство справедливо для всех $\psi \in C_0^\infty$ (см. [4]).

Заметим, что такие решения существуют не всегда. Например, если Ω_l – полуплоскости (дно отсутствует), то захваченных волн нет.

Рассмотрим линейные операторы, сопоставляющие данным Неймана f на луче $x > 0$ следы решений задач

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_l - \Phi_l &= 0, & (x, y) \in \Omega_l, \\ \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} &= 0, & y = -h(x), \quad x < 0, \\ (-1)^l \frac{\partial \Phi_l}{\partial y} &= f, & y = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

на том же луче, т.е.

$$K_l : f = (-1)^l \frac{\partial \Phi_l}{\partial y} \Big|_{y=0} \mapsto K_l f \equiv \Phi_l|_{y=0}, \quad l = 1, 2.$$

Под решением задач (2) мы понимаем функции, удовлетворяющие этим задачам в смысле интегральных тождеств (см. [5], [4]) и принадлежащие $H^1(\Omega_l)$. Тогда если $f \in L_2(0, \infty)$, то решения существуют, единственны и имеют следы на $y = 0$, причем выполнены неравенства

$$\|K_l f\|_{L_2} \leq C_l \|f\|_{L_2}, \quad l = 1, 2. \quad (3)$$

Очевидно, задача (1) эквивалентна уравнению

$$(K_2 + \beta K_1)\varphi = \mu^2 \varphi, \quad \mu^2 = \frac{1-\beta}{\lambda^2}, \quad \varphi \in L_2(0, \infty). \quad (4)$$

В силу (3) операторы K_1, K_2 ограниченные и, как хорошо известно, симметричные, а тем самым и самосопряженные. Поэтому следующее утверждение является непосредственным следствием общей теоремы Като–Реллиха [6].

ТЕОРЕМА. Пусть λ_0^{-2} – невырожденное, изолированное собственное значение оператора K_2 . Тогда при достаточно малых β задача (1) разрешима при $\lambda^2 = (1-\beta)/\mu^2$, где μ^2 задается стандартным рядом Рэля–Шрёдингера для уравнения (4). В частности, $\mu^2 = \lambda_0^{-2} + \beta(\varphi_0, K_1 \varphi_0) + O(\beta^2)$, где φ_0 – нормированный собственный вектор оператора K_2 , отвечающий собственному значению λ_0^{-2} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно видеть, что операторы K_1, K_2 положительны. Поэтому частоты захваченных волн

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{1-\beta}{\lambda_0^{-2} + \beta(\varphi_0, K_1 \varphi_0) + O(\beta^2)} = \lambda_0^2(1-\beta)(1-\beta\lambda_0^2(\varphi_0, K_1 \varphi_0)) + O(\beta^2) \\ &= \lambda_0^2 - \beta\lambda_0^2(1 + \lambda_0^2(\varphi_0, K_1 \varphi_0)) + O(\beta^2) \end{aligned}$$

уменьшаются с увеличением плотности верхнего слоя.

3. Пример: волны на наклонном берегу. Пусть $h(x) = x \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha < \pi/2$. В этом случае дискретный спектр оператора K_2 известен точно: его собственные значения суть

$$\lambda_0^{-2} = (\sin(2n+1)\alpha)^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots, M(\alpha),$$

$M(\alpha)$ – наибольшее целое такое, что $(2M(\alpha) + 1)\alpha < \pi/2$ (см. [7]). Операторы K_1, K_2 задаются явными формулами. Опишем их.

Пусть $f(x) \in L_2(0, +\infty)$,

$$\hat{f}(w) = \int_0^{+\infty} e^{ix \operatorname{sh} w} f(x) dx, \quad w \in \overline{V}_1, \quad V_1 \equiv \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}.$$

В случае $w \in \partial V_1$ интеграл понимается в смысле L_2 . Очевидно, что $\hat{f}$ – аналитическая функция в V_1 . Для $s \in (-1, 1)$ определим $\hat{f}(s) = \hat{f}(w(s))$, где

$$w(s) = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{s+1}{s-1} + i\pi$$

и для логарифма выбирается главная ветвь.

Определим

$$\alpha_1 = \pi - \alpha, \quad \alpha_2 = \alpha, \quad \Pi_l = \{w \in \mathbb{C} \mid \pi - 2i\alpha_l < \operatorname{Im} w < \pi\}, \quad t(w) = \operatorname{th} \frac{\pi(w - i\pi)}{2\alpha}$$

и

$$v_l = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{(-1)^l \hat{f}(s)}{s - t(w)} ds, \quad w \in \Pi_l. \quad (5)$$

Для $\operatorname{Im} w = 0$ определим $v_l(w)$ с помощью аналитического продолжения из уравнения со сдвигом, которому удовлетворяет функция v_l :

$$v_l(w) - v_l(w - 2i\alpha) = (-1)^l \hat{f}(w), \quad w \in V_1. \quad (6)$$

Обозначим продолженную функцию тоже через $v_l(w)$.

Теперь мы можем определить операторы K_l , $l = 1, 2$:

$$K_l f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix \operatorname{sh} w} (v_l(w) - v_l(-w + i\pi)) dw. \quad (7)$$

В частности, найдем $K_1 \varphi_0$, где φ_0 – нормированный собственный вектор оператора K_2 , отвечающий собственному значению $\lambda_0^{-1} = (\sin \alpha)^{-1}$ и входящий в первую поправку для μ^2 . Так как функция $\Phi(x, y) = e^{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}$ – мода Стокса (см., например, [7]) – есть решение задачи (2) в Ω_2 с $f(x) \equiv \sin \alpha e^{-x \cos \alpha}$, $x > 0$, то функция $\varphi_0 \equiv \sqrt{2 \cos \alpha} e^{-x \cos \alpha}$, $x > 0$, имеет норму равную 1 в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ и $K_2 \varphi_0 = (\sin \alpha)^{-1} \varphi_0$. Тогда $\hat{\varphi}_0(w) = -\sqrt{2 \cos \alpha} (i \operatorname{sh} w - \cos \alpha)^{-1}$ и уравнение (6) (для $l = 1$) с $\hat{f}(w) \equiv -\hat{\varphi}_0$ в правой части разрешимо явно без использования интеграла типа Коши в (5) и решение совпадает с решением в форме (5):

$$v_1(w) = \frac{\sqrt{\cos \alpha} \operatorname{ch}(w - i\alpha)}{\sqrt{2} \sin \alpha (i \operatorname{sh}(w - i\alpha) - 1)} + \frac{i\pi \sqrt{\cos \alpha} \operatorname{th}(\pi(w - i\pi/2)/(2(\pi - \alpha)))}{\sqrt{2}(\pi - \alpha) \sin \alpha}.$$

Отсюда

$$v_1(w) - v_1(-w + i\pi) = \frac{\sqrt{2 \cos \alpha}}{\sin \alpha} \frac{\operatorname{ch} w}{i \operatorname{sh} w - \cos \alpha} + \frac{i\pi \sqrt{2 \cos \alpha}}{2(\pi - \alpha) \sin \alpha} \operatorname{th} \frac{\pi(w - i\pi/2)}{2(\pi - \alpha)}.$$

Подставляя это выражение в (7), окончательно получаем для $x > 0$

$$(K_1 \varphi_0)(x) = -\frac{\sqrt{2 \cos \alpha}}{\sin \alpha} e^{-x \cos \alpha} + \frac{i\sqrt{2 \cos \alpha}}{2(\pi - \alpha) \sin \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix \operatorname{sh} w} \operatorname{th} \frac{\pi(w - i\pi/2)}{2(\pi - \alpha)} dw.$$

Здесь интеграл для каждого $x > 0$ понимается в смысле $L_2(0, +\infty)$ после замены $z = \operatorname{sh} w$. Асимптотика интеграла в этой формуле при $x \rightarrow 0+$ вычисляется с помощью разложения гиперболического тангенса по степеням $\operatorname{sh} w$ и сведения к Γ -функции:

$$(K_1 \varphi_0)(x) \sim \xi(x) + c_1 x^p + c_2 x^{2p} + c_3 x^{3p} + \dots$$

Здесь $p = \pi/(\pi - \alpha)$, $\xi(x)$ – гладкая функция в нуле. Из этой асимптотики следует, что $(K_1 \varphi_0)(x)$ – негладкая функция в нуле при $x > 0$. Следовательно, поправка к моде Стокса есть решение задачи (2) с негладкой f . Вообще говоря, это означает, что потенциалы захваченных волн при наличии возмущения теряют гладкость (напомним, что моды Урселла – бесконечно дифференцируемые функции). Аналогичный эффект наблюдается в [8] при возмущениях дна.

Полученная формула позволяет также найти первую поправку для μ^2 равную $\beta(\varphi_0, K_1 \varphi_0)$. Выделяя мнимую часть в подынтегральном выражении и пользуясь четностью полученного выражения, имеем

$$(\varphi_0, K_1 \varphi_0) = -\frac{1}{\sin \alpha} + 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \int_0^{+\infty} \frac{(e^{2pw} - 1) \operatorname{sh} w - 2be^{pw} \cos \alpha}{(e^{2pw} + 2ae^{pw} + 1)(\cos^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 w)} dw,$$

где $a = \cos(p\pi/2)$, $b = -\sin(p\pi/2)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonnet-Ben Dhia A.-S., Joly P. // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. P. 1507–1550.
2. Kuznetsov N. // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 113–126.
3. Zhevandrov P. N. // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 4. P. 541–544.
4. Komech A. I., Merzon A. E., Zhevandrov P. N. // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 4. P. 457–485.
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1989.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
7. Ursell F. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1952. V. 214. P. 79–97.
8. Merzon A. E., Zhevandrov P. N. High-frequency asymptotics of edge waves on a beach of nonconstant slope // SIAM J. Appl. Math. (to appear).

Институт физики и математики, Университет Мичиокана (Мексика)
 Московский педагогический государственный университет
E-mail: merzon@orc.ru

Поступило
 28.04.98
 Исправленный вариант
 10.08.98