Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О поведении решений квазилинейных эллиптических неравенств, содержащих члены с младшими производными, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 946–949

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 10:07:21

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ЧЛЕНЫ С МЛАДШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. А. Коньков

Предположим, что Ω – непустое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где $a_{ij} \equiv a_{ji}$, и для некоторого вещественного числа $C > 0$ при всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ выполнено условие эллиптичности

$$0 < \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq C |\xi|^2, \quad (1)$$

а коэффициенты при младших производных b_i являются локально ограниченными функциями.

Под Q_r , B_r и S_r подразумеваем соответственно открытый, замкнутый шары и сферу радиуса $r \geq 0$ с центром в начале координат, а именно: $Q_r = \{x : |x| < r\}$, $B_r = \{x : |x| \leq r\}$, $S_r = \{x : |x| = r\}$.

Вопросы, рассматриваемые в этой статье, ранее исследовались в работах [1]–[6].

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96177.

Будем изучать (понимаемые в классическом смысле) неотрицательные решения неравенств

$$\mathcal{L}u \geq F(x, u), \quad (2)$$

где функция $F: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ монотонно не убывает по второму аргументу.

Для краткости обозначим

$$M(r; u) = \sup_{S_r \cap \Omega} u.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 \leq R_0 < R \leq \infty$, $S_{R_0} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ и пусть $\sigma > 1$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ – некоторые вещественные числа, а $b: (R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $f: (R_0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримые функции такие, что

$$\begin{aligned} b(r) &\geq \sup_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (B_{r/\sigma} \cup B_{R_0})} \sum_{i=1}^n |b_i(x)| \quad \text{для всех } r \in (R_0, \infty), \\ f(r, t) &\leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (B_{r/\sigma} \cup B_{R_0})} F(x, t) \quad \text{для всех } r \in (R_0, \infty), \quad t \in (0, \infty), \end{aligned} \quad (3)$$

причем функция f монотонно не убывает по второму аргументу и полунепрерывна слева (т.е. $f(r, t-0) = f(r, t)$ для всех $r \in (R_0, \infty)$, $t \in (0, \infty)$).

Предположим, что u является неотрицательным решением неравенства (2) в области $\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0}$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} M(R_0 + 0; u) &> 0, \quad u|_{Q_R \cap \partial\Omega \setminus B_{R_0}} = 0, \\ M(r_1; u) &\leq M(r_2; u) \quad \text{при } r_1 \leq r_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда найдутся константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$, зависящие только от n , σ , k_1 , k_2 , а также от постоянной C из неравенства (1), такие, что существует определенное на всем промежутке $[R_0, R)$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} m'' + \left(\frac{1+k_1}{r} + k_2 b(r) \right) m' &= \alpha f(r, \beta m), \\ m(R_0) &= M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

для которого при всех $r \in (R_0, R)$ выполнена оценка $M(r; u) \geq m(r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $n \geq 3$, то, полагая в теореме 1 $k_1 = n - 2$, $k_2 = 1$, получим в левой части уравнения (5) радиальную часть оператора $\Delta + b(|x|) \nabla |x| \cdot \nabla$.

Теорема 1 является следствием более общего утверждения, которое мы и приводим ниже.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда найдутся константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$, зависящие только от n , σ , k_1 , k_2 и C , такие, что для всякого $r \in (R_0, R)$

$$M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \geq \alpha \int_{R_0}^r K(r, \xi) f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi,$$

где

$$K(r, \xi) = \int_{\xi}^r d\rho \left(\frac{\xi}{\rho} \right)^{1+k_1} \exp \left(-k_2 \int_{\xi}^{\rho} b(s) ds \right).$$

Далее, если не оговорено противное, мы будем считать, что $\sigma > 1$ и $R_0 > 0$ – фиксированные вещественные числа, $S_{R_0} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$, при этом для измеримой функции $b: (R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ выполнено соотношение (3). Будем также считать, что $p: (R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – измеримые функции такие, что для всех $r \in (R_0, \infty)$ и $t \in (0, \infty)$

$$p(r)g(t) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (B_{r/\sigma} \cup B_{R_0})} F(x, t),$$

причем $g(t_1) \leq g(t_2)$, если $t_1 \leq t_2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для некоторых $k_1, k_2 \in (0, \infty)$

$$\int_{R_0}^{\infty} dr p(r) \int_r^{\infty} ds \left(\frac{r}{s}\right)^{1+k_1} \exp\left(-k_2 \int_r^s b(\rho) d\rho\right) = \infty. \quad (6)$$

Тогда если

$$\int_1^{\infty} (g(t)t)^{-1/2} dt < \infty, \quad (7)$$

то в области $\Omega \setminus B_{R_0}$ всякое неотрицательное решение неравенства (2), удовлетворяющее условию (4) и такое, что

$$u|_{\partial\Omega \setminus B_{R_0}} = 0, \quad (8)$$

тождественно равно 0.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены соотношения (6) и (7), где $k_1, k_2 \in (0, \infty)$. Тогда если в дополнение к сказанному функция $F(x, t)$ является выпуклой по t , т.е.

$$F(x, \kappa t_1 + (1 - \kappa)t_2) \leq \kappa F(x, t_1) + (1 - \kappa)F(x, t_2), \quad x \in \Omega, \quad t_1, t_2 \in (0, \infty), \quad \kappa \in [0, 1],$$

то решение задачи Дирихле

$$\mathcal{L}u = F(x, |u|) \operatorname{sign} u \quad \text{в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \psi,$$

где $\psi \in C(\partial\Omega)$, единственно (при этом никаких условий на бесконечности не предполагается).

Предположим, что $q: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ и $p: (R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримые функции такие, что

$$p(r) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (B_{r/\sigma} \cup B_{R_0})} q(x) \quad \text{для всех } r \in (R_0, \infty),$$

где $R_0 > 0$, $S_{R_0} \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$. По-прежнему считаем, что для измеримой функции $b: (R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ справедливо соотношение (3).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\lambda > 1$, и для некоторых $k_1, k_2 \in (0, \infty)$ выполнено условие (6). Тогда в области $\Omega \setminus B_{R_0}$ всякое неотрицательное решение неравенства

$$\mathcal{L}u \geq q(x)u^\lambda, \quad (9)$$

удовлетворяющее условиям (4), (8), тождественно равно 0. Более того, в этом случае решение задачи Дирихле

$$\mathcal{L}u = q(x)|u|^\lambda \operatorname{sign} u \quad \text{в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \psi, \quad (10)$$

где $\psi \in C(\partial\Omega)$, единственно.

Во всех приведенных ниже примерах $\lambda > 1$.

ПРИМЕР 1. Допустим, что коэффициенты при младших производных оператора $\mathcal{L}$ имеют в окрестности бесконечно удаленной точки не более чем степенной рост:

$$\sum_{i=1}^n |b_i(x)| \leq A|x|^k,$$

где A и k – некоторые вещественные числа. Тогда условие (6) при $k > -1$ принимает вид

$$\int_{R_0}^{\infty} r^{-k} p(r) dr = \infty,$$

а при $k \leq -1$ –

$$\int_{R_0}^{\infty} r p(r) dr = \infty.$$

В частности, если $p(r) \sim r^l$ при $r \rightarrow \infty$, то при $k > -1$ и $l \geq k - 1$ либо при $k \leq -1$ и $l \geq -2$ в области $\Omega \setminus B_{R_0}$ любое неотрицательное решение неравенства (9), удовлетворяющее условиям (4), (8), тождественно равно 0; кроме того, имеет место единственность решения задачи Дирихле (10).

В то же время, в области $\mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}$ несложно построить положительное решение неравенства

$$\Delta u + |x|^k \nabla |x| \cdot \nabla u \geq p(|x|) u^\lambda,$$

где $p(r) \sim r^l$ при $r \rightarrow \infty$, удовлетворяющее условию (4), а именно:

$$u(x) = \begin{cases} |x|^{(k-l-1)/(\lambda-1)}, & \text{если } k > -1 \text{ и } l < k - 1, \\ |x|^{(2+l)/(1-\lambda)}, & \text{если } k \leq -1 \text{ и } l < -2. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2. Пусть в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\sum_{i=1}^n |b_i(x)| \leq A |x|^k \ln^l |x|,$$

где A, k, l – некоторые вещественные числа, причем $k > -1$ либо $k = -1$ и $l > 0$. Тогда соотношение (6) принимает вид

$$\int_{R_0}^{\infty} r^{-k} \ln^{-l} r p(r) dr = \infty.$$

В частности, если $p(r) \sim r^{k-1}$ при $r \rightarrow \infty$, то в случае $l \leq 1$ в области $\Omega \setminus B_{R_0}$ любое неотрицательное решение неравенства (9), удовлетворяющее условиям (4), (8), тождественно равно 0; кроме того, имеет место единственность решения задачи Дирихле (10).

В то же время, для $l > 1$ несложно убедиться в том, что функция $u(x) = (\ln |x|)^{(l-1)/(\lambda-1)}$ является в области $\mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}$ положительным решением неравенства

$$\Delta u + |x|^k \ln^l |x| \nabla |x| \cdot \nabla u \geq p(|x|) u^\lambda,$$

где $p(r) \sim r^{k-1}$ при $r \rightarrow \infty$, удовлетворяющим соотношению (4).

Примеры 1, 2 свидетельствуют о точности условия (6).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Keller J. B. // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. № 4. P. 503–510.
2. Osserman R. // Pacific J. Math. 1957. V. 7. № 4. P. 1641–1647.
3. Vazquez J. L. // Nonlinear Anal. 1981. V. 5. P. 95–103.
4. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. // Матем. сб. 1988. Т. 135(177). № 3. С. 346–360.
5. Кондратьев В. А., Коньков А. А. // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 9. С. 81–94.
6. Kon'kov A. A. // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 1. P. 119–122.