Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Об одном новом применении многочленов Чебышева, ортогональных на равномерной сетке, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 6, 950–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:04:41

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПРИМЕНЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

И. И. Шарапудинов

1. В связи с некоторыми вопросами теории преобразований Радона К. И. Осколковым была поставлена задача об исследовании поведения величины

$$q(n, N) = \inf_{p_n \in \hat{H}_n} \sum_{j=1}^N p_n^2(j), \quad (1)$$

где $\hat{H}_n$ – множество алгебраических многочленов степени n , удовлетворяющих условию $p_n(0) = 1$. В частности, требуется найти условие на рост степени n многочлена $p_n(x)$ ($p_n(0) = 1$), которое обеспечивает стремление величины $q(n, N)$ к 0 при $N \rightarrow \infty$. Оказалось, что это условие состоит в том, что $n/\sqrt{N} \rightarrow \infty$. Причем оно окончательно в том смысле, что если $n = O(\sqrt{N})$, то $q(n, N) \geq c > 0$. Имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть a – фиксированное положительное число. Тогда если $n \leq a\sqrt{N}$, то найдется постоянная $c = c(a) > 0$, для которой

$$q(n, N) \geq c. \quad (2)$$

Если же $n/\sqrt{N} \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q(n, N) = 0; \quad (3)$$

более точно,

$$q(n, N) \leq \frac{2e^{1/24}N}{n(n-1) + 2n \exp\{3n^2/20N\}}, \quad n \leq \frac{N}{4}, \quad (4)$$

$$q(n, N) \leq \frac{32e^{1/24}}{N - 4 + 8 \exp\{3N/320\}}, \quad n > \frac{N}{4}. \quad (5)$$

2. При доказательстве теоремы нам понадобятся некоторые сведения о многочленах Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$), ортогональных на сетке $\Omega = \{0, 1, \dots, N-1\}$. Для $\alpha, \beta > -1$ положим

$$\mu(x) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \quad (6)$$

$$h_{n,N}^{\alpha, \beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (7)$$

где $a^{[0]} = 1$, $a^{[n]} = a(a-1) \cdots (a-n+1)$ ($n \geq 1$). Тогда [1]

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x) T_n^{\alpha, \beta}(x, N) T_m^{\alpha, \beta}(x, N) = \delta_{nm} h_{n,N}^{\alpha, \beta} \quad (8)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00930.

и имеет место формула

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = (-1)^n \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{[k]}(n + \alpha + \beta + 1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k + \beta + 1)k!(N - 1)^{[k]}}, \quad (9)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a + 1) \cdots (a + k - 1)$ ($k \geq 1$).

Из (8) следует, что многочлены

$$\tau_n^{\alpha, \beta}(x) = \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) = (h_{n, N}^{\alpha, \beta})^{-1/2} T_n^{\alpha, \beta}(x, N), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad (10)$$

образуют на сетке $\Omega = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ ортонормированную систему с весом $\mu(x)$, т.е.

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x) \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) \tau_m^{\alpha, \beta}(x, N) = \delta_{nm}, \quad 0 \leq n, m \leq N - 1.$$

Пусть x_0 – произвольное число, $b_n(x)$ – произвольный многочлен степени n , нормированный условием

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x) (b_n(x))^2 = 1. \quad (11)$$

Тогда максимум $(b_n(x_0))^2$ достигается для многочленов

$$b_n(x) = \varepsilon (\mathcal{K}_{n, N}^{\alpha, \beta}(x_0, x_0))^{-1/2} \mathcal{K}_{n, N}^{\alpha, \beta}(x_0, x), \quad |\varepsilon| = 1, \quad (12)$$

где

$$\mathcal{K}_{n, N}^{\alpha, \beta}(x_0, x) = \tau_0^{\alpha, \beta}(x_0) \tau_0^{\alpha, \beta}(x) + \tau_1^{\alpha, \beta}(x_0) \tau_1^{\alpha, \beta}(x) + \cdots + \tau_n^{\alpha, \beta}(x_0) \tau_n^{\alpha, \beta}(x).$$

Этот максимум равен

$$(b_n(x_0))^2 = \mathcal{K}_{n, N}^{\alpha, \beta}(x_0, x_0) = \sum_{k=0}^n (\tau_k^{\alpha, \beta}(x_0))^2. \quad (13)$$

3. Нам понадобятся некоторые оценки для величины $\mathcal{K}_{n, N}^{\alpha, \beta}(x_0, x_0)$ при $\alpha = \beta = 0$, $x_0 = -1$. Полагая $T_n(x, N) = T_n^{0, 0}(x, N)$, из (9) имеем

$$T_n(-1, N) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{[k]}(n + 1)_k (-1)^{[k]}}{k! 2^{[k]} (N - 1)^{[k]}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{n^{[k]}(n + 1)_k}{k! (N - 1)^{[k]}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |T_n(-1, N)| &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n + 1)_k}{(N - 1)^{[k]}} > \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{n}{N}\right)^k = \left(1 + \frac{n}{N}\right)^n \\ &> \exp\left\{\frac{n^2}{N} - \frac{n^3}{2N^2}\right\}, \quad n \leq N - 1. \end{aligned} \quad (14)$$

С другой стороны, из (7) имеем

$$\begin{aligned} (h_{n, N}^{\alpha, \beta})^{-1} &= \frac{(N - n) \cdots (N - 1)}{N(N + 1) \cdots (N + n - 1)} \frac{N(2n + 1)}{2(N + n)} = \frac{N(2n + 1)}{2(N + n)} \exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{n}{N + k}\right)\right\} \\ &= \frac{N(2n + 1)}{2(N + n)} \exp\left\{-\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^j}{j(N + k)^j}\right\} \\ &= \frac{N(2n + 1)}{2(N + n)} \exp\left\{-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{N + k} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{j} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(N + k)^j}\right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $j \geq 2$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(N+k)^j} < \int_0^{n-1} \frac{dx}{(N+x)^j} + \frac{1}{N^j} < \frac{1}{N^j} + \frac{1}{j-1} \left(\frac{1}{N^{j-1}} - \frac{1}{(N+n)^{j-1}} \right).$$

Отсюда и из (15) находим

$$(h_{n,N}^{0,0})^{-1} > \frac{N(2n+1)}{2(N+n)} \exp \left\{ -\frac{n^2}{N} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{j(j-1)N^{j-1}} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{jN^j} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{j(j-1)(N+n)^{j-1}} \right\}. \quad (16)$$

Далее,

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{jN^j} < \frac{1}{2} \left(\frac{n}{N} \right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n}{N} \right)^j < \frac{1}{2} \left(\frac{n}{N} \right)^2 \frac{N}{N-n} = \frac{n^2}{2N(N-n)}, \quad n \leq N-1, \quad (17)$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{j(j-1)N^{j-1}} < \frac{n^2}{N} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{n^2}{N}, \quad n \leq N-1, \quad (18)$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{j(j-1)(N+n)^{j-1}} > \frac{n^2}{2(N+n)}, \quad n \leq N-1. \quad (19)$$

Сопоставляя (16)–(19), получаем

$$(h_{n,N}^{0,0})^{-1/2} > \sqrt{\frac{N(2n+1)}{2(N+n)}} \exp \left\{ -\frac{n^2}{N} - \frac{n^2}{4N(N-n)} + \frac{n^2}{4(N+n)} \right\}. \quad (20)$$

Из (10), (14) и (20) выводим

$$|\tau_n^{0,0}(-1, N)| > \sqrt{\frac{N(2n+1)}{2(N+n)}} \exp \left\{ \frac{n^2}{4(N+n)} - \frac{n^3}{2N^2} - \frac{n^2}{4N(N-n)} \right\}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (21)$$

Из (13) и (21) мы находим следующую оценку:

$$\mathcal{K}_{n,N}^{0,0}(-1, -1) > \sum_{k=0}^n \frac{N(2k+1)}{2(N+k)} \exp \left\{ \frac{k^2}{2(N+k)} - \frac{k^3}{N^2} - \frac{k^2}{2N(N-k)} \right\}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (22)$$

Нам понадобится также оценка сверху для $\mathcal{K}_{n,N}^{0,0}(-1, -1)$ в случае $n = O(\sqrt{N})$. Из первого соотношения (14) имеем

$$\begin{aligned} |T_n(-1, N)| &< \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{2n}{N-n} \right)^k = \left(1 + \frac{2n}{N-n} \right)^n \\ &= \left(1 + \frac{2n}{N-n} \right)^{(N-n)/(2n) \cdot 2n^2/(N-n)} < e^{2n^2/(N-n)}, \end{aligned}$$

а из (15) выводим

$$(h_{n,N}^{0,0})^{-1} \leq \frac{2n+1}{2}.$$

Стало быть,

$$|\tau_n^{0,0}(-1, N)| = (h_{n,N}^{0,0})^{-1/2} |T_n^{0,0}(-1, N)| \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2}} e^{2n^2/(N-n)}. \quad (23)$$

Если число $a > 0$ фиксировано и $n \leq a\sqrt{N}$, то из (23) находим

$$\mathcal{K}_{n,N}^{0,0}(-1, -1) \leq \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} \exp \left\{ \frac{4k^2}{N-k} \right\} \leq \gamma(a)n^2, \quad (24)$$

где положительное $\gamma(a)$ зависит только от числа a .

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Положим

$$\hat{p}_n(x) = \frac{b_n(x-1)}{b_n(-1)}, \quad (25)$$

где $b_n(x)$ – многочлен, определенный равенством (12). Из свойств (11)–(13) следует, что многочлен (25) реализует нижнюю грань (1) среди всех многочленов $p_n \in \hat{H}_n$, т.е.

$$q(n, N) = \sum_{j=1}^N \hat{p}_n^2(j) = \frac{1}{b_n^2(-1)} \sum_{j=0}^{N-1} b_n^2(j) = \frac{N}{2\mathcal{K}_{n,N}^{0,0}(-1, -1)}. \quad (26)$$

Здесь мы приняли во внимание тот факт, что при $\alpha = \beta = 0$ весовая функция $\mu(x) = 2/N$ (см. (6)).

Если $n \leq a\sqrt{N}$, то из (26) и (24) имеем

$$q(n, N) \geq \frac{N}{2\gamma(a)n^2} \geq \frac{1}{2\gamma a^2} = c(a)$$

и, тем самым, оценка (2) доказана. Чтобы доказать соотношения (3)–(5) заметим, что величина $q(n, N)$ не возрастает с ростом n ; в частности, $q(n, N) = 0$ при $n \geq N$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $n \leq N/4$ и $n/\sqrt{N} \rightarrow \infty$. Итак, пусть $n \leq N/4$. Тогда для $0 \leq k \leq n$ имеем

$$\frac{k^2}{2(N+k)} - \frac{k^3}{N^2} - \frac{k^2}{2N(N-k)} \geq \frac{k^2}{2(N+N/4)} - \frac{k^2}{4N} - \frac{1}{24} = \frac{3k^2}{20N} - \frac{1}{24}.$$

Поэтому из (22) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n,N}^{0,0}(-1, -1) &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \exp\left\{\frac{3k^2}{20N} - \frac{1}{24}\right\} > \frac{1}{2e^{1/24}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k + n \exp\left\{\frac{3n^2}{20N}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{2e^{1/24}} \left(\frac{(n-1)n}{2} + n \exp\left\{\frac{3n^2}{20N}\right\}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Сопоставляя (26) и (27), приходим к оценке (4). Как уже отмечалось, $q(n, N)$ по переменной n не возрастает, значит (5) вытекает из (4). Теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нижняя оценка (2) величины $q(n, N)$ может быть получена с помощью методов работ [2] и [3]. Другой способ получения оценки (2), путем сведения рассматриваемой задачи к некоторой двойственной, автору сообщил К. И. Осолков.

Автор признателен Б. С. Кашину и К. И. Осолкову за обсуждение результатов данной заметки и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шаралудинов И. И. Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала: Изд-во ДГПУ, 1997. 2. Coppersmith D., Rivlin T. J. // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 970–983. 3. Шаралудинов И. И. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 1. С. 143–160.