Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Анохин, О проблемах равенства и сопряженности для групп вида $F/V(R)$, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 3–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:00:32

УДК 512.54.05

О ПРОБЛЕМАХ РАВЕНСТВА И СОПРЯЖЕННОСТИ ДЛЯ ГРУПП ВИДА $F/V(R)$

М. И. Анохин

Пусть F – свободная группа с конечной или счетной системой $\mathfrak{f}$ свободных порождающих, R – ее рекурсивно перечислимая относительно $\mathfrak{f}$ нормальная подгруппа, $\mathfrak{V}$ – многообразие групп, отличное от $\mathfrak{O}$ и такое, что соответствующая вербальная подгруппа V свободной группы счетного ранга рекурсивна. Доказано, что проблема равенства в $F/V(R)$ разрешима тогда и только тогда, когда она разрешима в F/R , и что если $|\mathfrak{f}| \geq 3$, то существует R такая, что проблема сопряженности в F/R разрешима, но для любого абелева многообразия $\mathfrak{V} \neq \mathfrak{E}$ эта проблема в $F/V(R)$ неразрешима (все алгоритмические проблемы понимаются относительно образов $\mathfrak{f}$ при соответствующих естественных эпиморфизмах).

Библиография: 9 названий.

1. Введение и формулировки результатов. Пусть G – группа с фиксированной конечной или счетной системой порождающих $\mathfrak{g}$, называемой *групповым алфавитом*. Под (*групповым*) *словом* в некотором алфавите $\mathfrak{g}$ мы понимаем элемент свободной группы, свободнопорожденной этим алфавитом. В алгоритмических вопросах элементы группы G будут представляться в виде слов $u(g)$ в алфавите $\mathfrak{g}$. Если не оговорено противное, запись вида $u(g)$ будет обозначать не слово в алфавите $\mathfrak{g}$, а представляемый им элемент группы G . Иногда мы будем писать вместо $u(g)$ просто u , если алфавит фиксирован или если несущественно, какой алфавит выбран.

Обозначим через $WP(G, \mathfrak{g})$ множество всех групповых слов в алфавите $\mathfrak{g}$, представляющих единицу группы G , а через $CP(G, \mathfrak{g})$ – множество всех пар слов в алфавите $\mathfrak{g}$, представляющих сопряженные в G элементы группы G . Алгоритмическая проблема вхождения в множество $WP(G, \mathfrak{g})$ ($CP(G, \mathfrak{g})$) называется *проблемой равенства (сопряженности)* группы G относительно алфавита $\mathfrak{g}$. Мы будем также называть проблемой равенства (сопряженности) само множество $WP(G, \mathfrak{g})$ ($CP(G, \mathfrak{g})$), как это делается в вопросах сводимости. Если $G = F/R$, где F – свободная группа с конечной или счетной системой $\mathfrak{f}$ свободных порождающих, а R – ее нормальная подгруппа, то в качестве алфавита группы G естественно взять образ $\mathfrak{f}$ при естественном эпиморфизме $F \rightarrow G$. Этот образ мы будем обозначать через $\mathfrak{f}R$. Подмножество M группы G с алфавитом $\mathfrak{g}$ называется *рекурсивным (рекурсивно перечислимым)* относительно $\mathfrak{g}$, если множество всех слов в $\mathfrak{g}$, представляющих элементы из M , рекурсивно (рекурсивно перечислимо). Очевидно, что $WP(F/R, \mathfrak{f}R)$ разрешима тогда и только тогда, когда R рекурсивна

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–1541.

относительно $\mathfrak{r}$. Отметим, что для конечнопорожденной группы G m -степень $WP(G, \mathfrak{g})$ ($CP(G, \mathfrak{g})$), а, следовательно, и разрешимость проблемы равенства (сопряженности), а также рекурсивность и рекурсивная перечислимость подмножеств не зависят от выбора конечного группового алфавита $\mathfrak{g}$. Поэтому в этом случае мы будем писать $WP(G)$ ($CP(G)$) и говорить о рекурсивных и рекурсивно перечислимых подмножествах без указания алфавита.

Цель настоящей работы – решить следующие вопросы В.Э. Шпильрайна, записанные под номером 12.98 в “Коуровской тетради” [1]. Пусть F – свободная группа конечного ранга, R – ее рекурсивно перечислимая нормальная подгруппа, R' – коммутант R . Верно ли, что

- (а) $WP(F/R)$ разрешима $\iff WP(F/R')$ разрешима?
- (б) $CP(F/R)$ разрешима $\iff CP(F/R')$ разрешима?
- (в) $WP(F/R')$ разрешима $\implies CP(F/R')$ разрешима?

На самом деле будут доказаны более общие утверждения, чем требуется для решения этих вопросов. Так, положительное решение (а) есть частный случай нижеследующей теоремы 1. Как сообщил В.Д. Мазуров в письме к автору, вопрос (а) был решен независимо от последнего В.А. Романьковым. На протяжении всей работы $\mathfrak{V}$ будет обозначать некоторое многообразие групп, V – соответствующую $\mathfrak{V}$ вербальную подгруппу свободной группы счетного ранга, а $V(G)$ – V -вербальную подгруппу группы G .

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – свободная группа, свободнопорожденная конечной или счетной системой $\mathfrak{r}$, R – ее рекурсивно перечислимая относительно $\mathfrak{r}$ нормальная подгруппа, $\mathfrak{V}$ – многообразие групп, отличное от многообразия всех групп и такое, что V рекурсивна относительно системы свободных порождающих (другими словами, в $\mathfrak{V}$ -свободной группе счетного ранга разрешима проблема равенства относительно системы $\mathfrak{V}$ -свободных порождающих). Тогда $WP(F/R, \mathfrak{r}R)$ разрешима $\iff WP(F/V(R), \mathfrak{r}V(R))$ разрешима.

Импликация ‘ $\implies$ ’ теоремы 1 была доказана А.Л. Шмелькиным [2, теорема 5.1]. Эта импликация не требует предположения о рекурсивной перечислимости R , так как если $WP(F/R, \mathfrak{r}R)$ разрешима, то R рекурсивна, а, значит, и рекурсивно перечислима относительно $\mathfrak{r}$. Напротив, приведенное ниже доказательство импликации ‘ $\impliedby$ ’ существенно основано на рекурсивной перечислимости R . Автору неизвестно, справедлива ли импликация ‘ $\impliedby$ ’ (а, следовательно, и теорема 1) без предположения о рекурсивной перечислимости R даже в случае, когда $\mathfrak{V}$ – какое-либо абелево многообразие. Можно лишь отметить, что если F/R не имеет кручения и $\mathfrak{V}$ абелево, то

$$WP(F/R, \mathfrak{r}R) \leq_m WP(F/V(R), \mathfrak{r}V(R)).$$

Действительно, с помощью вложения Магнуса–Шмелькина [2, теорема 2.1], [3, теорема 22.48] нетрудно убедиться, что в этом случае, если r – какой-либо фиксированный элемент $R \setminus V(R)$ и f – произвольный элемент F , то $f \in R \iff [r, f] \in V(R)$, где $[r, f] = r^{-1}f^{-1}rf$ – коммутатор r и f (если $R = V(R)$, то вышеуказанная сводимость тривиальна). Это следует из того, что если K – ассоциативное кольцо с единицей и g – элемент бесконечного порядка некоторой группы G , то $g - 1$ не является делителем нуля в групповом кольце KG . Таким образом, в случае отсутствия кручения в F/R и абелевости $\mathfrak{V}$ импликация ‘ $\impliedby$ ’ теоремы 1 верна и без предположения о рекурсивной перечислимости R .

Отрицательное решение (б) и (в) можно извлечь из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Любая свободная группа F , свободнопорожденная конечной или счетной системой $\mathfrak{x}$, такой, что $|\mathfrak{x}| \geq 3$, содержит нормальную подгруппу R такую, что $\text{CP}(F/R, \mathfrak{x}R)$ разрешима, но для любого неединичного абелева многообразия групп $\mathfrak{B}$ $\text{CP}(F/V(R), \mathfrak{x}V(R))$ неразрешима.

Действительно, если нормальная подгруппа R свободной группы F конечного ранга удовлетворяет условию теоремы 2, то $\text{WP}(F/R)$ разрешима, следовательно, R рекурсивно перечислима. Ввиду упомянутого выше результата Шмелькина (импликация ' $\implies$ ' теоремы 1) $\text{WP}(F/R')$ разрешима. Таким образом, для F и R импликация ' $\implies$ ' вопроса (б) и импликация (в) неверны. Справедлива ли импликация ' $\impliedby$ ' вопроса (б), автору неизвестно.

Автор благодарит В. Э. Шпильрайна за постановку задач и составителей "Коуровской тетради" В. Д. Мазурова и Е. И. Хухро за доставку 12-го издания этого сборника.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Как отмечено во введении, достаточно доказать лишь импликацию ' $\impliedby$ '. Пусть $\text{WP}(F/V(R), \mathfrak{x}V(R))$ разрешима, т.е. $V(R)$ рекурсивна относительно $\mathfrak{x}$. Ввиду рекурсивной перечислимости R для доказательства разрешимости $\text{WP}(F/R, \mathfrak{x}R)$ достаточно доказать рекурсивную перечислимость $F \setminus R$ относительно $\mathfrak{x}$. Можно считать, что F неабелева (иначе разрешимость $\text{WP}(F/R, \mathfrak{x}R)$ тривиальна). Пусть для $f \in F$ $\langle\langle f \rangle\rangle$ обозначает нормальное замыкание f в F , тогда

$$f \in R \iff \langle\langle f \rangle\rangle \subseteq R \iff V(\langle\langle f \rangle\rangle) \subseteq V(R) \quad (1)$$

(последняя эквивалентность верна по теореме М. А. Бронштейна о монотонности [3, теорема Д.2], [4]). Поэтому алгоритм перечисления $F \setminus R$ выглядит следующим образом. Перечисляем все $f \in F$ и для каждого такого f перечисляем все $g \in V(\langle\langle f \rangle\rangle)$ (последнее возможно ввиду рекурсивной перечислимости V). Если для некоторого $g \in V(\langle\langle f \rangle\rangle)$ $g \notin V(R)$ (что проверяется эффективно), то помещаем f в список слов $F \setminus R$. Из (1) следует, что таким способом мы перечислим все слова из $F \setminus R$ и только их. Теорема доказана.

3. Связь между проблемами степени и сопряженности. Введем некоторые обозначения. Пусть $\langle M \rangle$ – группа, порожденная множеством M , а $g^h = h^{-1}gh$, $[g, h] = h^{-1}gh = g^{-1}h^{-1}gh$, где g, h – элементы некоторой группы. Через $\mathbb{Z}$ обозначается кольцо целых чисел, а через $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных (целых положительных) чисел.

Пусть G – группа с алфавитом $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\text{PP}(G, \mathfrak{g})$ множество всех упорядоченных пар $(u(g), v(g))$ слов в алфавите $\mathfrak{g}$ таких, что слово $u(g)$ представляет элемент группы G , являющийся степенью элемента, представляемого словом $v(g)$ (другими словами, $u(g) \in \langle v(g) \rangle$ для соответствующих элементов). Проблема вхождения в множество (а также само множество) $\text{PP}(G, \mathfrak{g})$ называется *проблемой степени* группы G относительно алфавита $\mathfrak{g}$. Как и для проблем равенства и сопряженности, в случае конечнопорожденной группы G m -степень множества $\text{PP}(G, \mathfrak{g})$ не зависит от выбора конечного алфавита $\mathfrak{g}$, поэтому в этом случае мы будем писать $\text{PP}(G)$.

Пусть G, H – группы с алфавитами $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ соответственно. Отображение $\varphi: G \rightarrow H$ назовем *эффективно вычислимым* относительно алфавитов $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, если существует алгоритм, находящий по произвольному слову $u(g)$ в алфавите $\mathfrak{g}$ некоторое слово $v(h)$ в алфавите $\mathfrak{h}$, представляющее образ при φ элемента, определяемого словом $u(g)$. Очевидно, что гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ эффективно вычислим тогда и только тогда, когда по

произвольному $g \in \mathfrak{g}$ можно эффективно найти некоторое слово в алфавите $\mathfrak{h}$, представляющее $g\varphi$. В частности, если $\mathfrak{g}$ конечен, то любой гомоморфизм из G в H эффективно вычислим относительно $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$.

Группы G и H естественно назвать *эффективно изоморфными* относительно $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, если существует эффективно вычислимый относительно $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ изоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ такой, что φ^{-1} эффективно вычислим относительно $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ (такой изоморфизм мы назовем *эффективным* относительно $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$). Из сказанного выше следует, что любой изоморфизм между конечнопорожденными группами эффективен относительно произвольных конечных алфавитов. Очевидно, что если G и H эффективно изоморфны относительно $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, то проблемы равенства (сопряженности, степени) этих групп относительно вышеуказанных алфавитов m -эквивалентны и, в частности, разрешимы или неразрешимы одновременно.

Цель этого пункта – доказательство следующего утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть G – произвольная группа с алфавитом $\mathfrak{g} = \{g_i \mid i \in I\}$, где $I = \mathbb{N}$ или $\{1, \dots, n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, а F – свободная группа ранга $|\mathfrak{g}| + 1$, свободнопорожденная системой $\mathfrak{x}' = \{x_i \mid i \in I\} \cup \{y\}$. Тогда существует нормальная подгруппа R группы F такая, что F/R эффективно изоморфна G относительно алфавитов $\mathfrak{x}'R$ и $\mathfrak{g}$ и для любого неединичного абелева многообразия $\mathfrak{W}$ $\text{PP}(G, \mathfrak{g}) \leq_m \text{CP}(F/V(R), \mathfrak{x}'V(R))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве R берем ядро эпиморфизма $F \rightarrow G$, при котором $x_i \rightarrow g_i$ для $i \in I$, а $y \rightarrow 1$; тогда легко видеть, что F/R эффективно изоморфна G относительно $\mathfrak{x}'R$ и $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{W}$ – произвольное неединичное абелево многообразие, а A – $\mathfrak{W}$ -свободная группа с базисом $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cup \{b\}$, где $\mathfrak{a} = \{a_i \mid i \in I\}$. Обозначим через K факторкольцо $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, где e – экспонента многообразия $\mathfrak{W}$. Тогда A является свободным K -модулем с базисом $\mathfrak{a}'$.

Пусть H – подгруппа дискретного сплетения $A \text{ wr } G$, порожденная элементами $h_i = g_i a_i$ ($i \in I$) и b (мы считаем базу сплетения свободным правым KG -модулем с базисом $\mathfrak{a}'$, записываемым мультипликативно). Хорошо известно, что отображение $x_i V(R) \rightarrow h_i$ ($i \in I$), $yV(R) \rightarrow b$ продолжается до изоморфизма $F/V(R) \rightarrow H$ (вложение Магнуса–Шмелькина [2, теорема 2.1], [3, теорема 22.48]), который, очевидно, эффективен относительно $\mathfrak{x}'V(R)$ и $\mathfrak{h}' = \{h_i \mid i \in I\} \cup \{b\}$. Поэтому для завершения доказательства леммы достаточно доказать, что $\text{PP}(G, \mathfrak{g}) \leq_m \text{CP}(H, \mathfrak{h}')$.

Аналогично доказательству необходимости в теореме В [5], сопоставим произвольной упорядоченной паре слов $(u(g), v(g))$ в алфавите $\mathfrak{g}$ пару слов $(v(h), v(h)[u(h), b])$ в алфавите $\mathfrak{h}'$ и докажем, что для соответствующих элементов верна следующая эквивалентность:

$$u(g) \in \langle v(g) \rangle \iff v(h) \text{ и } v(h)[u(h), b] \text{ сопряжены в } H. \quad (2)$$

Ясно, что $v(h) = v(g)\alpha$, $v(h)[u(h), b] = v(g)\alpha b^{1-u(g)}$, где α – некоторый элемент KG -подмодуля L базы сплетения $A \text{ wr } G$, порожденного множеством $\mathfrak{a}$.

Если $u(g) \in \langle v(g) \rangle$, то $1 - u(g) = \beta(1 - v(g))$ для некоторого $\beta \in K\langle v(g) \rangle \subseteq KG$. Тогда $b^{-\beta}v(h)b^\beta = v(g)\alpha b^{\beta(1-v(g))} = v(g)\alpha b^{1-u(g)} = v(h)[u(h), b]$, где, очевидно, $b^\beta \in H$. Поэтому $v(h)$ сопряжен с $v(h)[u(h), b]$ в H и импликация ‘ $\implies$ ’ эквивалентности (2) доказана.

Пусть теперь $(c\gamma b^\delta)^{-1}v(h)(c\gamma b^\delta) = v(h)[u(h), b]$, где $c \in G$, $\gamma \in L$, $\delta \in KG$, $c\gamma b^\delta \in H$. Тогда непосредственные вычисления показывают, что

$$v(g)^c \alpha^c \gamma^{1-v(g)^c} b^{\delta(1-v(g)^c)} = v(g) \alpha b^{1-u(g)}.$$

В частности, $v(g)^c = v(g)$, $\delta(1 - v(g)^c) = 1 - u(g)$, следовательно,

$$\delta(1 - v(g)) = 1 - u(g). \quad (3)$$

Предположим, что $u(g) \notin \langle v(g) \rangle$. Выберем какое-либо множество представителей всех левых смежных классов G по $\langle v(g) \rangle$, содержащее 1. Тогда это множество является базисом KG как свободного правого $K\langle v(g) \rangle$ -модуля. Приравняв координаты при 1 левой и правой частей (3), получим, что $\delta_1(1 - v(g)) = 1$, где δ_1 – координата δ при 1. Но это, очевидно, невозможно: применив к обеим частям последнего равенства эпиморфизм $K\langle v(g) \rangle \rightarrow K$, действующий следующим образом:

$$\sum_j k_j v(g)^j \rightarrow \sum_j k_j, \quad \text{где } k_j \in K,$$

получим, что $0 = 1$ в кольце K ; но ввиду неединичности $\mathfrak{B}$ K – ненулевое кольцо. Следовательно, $u(g) \in \langle v(g) \rangle$ и импликация ‘ $\Leftarrow$ ’ эквивалентности (2) доказана. Таким образом, $\text{PP}(G, \mathfrak{g}) \leq_m \text{CP}(H, \mathfrak{h}')$, что и требовалось.

4. Построение группы G . Отметим, что теперь для доказательства теоремы 2 достаточно привести пример 2-порожденной группы G такой, что $\text{CP}(G)$ разрешима, но $\text{PP}(G)$ неразрешима. Действительно, если для такой группы G выбрать алфавит $\mathfrak{g}$ конечной или счетной мощности $n \geq 2$, относительно которого разрешима проблема сопряженности, но неразрешима проблема степени (например, дополнить порождающее множество из двух элементов подходящим числом единиц), и нормальную подгруппу R свободной группы F , свободнопорожденной системой $\mathfrak{x}$ из $n + 1$ элемента, согласно лемме 1, то $\text{CP}(F/R, \mathfrak{x}R)$ разрешима ввиду эффективного изоморфизма F/R и G , но для любого неединичного абелева многообразия $\mathfrak{B}$ $\text{CP}(F/V(R), \mathfrak{x}V(R))$ неразрешима, так как к ней m -сводима неразрешимая проблема степени группы G относительно $\mathfrak{g}$. Этот пункт посвящен построению n -порожденной (где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) группы G , обладающей вышеуказанными свойствами.

Фиксируем обозначения. Пусть F – свободная группа произвольного конечного ранга $n \geq 2$, свободнопорожденная элементами $x_1, \dots, x_n$, а e – произвольное достаточно большое нечетное число, при котором верны все используемые ниже утверждения из книг [6], [7]. В [6, п. 18.1] построено градуированное асферическое [6, лемма 18.2] копредставление

$$\langle b_1, \dots, b_n \mid r(b) = 1, r \in \mathcal{R} \rangle, \quad (4)$$

где $\mathcal{R}$ – бесконечное [6, теорема 19.3] подмножество F , нормальное замыкание которого в F совпадает с $F^e = \langle f^e \mid f \in F \rangle$ [6, теорема 19.7]. Таким образом, копредставление (4) задает свободную бернсайдову группу B экспоненты e , свободнопорожденную элементами $b_i = x_i F^e$, $i = 1, \dots, n$. Кроме того, согласно [6, теорема 28.5 и ее доказательство] $\mathcal{R}$ может быть выбрано рекурсивно перечислимым, что мы и будем предполагать.

Пусть $H = F/[F, F^e]$, где $[F, F^e] = \langle [f, f'] \mid f \in F, f' \in F^e \rangle$. Тогда $C = F^e/[F, F^e]$ – центральная подгруппа H , являющаяся свободной абелевой группой с базисом

$\{r[F, F^e] \mid r \in \mathcal{R}\}$ [6, теорема 31.1]. Занумеруем каким-либо эффективным образом множество $\mathcal{R}$ всеми натуральными числами без повторений; пусть r_i — i -й элемент $\mathcal{R}$ в этой нумерации. Положим $c_i = r_i[F, F^e]$ для $i \in \mathbb{N}$. Выберем какую-либо инъективную рекурсивную функцию $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такую, что $\varphi(\mathbb{N}) = M$ нерекурсивно. Обозначим через N подгруппу C , порожденную всеми $c_{2\varphi(i)-1}^i c_{2\varphi(i)}^{-1}$, где $i \in \mathbb{N}$. Тогда группа $Z = C/N$ имеет в многообразии всех абелевых групп $\mathfrak{A}$ копредставление

$$\langle z_1, z_2, \dots \mid \mathfrak{A}; z_{2\varphi(i)-1}^i = z_{2\varphi(i)}, i \in \mathbb{N} \rangle, \quad (5)$$

в котором $z_i = c_i N$. Очевидно, что

$$Z = \prod_{j=1}^{\infty} Z_j,$$

где $\prod$ — прямое произведение, а $Z_j = \langle z_{2j-1}, z_{2j} \rangle$. Аналогичное копредставление (в многообразии всех групп) встречалось в [8, пример 2], [9, доказательство теоремы 2]. В [8, пример 2] доказано, что существует алгоритм, проверяющий по произвольным $j \in \mathbb{N}$ и слову от z_{2j-1}, z_{2j} , представляет ли это слово единицу группы Z_j (другими словами, $\text{WP}(Z_j, \{z_{2j-1}, z_{2j}\})$ разрешима равномерно по $j \in \mathbb{N}$). Это следует из того, что для $k, l \in \mathbb{Z}$

$$z_{2j-1}^k z_{2j}^l = 1 \text{ в группе } G \iff \begin{cases} k = 0, & \text{если } l = 0, \\ -k/l \in \mathbb{N} \text{ и } \varphi(-k/l) = j, & \text{если } l \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому $\text{WP}(Z, \{z_1, z_2, \dots\})$ разрешима. Кроме того, если $j \in \mathbb{N} \setminus M$, то z_{2j-1}, z_{2j} $\mathfrak{A}$ -свободно порождают Z_j . Отсюда и из вида копредставления (5) следует, что для $j \in \mathbb{N}$

$$z_{2j} \in \langle z_{2j-1} \rangle \iff j \in M \quad (6)$$

(см. также [8, пример 2]).

Пусть теперь $G = H/N$, а $g_i = (x_i[F, F^e])N$, $i = 1, \dots, n$, — естественные порождающие G . Ясно, что Z — центральная подгруппа в G и

$$w(g) \rightarrow w(b) \quad (7)$$

— эпиморфизм $G \rightarrow B$ с ядром Z . На самом деле Z совпадает с центром G (так же, как C совпадает с центром H) ввиду тривиальности центра факторгруппы G/Z (H/C), изоморфной B (см. [6, теоремы 19.5, 19.1], [7, теорема 3.4]), но это нам в дальнейшем не понадобится.

ЛЕММА 2. $\text{WP}(G)$ разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(g) \in G$. Если $u(b) \neq 1$ (что проверяется эффективно ввиду разрешимости $\text{WP}(B)$ [6, теорема 28.5], [7, гл. VI, теорема 2.10]), то $u(g) \neq 1$. В противном случае $u(x) \in F^e$, следовательно, можно эффективно найти (например, перебором) некоторое представление $u(x)$ в виде $r_{i_1}^{\varepsilon_1 v_1} \dots r_{i_m}^{\varepsilon_m v_m}$, где $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $v_j \in F$. Тогда $u(g) = z_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots z_{i_m}^{\varepsilon_m}$. Утверждение леммы теперь следует из разрешимости $\text{WP}(Z, \{z_1, z_2, \dots\})$.

ЛЕММА 3. $\text{CP}(G)$ разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(g), v(g) \in G$. Если $u(b)$ и $v(b)$ не сопряжены в B (что проверяется эффективно ввиду разрешимости $\text{CP}(B)$ [6, теорема 28.5], [7, гл. VI, теорема 3.5]), то $u(g)$ и $v(g)$ не сопряжены в G . В противном случае можно эффективно найти (например, перебором) некоторый $w(b) \in B$ такой, что $u(b)^{w(b)} = v(b)$ (здесь используется разрешимость $\text{WP}(B)$). Пусть $u_1(g) = u(g)^{w(g)}$. Покажем, что

$$u(g) \text{ сопряжен с } v(g) \text{ в } G \iff u_1(g) = v(g) \text{ в } G. \quad (8)$$

Импликация ' $\Leftarrow$ ' тривиальна. Пусть теперь $u(g)$ сопряжен с $v(g)$ в G . Тогда, очевидно, $u_1(g)^{w_1(g)} = v(g)$ для некоторого $w_1(g) \in G$. Если $u_1(b) = 1$, то $u_1(g) \in Z$, следовательно, $u_1(g) = u_1(g)^{w_1(g)} = v(g)$, что и требовалось. Если же $u_1(b) \neq 1$, то централизатор $C_B(u_1(b))$ элемента $u_1(b)$ в B — циклическая подгруппа (см. [6, теоремы 19.7, 19.5], [7, гл. VI, теорема 3.2]), порожденная, скажем, элементом c . Очевидно, что $u_1(b), w_1(b) \in C_B(u_1(b))$, т.е. $u_1(b) = c^k$, $w_1(b) = c^l$. Тогда $u_1(g) \equiv c_1^k \pmod{Z}$, $w_1(g) \equiv c_1^l \pmod{Z}$, где c_1 — какой-либо прообраз c при эпиморфизме (7), следовательно, $[u_1(g), w_1(g)] = [c_1^k, c_1^l] = 1$. Поэтому $u_1(g) = u_1(g)^{w_1(g)} = v(g)$ и (8) доказано. Разрешимость $\text{CP}(G)$ теперь следует из (8) и леммы 2. Лемма доказана.

Заметим теперь, что для $j \in \mathbb{N}$ $j \in M \iff z_{2j} \in \langle z_{2j-1} \rangle \iff r_{2j}(g) \in \langle r_{2j-1}(g) \rangle$ (см. (6) и определение z_i). Поэтому $M \leq_m \text{PP}(G)$ и неразрешимость $\text{PP}(G)$ вытекает из нерекурсивности M . Таким образом, группа G обладает всеми требуемыми в начале пункта свойствами, следовательно, теорема 2 справедлива (см. начало пункта).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13.05.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мазуров В. Д., Хухро Е. И. (сост.) Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 12 изд. Новосибирск, 1992.
- [2] Шмелькин А. Л. Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 1. С. 149–170.
- [3] Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
- [4] Бронштейн М. А. О вербальных подгруппах свободных групп // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177. № 2. С. 255–257.
- [5] Matthews J. The conjugacy problem in wreath products and free metabelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 121. № 2. P. 329–339.
- [6] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
- [7] Алян С. И. Проблема Берсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
- [8] McCool J. The order problem and the power problem for free products sixth-groups // Glasgow Math. J. 1969. V. 10. № 1. P. 1–9.
- [9] McCool J. Unsolvable problems in groups with solvable word problem // Canad. J. Math. 1970. V. 22. № 4. P. 836–838.