Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, Периодические модули над общими
квантовыми лорановскими полиномами, *Матем. заметки*,
1997, том 61, выпуск 1, 10–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:37:07

УДК 512.55

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МОДУЛИ НАД ОБЩИМИ КВАНТОВЫМИ ЛОРАНОВСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

В. А. Артамонов

Указывается индукцией по числу переменных конструкция периодических конечно-порожденных модулей над общими квантовыми лорановскими многочленами.

Библиография: 12 названий.

Настоящая работа является продолжением исследований строения конечнопорожденных модулей над общими квантовыми лорановскими полиномами, начатых в [1], [2]. В [1] показано, что конечнопорожденные проективные модули ранга не меньше двух над алгеброй общих квантовых лорановских полиномов свободны. В [2] показано, что конечнопорожденные модули над общими квантовыми лорановскими полиномами разлагаются в прямую сумму периодической части, являющейся циклическим подмодулем, и конечнопорожденного проективного подмодуля. В настоящей работе доказано, что если M – конечнопорожденный периодический модуль над алгеброй общих квантовых лорановских полиномов, то можно выбрать такие переменные $X_1, \dots, X_n$, что M является конечнопорожденным проективным модулем над подалгеброй, порождаемой $X_1, \dots, X_{n-1}$ (см. теорему 2.4). Показано, что верно и обратное утверждение.

Из работ, относящихся к этой теме, можно отметить книгу [3] и работы [4]–[6], а также другие работы этих авторов последних лет.

Отметим, что квантовые полиномы играют важную роль в построении некоммутативной геометрии [7].

1. Основные конструкции. Пусть D – тело над центральным подполем k и в D заданы k -автоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где $n \geq 2$. Предположим, что заданы элементы $q_{ij} \in D^*$, $i, j = 1, \dots, n$, причем $q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = Q_{ijr}Q_{jri}Q_{rij} = 1$, где $Q_{ijr} = q_{ij}\alpha_j(q_{ir})$. Рассмотрим ассоциативную k -алгебру, порожденную элементами тела D , элементами $X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}$ и заданную определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} X_i X_i^{-1} &= X_i^{-1} X_i = 1, & i &= 1, \dots, n, \\ X_i z &= \alpha_i(z) X_i, & z &\in D, \quad i = 1, \dots, n, \\ X_i X_j &= q_{ij} X_j X_i, & i, j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–00627, фонда INTAS, грант № 93–2618, и Международного научного фонда, грант JBX100.

Эта алгебра является скрещенным произведением $A = D \sharp_t kG$, где G – свободная абелева группа с базой $X_1, \dots, X_n$, $t: kG \otimes kG \rightarrow D^*$ – некоторый 2-коцикл, причем $t(X_i, X_j)t(X_j, X_i)^{-1} = q_{ij}$ [1], [8], [3]. Кроме того, имеется слабое действие G на D , причем

$$X_i \circ z = \alpha_i(z), \quad z \in D, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Таким образом, A является свободным левым и правым D -модулем, базу которого составляют одночлены $X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$, $m_i \in \mathbb{Z}$.

Пусть N – подгруппа в мультипликативной группе D^* тела D , порожденная коммутантом $[D^*, D^*]$ и всеми элементами вида $z^{-1}\alpha_i(z)$, $z \in D^*$, $i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть H – подгруппа в D^*/N , порожденная образами всех элементов $t(g, h)t(h, g)^{-1}$, где $g, h \in G$. Тогда H порождается образами элементов q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A = D \sharp_t kG$, то в силу (1) (см. также [1], [8], [3]) получаем

$$\begin{aligned} g \circ (h \circ z) &= t(g, h)(gh \circ z)t(g, h)^{-1}, & [g \circ t(h, u)]t(g, hu) &= t(g, h)t(gh, u), \\ t(X_i, X_j) &= \begin{cases} q_{ij}, & \text{если } i \leq j, \\ 1, & \text{если } i \geq j, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где $g, h, u \in G$, $z \in D$.

Из (2) вытекает, что для $g, h \in G$, $z \in D$ по модулю N $g \circ (h \circ z) \equiv (gh) \circ z$. Отсюда $g \circ z \equiv z \pmod{N}$, ибо $X_i \circ z \equiv z \pmod{N}$. Если $g, h \in G$, то в $D \sharp_t kG$ в силу определения скрещенного произведения $(1 \sharp g)(1 \sharp h) = t(g, h) \sharp gh$. В частности,

$$\begin{aligned} (1 \sharp g)(1 \sharp h) &= t(g, h)t(g, h)^{-1}(1 \sharp h)(1 \sharp g), \\ t(X_i, X_j)t(X_j, X_i)^{-1} &= q_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, в силу (1)–(3) получаем, как и в [4], что мультипликативная подгруппа H в D^*/N , порождаемая образами $t(g, h)t(g, h)^{-1}$, $g, h \in G$, совпадает с подгруппой, порождаемой образами q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что A является *общей алгеброй квантовых лорановских полиномов*, т.е. образы элементов q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, независимы в мультипликативной абелевой группе D^*/N . Это эквивалентно тому, что подгруппа H в мультипликативной абелевой группе D^*/N имеет максимально возможный ранг, равный $n(n-1)/2$. В силу теоремы 1.1 определение общей алгебры лорановских полиномов не зависит от выбора базиса в G . Отметим, что пример алгебры общих квантовых лорановских полиномов получается, если, например, в качестве D взять поле рациональных функций $k(q_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n)$ от неизвестных q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, и в качестве автоморфизмов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ взять тождественные автоморфизмы поля $k(q_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n)$.

В силу предложения 4 [1] и следствия из него, как и в [9], получаем, что в этом случае алгебра A является простой наследственной областью размерности Крулля 1. Пусть F – тело частных алгебры A . Если M – конечнопорожденный A -модуль, то *рангом* M назовем число $r(M) = \dim_F(F \otimes_D M)$. *Периодической частью* $t(M)$ модуля M над A назовем множество всех периодических элементов в M , т.е. множество всех таких элементов из M , аннулятор которых в A отличен от нуля. Модуль M *периодический*, если $M = t(M)$. В [2] доказана

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть M – конечнопорожденный A -модуль ранга $r \geq 0$. Тогда $t(M)$ является подмодулем. Кроме того, $M = t(M) \oplus N$, где $t(M)$ – циклический артинов A -модуль, N – проективный A -модуль ранга r . Если $r = 0$, то $N = 0$. Если $r = 1$, то модуль N изоморфен левому идеалу в A . Если $r > 1$, то модуль N свободен.

Всюду в дальнейшем через $\langle g_1, \dots, g_r \rangle$ будет обозначаться подалгебра, порожденная в $A = D \#_t kG$, порожденная D и элементами $g_1^{\pm 1}, \dots, g_r^{\pm 1} \in G$. Следующее утверждение фактически доказано в [10].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – база G и f – ненулевой элемент из $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$, $r \leq n$, причем X_r входит в запись f . Тогда существуют такие натуральные числа $l_1, \dots, l_{r-1}$, и базис $Y_1, \dots, Y_n$ в G , что

$$X_i = \begin{cases} Y_i Y_r^{l_i}, & \text{если } i < r, \\ Y_i, & \text{если } i = r, \end{cases}$$

и в f как в многочлене от $Y_1, \dots, Y_r$ разные одночлены имеют разные показатели при Y_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножая f на одночлен можно считать, что показатели при всех переменных X_i неотрицательны. Пусть p – простое число, большее всех показателей по $X_1, \dots, X_r$ одночленов в f . Совершим замену переменных вида (4), где $l_i = p^i$. Получим, что каждый одночлен из f имеет вид

$$\lambda X_1^{s_1} \dots X_r^{s_r} = \lambda' Y_1^{s_1} \dots Y_{r-1}^{s_{r-1}} Y_r^{s_r + ps_1 + \dots + p^{r-1}s_{r-1}}, \quad (4)$$

где $\lambda, \lambda' \in D^*$. Предположим, что $(t_1, \dots, t_r)$ – другой набор показателей у одночлена из f , причем после той же замены переменных показатель при Y_r стал равным $s_r + ps_1 + \dots + p^{r-1}s_{r-1}$. В силу единственности p -адического разложения получаем, что $(t_1, \dots, t_r) = (s_1, \dots, s_r)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть M – некоторый A -модуль, причем в G существует такой базис $X_1, \dots, X_n$, что M является конечнопорожденным $\langle X_1, \dots, X_{n-2} \rangle$ -модулем. Тогда $M = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модуль M конечнопорожден над A . По теореме 1.2 имеем $M = t(M) \oplus N$, где $t(M)$ – периодическая часть M , а N – конечнопорожденный проективный A -модуль. Если $N \neq 0$, то модуль N либо свободен, либо изоморфен левому идеалу в A . Во всех случаях N содержит свободный циклический A -подмодуль U . Так как алгебра $\langle X_1, \dots, X_{n-2} \rangle$ нётерова слева, то U является конечнопорожденным модулем над $\langle X_1, \dots, X_{n-2} \rangle$, что неверно. Итак, $M = t(M)$, и потому модуль $M = At(M)$ является циклическим.

Пусть $j = n, n-1$. Так как $\langle X_1, \dots, X_{n-2} \rangle$ -модуль M конечнопорожден, то он нётеров. Поэтому существует такое натуральное число L , что

$$X_j^{\pm(L+1)} m \in \sum_{i=-L}^L \langle X_1, \dots, X_{n-2} \rangle X_j^i m. \quad (5)$$

Положим $I = \text{Ann}_A m$. Предположим сначала, что

$$I \cap \langle X_1, \dots, X_{n-2} \rangle \neq 0.$$

Пусть f – ненулевой элемент из этого пересечения. Если $f \notin D$, то, например, X_{n-2} входит в запись f . Совершив в силу предложения 1.3 замену $X_1, \dots, X_n \rightsquigarrow Y_1, \dots, Y_n$ переменных в G с $r = n - 2$ можно считать, что относительно $Y_1, \dots, Y_{n-2}$ разные одночлены в f имеют разные показатели при Y_{n-2} . В частности, старший и младший члены относительно Y_{n-2} имеют соответственно вид

$$aY_{n-2}^l, \quad bY_{n-2}^m, \quad l \leq m,$$

где a, b – одночлены от $Y_1, \dots, Y_{n-3}$. В силу (5) получаем, что $M = Am \simeq A/I$ является конечнопорожденным $\langle Y_1, \dots, Y_{n-3} \rangle$ -модулем. Продолжая этот процесс, выберем в G такой базис $Z_1, \dots, Z_n$, что M является конечнопорожденным $\langle Z_1, \dots, Z_d \rangle$ -модулем для некоторого $d \leq n - 2$, причем $I \cap \langle Z_1, \dots, Z_d \rangle = 0$.

Как отмечено в [9] и [1], ненулевые элементы из $\langle Z_1, \dots, Z_d \rangle$ удовлетворяют условию Оре в A . Пусть B – локализация A по этой системе. Тогда $B \otimes_A (A/I)$ является ненулевым конечномерным левым векторным пространством над телом частных $\langle Z_1, \dots, Z_d \rangle$. По [9] и предложению 4 из [1] это невозможно.

2. Левые идеалы и модули. Пусть I – ненулевой левый идеал в A и $f \in I \setminus 0$. В соответствии с предложением 1.3 в G существует такая система свободных образующих $X_1, \dots, X_n$, что разные одночлены f имеют разные показатели при X_n . Таким образом, как и в предложении 1.4, A/I является конечнопорожденным $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ -модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если $A \neq I$, то*

$$I \cap \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle = 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть g – ненулевой элемент из $[I \cap \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle] \setminus D$. Как и в предложении 1.4, совершая замену переменных, можно в G выбрать такой базис $Y_1, \dots, Y_n$, что A/I является конечнопорожденным модулем над $\langle X_1, \dots, X_{n-2} \rangle$. Но по предложению 1.4 это невозможно.

Предположим теперь, что M – ненулевой периодический A -модуль. По теореме 1.2 модуль M циклическ с образующим элементом m . Пусть $I = \text{Ann}_A m \neq 0$ и $f \in I \setminus 0$. Выберем в соответствии с предложением 1.3 для f и предложением 2.1 систему свободных образующих в G , которую мы обозначим $X_1, \dots, X_n$. Тогда M является конечнопорожденным $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ -модулем и выполнено (6). По (6) элемент m не является периодическим над $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$. Пусть N – периодическая часть M как модуля над $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *N является A -подмодулем в M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_1, z_2 \in N$ и $f_1 z_1 = f_2 z_2 = 0$, где $f_1, f_2 \in \langle X_1, \dots, X_{n-2} \rangle \setminus 0$. Ненулевые элементы из $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ удовлетворяют условию Оре в A . Поэтому существуют такие $h_1, h_2 \in \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle \setminus 0$, что $h_1 f_1 = h_2 f_2$. Отсюда $h_1 f_1 (z_1 + z_2) = 0$, т.е. $z_1 + z_2 \in N$.

Предположим, что $z \in N$ и $fz = 0$ для некоторого $f \in \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle \setminus 0$. Если $g \in A \setminus 0$, то в силу условия Оре найдутся такие $f' \in \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle \setminus 0$, $g' \in A \setminus 0$, что $f'g = g'f$. Отсюда $f'gz = g'(fz) = 0$ и $gz \in N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если N из предложения 2.2, то $N = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N \neq 0$. В силу теоремы 1.2 $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ -модуль N циклический, т.е. $N \simeq \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle / J$, где J – левый идеал в $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$. Как и выше, совершив замену переменных, можно считать, что N является конечнопорожденным $\langle X_1, \dots, X_{n-2} \rangle$ -модулем. Остается воспользоваться предложением 1.4.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть M – ненулевой периодический A -модуль. Тогда модуль M циклический и в G существует такой базис $X_1, \dots, X_n$, что M является конечнопорожденным проективным $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 1.2 и предложения 2.3.

3. Примеры. Пусть $M, X_1, \dots, X_n$ выбраны в соответствии с условиями теоремы 2.4. Положим $U = \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$. Предположим, что M как U -модуль свободен. В силу [1] это всегда так, если ранг M как U -модуля не меньше двух. Выберем базис $e = (e_1, \dots, e_r)$ – базис M как U -модуля. Тогда

$$X_n e_i = \sum_j z_{ij} e_j, \quad z_{ij} \in U.$$

Если $m \in M$, то

$$m = \sum_{j=1}^d m_j e_j, \quad m_j \in U,$$

и поэтому

$$Y_n m = \sum_{i,j=1}^d \alpha_n(m_i) a_{ij} e_j, \quad (7)$$

где α_n – продолжение на U автоморфизма α_n на D , причем $\alpha_n(X_j) = q_{nj} X_j$. Так как элемент X_n обратим в A , то $Z = (z_{ij}) \in \text{GL}(r, U)$.

Обратно, если M – свободный U -модуль с базой $e_1, \dots, e_r$ и $Z = (z_{ij}) \in \text{GL}(r, U)$, то M является A -модулем относительно умножения на X_n , задаваемого (7). Действительно, нетрудно проверить, что для всех $m \in M, z \in D$

$$X_n(zm) = \alpha_n(z)(X_n m), \quad X_n(X_j m) = \alpha_n(X_j)(X_n m).$$

Заметим, что построенный модуль M является периодическим. Действительно, A -модуль M конечнопорожден, ибо он конечнопорожден как U -модуль. Если бы он не был периодическим, то, как отмечалось выше, M содержал бы A -подмодуль H , изоморфный свободному циклическому A -модулю. Но H не является конечнопорожденным U -модулем. Получается противоречие с нётеровостью U .

Отметим, что если в M как в U -модуле выбрать другой базис e' с матрицей перехода C , где $e' = Ce$, то по (7) получаем, что матрица Z заменится на матрицу $Z' = \alpha_n(C)ZC^{-1}$.

Покажем теперь, что ранг модуля M зависит от выбора свободных образующих $X_1, \dots, X_n$. Приведем соответствующий пример. Пусть $D = k$ – поле, $n = 2$ и $\alpha_1 = \alpha_2$ – тождественный автоморфизм поля k . Предположим, что $q \in k^*$. Рассмотрим алгебру $A = k[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$, где определяющее соотношение имеет вид $XY = qYX$. В качестве модуля M рассмотрим циклический модуль $M = A/Af$, где $f = 1 + XY + X^2Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *M не является конечнопорожденным $\langle X \rangle$ -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, M является конечнопорожденным $\langle X \rangle$ -модулем. Так как модуль M нётеров над $\langle X \rangle$, то существует такое натуральное число m , что в A/Af

$$Y^m + Af = \sum_{i=0}^{m-1} (a_i(X)Y^i + Af),$$

где $a_i(X) \in \langle X \rangle$. Но тогда

$$Y^m - \sum_{i=0}^{m-1} a_i(X)Y^i \in Af.$$

Без ограничения общности, можно предполагать, что

$$Y^m - \sum_{i=0}^{m-1} a_i(X)Y^i = \sum_{i=0}^{m-1} b_i(X)Y^i(1 + XY + X^2Y). \quad (8)$$

Сравнивая коэффициенты при Y^m в обеих частях (8), получаем $1 = b_{m-1}(X)(X + X^2)$, т.е. элемент $X + X^2$ обратим в A , что неверно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Пусть p – простое нечетное число, и $X_1 = XY^{-p}$. Тогда M является свободным $\langle X_1 \rangle$ -модулем ранга $1 + 2p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства заметим, что $f = 1 + X_1Y^{1+p} + q^p X_1^2Y^{1+2p}$ является унитарным многочленом от Y степени $1 + 2p$.

Пусть M, U, A такие же, как и в начале этого раздела. Если M – проективный несвободный U -модуль, то по теореме 1.2 U -модуль M изоморфен левому идеалу в U .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *На любом ненулевом левом идеале I в U существует структура A -модуля, продолжающая структуру U -модуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено в [2], ненулевой U -модуль I порождается двумя элементами $f, g \neq 0$. Пусть S – множество всех ненулевых элементов из S . Тогда $S^{-1}I$ совпадает с телом частных U . Поэтому найдутся такие $p, q \in I \setminus 0$, что

$$\alpha_n(f)\alpha_n(g)^{-1} = pq^{-1}. \quad (9)$$

Отсюда $\alpha_n(f)^{-1}p = \alpha_n(g)^{-1}q = u \in S^{-1}I$. Если $t \in I$, то $t = af + bg$, где $a, b \in U$. При этом

$$\alpha_n(af)u + \alpha_n(bg)u = \alpha_n(a)\alpha_n(f)u + \alpha_n(b)\alpha_n(g)u = \alpha_n(a)p + \alpha_n(b)q \in I.$$

Положим

$$X_n t = \alpha_n(a)p + \alpha_n(b)q \in I. \quad (10)$$

Для того, чтобы показать, что определение (10) корректно, достаточно проверить, что если $af = bg$, то $\alpha_n(a)p = \alpha_n(b)q$. Действительно,

$$\alpha_n(a)p = \alpha_n(a)\alpha_n(f)\alpha_n(g)^{-1}q = \alpha_n(af)\alpha_n(g)^{-1}q = \alpha_n(bg)\alpha_n(g)^{-1}q = \alpha_n(b)q.$$

Отметим ряд следствий из полученных утверждений.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть M – конечнопорожденный периодический A -модуль и $X_1, \dots, X_n$ – база в G , причем M является конечнопорожденным проективным $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ -модулем. Предположим, что N – A -подмодуль в M . Тогда N и M/N являются конечнопорожденными проективными $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ -модулями. В частности, если ранг M как $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ -модуля равен 1, то M как A -модуль неприводим. Если ранг M как $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ -модуля равен r и элементы $g_1, \dots, g_r \in M$ независимы над $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$, то они порождают M как A -модуль.

Для формулировки и доказательства последнего следствия нам потребуется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть в G выбрана база $X_1, \dots, X_n$ и N – некоторый $\langle X_2, \dots, X_n \rangle$ -модуль, являющийся конечнопорожденным проективным $\langle X_2, \dots, X_{n-1} \rangle$ -модулем. Если N' – некоторый $\langle X_2, \dots, X_n \rangle$ -подмодуль в N , то естественный морфизм A -модулей

$$A \otimes_{\langle X_2, \dots, X_n \rangle} N' \rightarrow A \otimes_{\langle X_2, \dots, X_n \rangle} N$$

инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо лишь заметить, что A является проективным и поэтому плоским, правым $\langle X_2, \dots, X_n \rangle$ -модулем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Если S – модуль над алгеброй R , то через $L(S)$ обозначается решетка подмодулей в S .

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть в G выбран базис $X_1, \dots, X_n$ и $B = \langle X_2, \dots, X_n \rangle$. Предположим, что M – периодический конечнопорожденный B -модуль. Тогда сопоставление

$$\varphi: L(M) \rightarrow L(A \otimes_B M), \quad \varphi(N) = A \otimes_B N,$$

задает вложение решеток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что φ инъективно. Пусть N, N' – два B -подмодуля в M , причем

$$A \otimes_B N' = A \otimes_B N. \quad (11)$$

В этом случае $A \otimes_B N' = (A \otimes_B N') + (A \otimes_B N) = A \otimes_B (N + N')$. Таким образом, можно считать, что $N' \subseteq N$.

Предположим, что $N \neq N'$. В этом случае $N'' = N/N' \neq 0$ и по предложению 3.5 $A \otimes_B N'' \neq 0$. С другой стороны, из (11)

$$A \otimes_B N'' = A \otimes_B (N/N') \simeq (A \otimes_B N)/(A \otimes_B N') = 0.$$

Итак, отображение φ является вложением.

Так как A является проективным правым B -модулем, то по [11, с. 31–32]

$$A \otimes_B (N \cap N') = (A \otimes_B N) \cap (A \otimes_B N')$$

для любых B -подмодулей N, N' в M . Кроме того,

$$A \otimes_B (N + N') = (A \otimes_B N) + (A \otimes_B N').$$

Отметим в связи с последним следствием утверждение, по-существу доказанное в следствии 4.8 из [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Если $G, X_1, \dots, X_n, B$ как и в следствии 3.7, M – неприводимый B -модуль, то A -модуль $A \otimes_B M$ неприводим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как B -модуль M неприводим, то он конечнопорожден и по теореме 1.2 периодичен. Следовательно, A -модуль $A \otimes_B M$ конечнопорожден и периодичен. В частности, он артинов и по следствию 4.8 из [12] он неприводим.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: artamon@nw.math.msu.su

Поступило
01.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Артамонов В. А. Проективные модули над квантовыми алгебрами полиномов // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 7. С. 3–12.
- [2] Артамонов В. А. Модули над квантовыми полиномами // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 497–503.
- [3] Passman D. Infinite crossed products. San Diego: Acad. Press, 1989.
- [4] Alev J., Chamarie M. Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques // Comm. Algebra. 1992. V. 20. № 6. P. 1787–1802.
- [5] Jordan D. A. Krull and global dimensions of certain iterated skew polynomial rings // Contemp. Math. 1992. V. 130. P. 201–213.
- [6] Osborn M. J., Passman D. S. Derivations of skew polynomial rings // J. Algebra. 1995. V. 176. P. 417–448.
- [7] Демидов Е. Е. О некоторых аспектах теории квантовых групп // УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 39–74.
- [8] Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings. Conference Board of Math. Soc. V. 82. Providence: AMS, 1993.
- [9] McConnell J. C., Pettit J. J. Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras // J. London Math. Soc. 1988. V. 38. № 1. P. 47–55.
- [10] Lam T. Y. Serre's conjecture. Lecture Notes in Math. V. 635. Berlin: Springer, 1978.
- [11] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
- [12] Hodges T. J., McConnell J. C. On Ore and skew-Laurent extensions of Noetherian rings // J. Algebra. 1981. V. 73. № 1. P. 56–64.