Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Аусекле, Э. Ф. Оя, Теорема Питта для лоренцовых и орличевых пространств последовательностей, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 18–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:13:12

УДК 517.98

ТЕОРЕМА ПИТТА ДЛЯ ЛОРЕНЦОВЫХ И ОРЛИЧЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Е. А. Аусекле, Э. Ф. Оя

Пусть $L(X, Y)$ – банахово пространство всех непрерывных линейных операторов из X в Y , а $K(X, Y)$ – его подпространство компактных операторов. Устанавливаются варианты классической теоремы Питта (если $p > q$, то $K(\ell_p, \ell_q) = L(\ell_p, \ell_q)$) для подпространств лоренцовых и орличевых пространств последовательностей.

Библиография: 6 названий.

1. Пусть $L(X, Y)$ – банахово пространство всех непрерывных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y , а $K(X, Y)$ – его подпространство компактных операторов из X в Y . Пусть $1 \leq p, q < \infty$.

Согласно классической теореме Питта $K(\ell_p, \ell_q) = L(\ell_p, \ell_q)$, если $p > q$ (см., например, [1, с. 76]). Здесь пространства ℓ_p и ℓ_q могут быть заменены их произвольными подпространствами (см., например, [2, с. 129]). С другой стороны, ясно, что $K(\ell_p, \ell_q) \neq L(\ell_p, \ell_q)$, если $p \leq q$.

Одним из ближайших аналогов пространства ℓ_p считается лоренцово пространство последовательностей $d(v, p)$. Напомним его определение (см., например, [1], где можно найти все необходимые нам факты о лоренцовых пространствах последовательностей).

Пусть $v = (v_k) = (v_k)_{k=1}^{\infty}$ – такая невозрастающая последовательность положительных чисел, что $v_1 = 1, \lim v_k = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \infty.$$

Лоренцово пространство последовательностей $d(v, p)$ – это банахово пространство всех числовых последовательностей $x = (\xi_k)$, для которых конечна норма

$$\|x\| = \sup_{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k |\xi_{\pi(k)}|^p \right)^{1/p},$$

где супремум берется по всем перестановкам π натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Эстонского фонда науки, гранты № 762 и № 1381.

Пространства $d(v, p)$ и ℓ_p не являются изоморфными. Тем не менее, они обладают многими одинаковыми свойствами. Например, любое бесконечномерное подпространство пространств ℓ_p или $d(v, p)$ содержит подпространство, изоморфное ℓ_p .

Орличевы пространства последовательностей (см. определение в п. 5) являются обобщением пространств ℓ_p . Для орличевых пространств последовательностей имеет место полный аналог теоремы Питта (см. [1, с. 149], а также теорему 3 ниже и замечание 2 к ней). Однако, аналог теоремы Питта для лоренцовых пространств последовательностей (как будет показано в п. 3) верен лишь в следующей форме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X и Y – подпространства пространств $d(v, p)$ и $d(w, q)$ соответственно. Если $p > q$ и $w \notin \ell_{p/(p-q)}$, то $K(X, Y) = L(X, Y)$.

Имеет место также следующий уточняющий результат (который доказывается в п. 4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X = d(v, p)$ и $Y = d(w, q)$. Если $p > q$ и $w \in \ell_{p/(p-q)}$ или же $p \leq q$, то $K(X, Y) \neq L(X, Y)$, причем $K(X, Y)$ не является дополняемым в $L(X, Y)$.

Несколько слов об обозначениях, принятых в настоящей работе. В работе рассматриваются банаховы пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел. Подпространства банаховых пространств предполагаются замкнутыми.

Для замкнутой линейной оболочки последовательности (x_k) в X будет использоваться обозначение $[x_k]$. Через X^* обозначается, как обычно, сопряженное пространство пространства X .

И, наконец, пусть $1 < p < \infty$. Для p определяется сопряженный показатель p' так, что $1/p + 1/p' = 1$.

2. Для доказательства теорем 1 и 3 (теорема 3 формулируется в п. 5) нам понадобятся следующие ниже понятие α -доминируемости последовательностей и предложение, дающее довольно общее достаточное условие для равенства $K(X, Y) = L(X, Y)$ в случае подпространств X и Y банаховых пространств с базисами.

Пусть $\alpha = (a_k)$ – последовательность чисел и пусть (x_k) и (y_k) – последовательности в некоторых банаховых пространствах. Будем говорить, что (x_k) α -доминирует (y_k) , если существует такое число $C > 0$, что при любых $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k y_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|.$$

В этом случае будем писать $(x_k) >_{\alpha} (y_k)$.

Пусть E – банахово пространство с базисом (e_k) . Напомним, что *блок-базисом* базиса (e_k) называется последовательность элементов

$$u_k = \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} c_j e_j \neq 0, \quad (1)$$

где $0 \leq m_1 < m_2 < \dots$ и $c_j \in \mathbb{K}$. Блок-базис (u_k) является базисной последовательностью в E . Напомним еще, что последовательности (x_k) и (y_k) в некоторых банаховых пространствах называются *эквивалентными*, и пишут $(x_k) \sim (y_k)$, если

$$\left\{ (\lambda_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \text{ сходится} \right\} = \left\{ (\lambda_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y_k \text{ сходится} \right\}.$$

Если (x_k) и (y_k) – базисные последовательности, то они эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм A из $[x_k]$ на $[y_k]$ такой, что $Ax_k = y_k$, $k \in \mathbb{N}$. Весь необходимый нам материал о базисных последовательностях можно найти в [1]. В частности, нам понадобится следующий результат Бессаги–Пелчинского (см. [1, с. 7]). Каждая последовательность (x_k) в банаховом пространстве с базисом (e_k) такая, что $x_k \rightarrow 0$ слабо, но $\|x_k\| \not\rightarrow 0$, имеет подпоследовательность (x_{n_k}) , эквивалентную некоторому нормированному блок-базису базиса (e_k) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\alpha = (a_k)$ – последовательность чисел и пусть (ε_k) и (φ_k) – такие последовательности в некоторых банаховых пространствах, что (ε_k) не α -доминирует (φ_k) . Пусть, далее, E и F – банаховы пространства с такими базисами (e_k) и (f_k) соответственно, что (ε_k) α -доминирует любой нормированный блок-базис (u_k) базиса (e_k) , а любой нормированный блок-базис (v_k) базиса (f_k) имеет подпоследовательность $(v_{n_k}) >_\alpha (\varphi_k)$. Если X и Y – подпространства пространств E и F соответственно, причем X^* сепарабельно, то $K(X, Y) = L(X, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая от противного, допустим, что существует $T \in L(X, Y) \setminus K(X, Y)$. Тогда имеется последовательность $(x_k) \subset X$ такая, что $x_k \rightarrow 0$ слабо, а $\|Tx_k\| \geq C$, $k \in \mathbb{N}$, при некоторой константе $C > 0$. Поэтому $Tx_k \rightarrow 0$ слабо и $\|x_k\| \geq C/\|T\|$. Переходя к подпоследовательности последовательности (x_k) , а затем дважды в последовательности (Tx_k) , можно считать, что $(x_k) \sim (u_k)$ и $(Tx_k) \sim (v_k) >_\alpha (\varphi_k)$, где (u_k) и (v_k) – некоторые нормированные блок-базисы базисов (e_k) и (f_k) соответственно. Поскольку $(\varepsilon_k) >_\alpha (u_k) \sim (x_k) >_\alpha (Tx_k)$, то $(\varepsilon_k) >_\alpha (\varphi_k)$, что невозможно.

Пусть $(\varepsilon_k) = (e_k)$ и $(\varphi_k) = (f_k)$ – естественные базисы в пространствах $E = \ell_p$ и $F = \ell_q$ соответственно, и пусть $\alpha = (1, 1, \dots)$. Ясно, что (ε_k) не α -доминирует (φ_k) , если $p > q$. Кроме того, любой нормированный блок-базис естественного базиса в пространствах ℓ_p эквивалентен естественному базису (см., например, [1, с. 53]). Поэтому из предложения сразу вытекает теорема Питта для подпространств: если $p > q$, то $K(X, Y) = L(X, Y)$ при любых подпространствах $X \subset \ell_p$ и $Y \subset \ell_q$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть (ε_k) и (φ_k) – естественные базисы пространств ℓ_p и $d(w, q)$ соответственно. Заметим, что $p/(p - q) = (p/q)'$. Поскольку $w = (w_k) \notin \ell_{(p/q)'} = (\ell_{p/q})^*$, то существует последовательность $(a_k) \in \ell_{p/q}$, $a_1 \geq a_2 \geq \dots > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k a_k = \infty.$$

Пусть $\alpha = (a_k^{1/q})_{k=1}^{\infty}$. Допустим, что $(\varepsilon_k) >_\alpha (\varphi_k)$. Тогда при некоторой константе $C > 0$ и произвольном $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k a_k &= \left\| \sum_{k=1}^n a_k^{1/q} \varphi_k \right\|_{d(w, q)}^q \leq C \left\| \sum_{k=1}^n a_k^{1/q} \varepsilon_k \right\|_{\ell_p}^q \\ &= C \left(\sum_{k=1}^n a_k^{p/q} \right)^{q/p} \leq C \|(a_k)\|_{\ell_{p/q}}, \end{aligned}$$

что невозможно. Значит, (ε_k) не α -доминирует (φ_k) .

Поскольку $d(v, p)$ рефлексивно и сепарабельно, то $d(v, p)^*$ сепарабельно. Поэтому и X^* является сепарабельным. Итак, в силу предложения остается показать, что там за пространство E можно взять $d(v, p)$, а за пространство F взять $d(w, q)$ вместе с их естественными базисами (e_k) и $(f_k) = (\varphi_k)$ соответственно.

Хорошо известно (см., например, [1, с. 177]) и легко проверяется, что если (u_k) – нормированный блок-базис базиса (e_k) , то для любого набора чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right\|_{d(v, p)} \leq \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^p \right)^{1/p}.$$

В частности, $(\varepsilon_k) >_\alpha (u_k)$.

Теперь рассмотрим произвольный нормированный блок-базис (u_k) базиса $(f_k) = (\varphi_k) \subset d(w, q)$

$$u_k = \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} c_j \varphi_j, \quad 0 \leq m_1 < m_2 < \dots. \quad (2)$$

Возможны два случая: $c_j \rightarrow 0$ и $c_j \not\rightarrow 0$.

Если $\lim c_j = 0$, то (u_k) содержит подпоследовательность (u_{n_k}) , которая эквивалентна естественному базису пространства ℓ_q (см. [1, с. 177]). Следовательно, существует $C > 0$ такое, что для любого набора чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$C \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{n_k} \right\|_{d(w, q)} \geq \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^q \right)^{1/q} \geq \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \right\|_{d(w, q)}$$

(последнее неравенство очевидно), и, в частности, $(u_{n_k}) >_\alpha (\varphi_k)$.

Рассмотрим случай, когда $c_j \not\rightarrow 0$. Тогда $|c_{j_n}| \geq \varepsilon$ при некоторой последовательности $j_1 < j_2 < \dots$ и некотором числе $\varepsilon > 0$. Выделяя из (u_k) подпоследовательность тех (u_k) , в представлении (2) которых встречаются c_{j_n} , можем считать, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n(k) \in \{m_k + 1, \dots, m_{k+1}\} : \quad |c_{n(k)}| \geq \varepsilon.$$

Так как (φ_k) – безусловный базис с единичной безусловной базисной константой, то, в частности, при $b_k = a_k^{1/q}$ имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^n b_k u_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} c_j b_k \varphi_j \right\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \left\| \sum_{k=1}^n b_k \varphi_{n(k)} \right\| = \frac{\varepsilon}{2} \left\| \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

т.е. $(u_k) >_\alpha (\varphi_k)$. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве теоремы 1 мы использовали идеи, аналогичные примененным в доказательстве следствия 2 из [3].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 использует факт (см. [1, с. 177]), что $d(v, p)$ (и даже любое его бесконечномерное подпространство) содержит дополняемое подпространство, изоморфное ℓ_p .

Пусть $X = d(v, p)$ и $Y = d(w, q)$, где $1 \leq p, q < \infty$. Рассмотрим случай, когда $p > q$ и $w \in \ell_{p/(p-q)}$. Покажем, что $K(X, Y) \neq L(X, Y)$. Так как существует непрерывный линейный проектор из X на его подпространство, изоморфное ℓ_p , то достаточно доказать, что $K(\ell_p, Y) \neq L(\ell_p, Y)$. Применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что $(p/q)' = p/(p-q)$, для любого набора чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n w_k |\lambda_k|^q \right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{k=1}^n w_k^{(p/q)'} \right)^{1/((p/q)'q)} \left(\sum_{k=1}^n (|\lambda_k|^q)^{p/q} \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k^{p/(p-q)} \right)^{(p-q)/(pq)} \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что $\ell_p \subset Y$, и формальный единичный оператор $T: \ell_p \rightarrow Y$ является непрерывным. Однако, T не компактен, поскольку в случае естественного базиса (e_k) пространства ℓ_p имеем, что $e_k \rightarrow 0$ слабо, но $\|Te_k\| = 1 \not\rightarrow 0$.

То, что $K(X, Y) \neq L(X, Y)$, если $p \leq q$, следует из того, что $K(\ell_p, \ell_q) \neq L(\ell_p, \ell_q)$, а X и Y содержат дополняемые подпространства, изоморфные ℓ_p и ℓ_q соответственно.

Наконец, так как $K(X, Y) \neq L(X, Y)$ и Y имеет безусловный базис, то $K(X, Y)$ является недополняемым подпространством в $L(X, Y)$ (см. [4]). Теорема 2 доказана.

5. Теперь выведем из предложения (см. п. 2) аналог теоремы Питта для подпространств орличевых пространств последовательностей.

Напомним, что *функция Орлича* M — это заданная на $[0, \infty)$ непрерывная неубывающая выпуклая функция такая, что $M(0) = 0$, $M(t) > 0$ при $t > 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \infty$. *Орличево пространство последовательностей* ℓ_M определяется как совокупность всех числовых последовательностей $x = (\xi_k)$ таких, что найдется число $\rho = \rho(x) > 0$, для которого

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|\xi_k|}{\rho}\right) < \infty.$$

Пространство ℓ_M является банаховым относительно нормы

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|\xi_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}.$$

Элементы $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots$ образуют в ℓ_M симметричную базисную последовательность, т.е. симметричный базис для $h_M = [e_k] \subset \ell_M$. При этом $h_M = \ell_M$ тогда и только тогда, когда M удовлетворяет Δ_2 -условию в нуле, т.е.

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{M(2t)}{M(t)} < \infty.$$

Пусть

$$\alpha_M = \sup \left\{ p > 0 : \sup \left\{ \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda) t^p} < \infty : 0 < \lambda, t \leq 1 \right\} \right\},$$

$$\beta_M = \inf \left\{ q > 0 : \inf \left\{ \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda) t^q} > 0 : 0 < \lambda, t \leq 1 \right\} \right\}.$$

Тогда $1 \leq \alpha_M \leq \beta_M$, причем $\beta_M < \infty$ тогда и только тогда, когда M удовлетворяет Δ_2 -условию в нуле. Перечисленные, а также другие необходимые нам факты об орличевых пространствах последовательностей можно найти в [1].

Пространства ℓ_M являются обобщениями пространств ℓ_p : если взять $M(t) = t^p$, $p \geq 1$, то $\ell_M = \ell_p$. При этом, как легко показать, $\alpha_M = \beta_M = p$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X и Y – подпространства орличевых пространств h_M и ℓ_N соответственно. Если $\alpha_M > \beta_N$, то $K(X, Y) = L(X, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем числа p и q так, чтобы $\alpha_M > p > q \geq \beta_N$,

$$M(\lambda t) \leq K M(\lambda) t^p, \quad 0 < \lambda, t \leq 1, \quad (3)$$

и

$$k N(\lambda) t^q \leq N(\lambda t), \quad 0 < \lambda, t \leq 1, \quad (4)$$

при некоторых константах $k > 0$ и $K > 0$.

Пусть $\alpha = (1, 1, \dots)$ и пусть (ε_k) и (φ_k) – естественные базисы в пространствах ℓ_p и ℓ_q соответственно. Тогда (ε_k) не α -доминирует (φ_k) .

Так как $\alpha_M > 1$, то сопряженная функция M^* удовлетворяет Δ_2 -условию в нуле и, поэтому $h_M^* = \ell_{M^*}$ является сепарабельным (см. [1, с. 138, 148]). Значит, и X^* является сепарабельным. Далее, поскольку $\beta_N < \infty$, то функция N удовлетворяет Δ_2 -условию в нуле, так что $\ell_N = h_N$. Остается показать, что в предложении можно взять $E = h_M$ и $F = \ell_N$ вместе с их естественными базисами (e_k) и (f_k) соответственно.

Покажем, что для любого нормированного блок-базиса (1) базиса (e_k) существует $C > 0$ такое, что

$$\nu_n = \left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|_{\ell_M} \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right\|_{\ell_p} = C n^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

т.е. $(\varepsilon_k) >_\alpha (u_k)$.

Прежде всего заметим, что

$$\sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} M(|c_j|) = 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} M\left(\frac{|c_j|}{\nu_n}\right) = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

и $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$. Из (6) ясно, что $|c_j| \leq \gamma$, $j \in \mathbb{N}$, при некоторой константе $\gamma \geq 1$. Для доказательства (5) нам достаточно рассматривать $\nu_n \geq \gamma$. Тогда согласно (3) при всех j

$$M\left(\frac{|c_j|}{\nu_n}\right) = M\left(\frac{|c_j|}{\gamma} \frac{\gamma}{\nu_n}\right) \leq KM\left(\frac{|c_j|}{\gamma}\right) \gamma^p \nu_n^{-p} \leq K \gamma^p M(|c_j|) \nu_n^{-p},$$

и поэтому согласно (7) и (6)

$$1 \leq \sum_{k=1}^n K \gamma^p \nu_n^{-p} \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} M(|c_j|) = K \gamma^p n \nu_n^{-p},$$

откуда вытекает (5).

Аналогично доказывается (используя (4) и то, что N удовлетворяет Δ_2 -условию в нуле), что $(v_k) >_\alpha (\varphi_k)$ при любом нормированном блок-базисе (v_k) базиса (f_k) . Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 3, вообще говоря, h_M не может быть заменено пространством ℓ_M . На самом деле, пусть, например, $M(t) = e^{t-1/t}$ при $t > 0$ и $M(0) = 0$. Тогда $\alpha_M = \infty$. Так как M не удовлетворяет Δ_2 -условию в нуле, то ℓ_M содержит подпространство X , изоморфное ℓ_∞ . Пусть P – непрерывный линейный проектор из ℓ_M на X , $T: X \rightarrow \ell_\infty$ – изоморфизм и $Q \in L(\ell_\infty, \ell_2)$ – сюръекция (см., например, [1, с. 105, с. 111]). Тогда $QTP \in L(\ell_M, \ell_2) \setminus K(\ell_M, \ell_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Частный случай теоремы 3, когда M и N удовлетворяют Δ_2 -условию в нуле, $X = \ell_M = h_M$ и $Y = \ell_N = h_N$, содержится в [1, с. 149]. Там же доказано, что если M и N удовлетворяют Δ_2 -условию в нуле и $\alpha_M \leq \beta_N$, то $K(\ell_M, \ell_N) \neq L(\ell_M, \ell_N)$.

6. Пусть X и Y – рефлексивные пространства. Согласно одной теореме Н. Калтона [5] равенство $K(X, Y) = L(X, Y)$ влечет за собой рефлексивность пространства операторов $L(X, Y)$. Поэтому из теорем 1 и 3 вытекают два нижеследующих результата.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X и Y – подпространства пространств $d(v, p)$ и $d(w, q)$ соответственно. Если $p > q > 1$ и $w \in \ell_{p/(p-q)}$, то $L(X, Y)$ является рефлексивным.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X и Y – рефлексивные подпространства пространств h_M и ℓ_N соответственно. Если $\alpha_M > \beta_N$, то $L(X, Y)$ является рефлексивным.

Отметим, что h_M (или ℓ_M) является рефлексивным тогда и только тогда, когда функция M и ее сопряженная функция M^* удовлетворяют Δ_2 -условию в нуле. Это, в свою очередь, означает, что $\beta_M < \infty$ и $\alpha_M > 1$.

Хорошо известно (см., например, [6, с. 247]), что из рефлексивности пространства $K(X, Y)$ следует равенство $K(X, Y) = L(X, Y)$, если одно из пространств X или Y удовлетворяет свойству аппроксимации. Поэтому, учитывая теорему 2 и замечание 2 к теореме 3, имеем следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 3. Следующие утверждения равносильны:

- 1) $L(d(v, p), d(w, q))$ рефлексивно;
- 2) $K(d(v, p), d(w, q))$ рефлексивно;
- 3) $1 < q < p$ и $w \notin \ell_{p/(p-q)}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Следующие утверждения равносильны:

- 1) $L(\ell_M, \ell_N)$ рефлексивно;
- 2) $K(\ell_M, \ell_N)$ рефлексивно;
- 3) $1 < \alpha_N, \beta_N < \alpha_M, \beta_M < \infty$.

Следствие 4, по-видимому, известно (однако, мы не можем дать точную ссылку). Для сравнения к следствиям 3 и 4 приведем хорошо известный частный случай следствия 4 (см., например, [6, с. 248]), что $L(\ell_p, \ell_q)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда $1 < q < p < \infty$.

Авторы выражают благодарность Б. М. Макарову за внимание к работе.

Тартуский университет

E-mail: jausekle@math.ut.ee, eveoja@math.ut.ee

Поступило

28.08.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. I. Sequence spaces. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer, 1977.
- [2] Lacey E. The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer, 1974.
- [3] Oja E. On M-ideals of compact operators and Lorentz sequence spaces // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 1991. V. 40. № 1. P. 31–36.
- [4] Tong A. E., Wilken D. R. The uncomplemented subspace $K(E, F)$ // Studia Math. 1971. V. 37. № 3. P. 227–236.
- [5] Kalton N. J. Spaces of compact operators // Math. Ann. 1974. V. 208. № 4. P. 267–278.
- [6] Diestel J., Uhl J. J., Jr. Vector measures. Providence: AMS, 1977.