Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Берколайко, Об одном функционале Петре, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 26–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 07:17:17

УДК 517

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ ПЕТРЕ

Г. М. Берколайко

Для описания и изучения интерполяционных пространств вещественного метода обычно используется K -функционал Петре. В работе рассматривается его модификация – K_2 -функционал Петре

$$K_2(t, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2} \sqrt{\|\mathbf{x}_1\|_1^2 + t^2 \|\mathbf{x}_2\|_2^2}$$

как функция от t при фиксированном $\mathbf{x}$, выявляются его свойства, проводится рассмотрение некоторых частных случаев, рассматриваются классы функций, имеющих представление в виде $K_2(t)$.

Библиография: 3 названия.

Введение. Для описания и изучения интерполяционных пространств вещественного метода обычно используется K -функционал Петре

$$K(t, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2} \|\mathbf{x}_1\|_1 + t \|\mathbf{x}_2\|_2$$

(см. [1]). Однако, уже сравнительно давно стало ясно, что при рассмотрении конкретных пар удобнее использовать его модификации. Так, в частности, для гильбертовых пар естественно использовать K_2 -функционал Петре

$$K_2(t, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2} \sqrt{\|\mathbf{x}_1\|_1^2 + t^2 \|\mathbf{x}_2\|_2^2},$$

который при фиксированном значении параметра t дает гильбертову норму. Более того, в случае гильбертовых пар оказывается, что $K_2(t, \mathbf{x})$ как функция от t обладает замечательным свойством. Он является лёвнеровской функцией (см. [2]). В данной работе делается попытка выявить дополнительные свойства, которыми обладает функция $K_2(t, \mathbf{x}) = K_2(t)$ как функция от t для произвольных банаховых пар.

В первом пункте доказывается непрерывная дифференцируемость функции $K_2(t)$, что отличает ее от функции $K(t)$. Во второй и третьей частях рассматриваются частные случаи в конечномерном (нормы – максимум координат и максимум с весом) и бесконечномерном (ℓ_∞ и ℓ_∞ с весом) пространствах. В четвертой части приводятся теоремы о функциях, имеющих представление в виде K_2 -функционала.

1. Основные свойства. Пусть $\{X_1, X_2\}$ – банахова пара. Функционал

$$K_2(t, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2} \sqrt{\|\mathbf{x}_1\|_1^2 + t^2 \|\mathbf{x}_2\|_2^2}, \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_1 \in X_1$, $\mathbf{x}_2 \in X_2$, $\mathbf{x} \in X_1 + X_2$, рассматривается как функция от t при фиксированном $\mathbf{x}$.

В дальнейшем нам понадобится известная лемма о сопряженной форме K_2 -функционала (см. [1]).

ЛЕММА 1. K_2 -функционал представим в виде

$$K_2(t, \mathbf{x}) = \sup_{f \neq 0} \frac{|f(\mathbf{x})|}{(\|f\|_1^2 + t^{-2} \|f\|_2^2)^{1/2}},$$

где $f(\mathbf{x})$ – линейный функционал на $X_1 + X_2$.

С помощью сопряженной формы мы, в частности, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Функция $K_2(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $K^*(t) = (K_2(\sqrt{t}))^2$. Тогда

$$K^*(t) = \inf_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2} \|\mathbf{x}_1\|_1^2 + t \|\mathbf{x}_2\|_2^2 = \sup_{f \neq 0} \frac{|f(\mathbf{x})|^2}{\|f\|_1^2 + t^{-1} \|f\|_2^2}.$$

Как инфимум линейных функций $K^*(t)$ – вогнутая функция, следовательно, из нарушений дифференцируемости могут быть только изломы (см. [3, 1.4.3]). Пусть $K^*(t)$ терпит излом в точке t_0 . Тогда существует набор касательных $\varphi(t) = at + b$ к графику функции $K^*(t)$ в точке t_0 . Очевидно, что касательных больше, чем одна, и все они лежат над графиком $K^*(t)$. Рассмотрим преобразование $\bar{f}(t) = (f(t^{-1}))^{-1}$. Тогда

$$\bar{K}^*(t) = \inf_{f \neq 0} \frac{\|f\|_1^2}{|f(\mathbf{x})|^2} + t \frac{\|f\|_2^2}{|f(\mathbf{x})|^2} = \sup_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2} (\|\mathbf{x}_1\|_1^2 + t^{-1} \|\mathbf{x}_2\|_2^2)^{-1}.$$

Как инфимум линейных функций $\bar{K}^*(t)$ – вогнутая функция. Существует семейство касательных $\psi(t) = ct + d$ к графику $\bar{K}^*(t)$ в точке t_0 . Функции $\varphi(t)$ перешли в непрерывно дифференцируемые функции вида

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{t}{a + bt},$$

которые касаются графика $\bar{K}^*(t)$ и лежат под ним. Тогда будет выполняться $\psi(t) \geq \bar{\varphi}(t)$ и $\psi(t_0) = \bar{\varphi}(t_0)$ для любых $\psi(t)$ и $\bar{\varphi}(t)$, т.е. любая $\psi(t)$ будет касательной для любой $\bar{\varphi}(t)$, чего не может быть. Следовательно, у $K^*(t)$ нет изломов. Применяя обратное преобразование $K_2(t) = \sqrt{K^*(t^2)}$, получаем, что $K_2(t)$ непрерывно дифференцируема по t .

2. Частный случай в конечномерном пространстве. Рассмотрим нормы на пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= \max(\alpha_1|x^1|, \alpha_2|x^2|, \dots, \alpha_n|x^n|), \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \max(|x^1|, |x^2|, \dots, |x^n|).\end{aligned}$$

Очевидно, что $K_2(t, \mathbf{x}) = K_2(t, |\mathbf{x}|)$, где $|\mathbf{x}| = (|x^1|, \dots, |x^n|)$. Поэтому при вычислении $K_2(t, \mathbf{x})$ мы будем без потери общности предполагать, что $\mathbf{x} > 0$ (т.е. $x^i > 0$).

ЛЕММА 2. Пусть $\mathbf{x} > 0$. Тогда существует такое $h > 0$, что инфимум в (1) достигается при разбиении $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ на векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ вида

$$y_1^i = \begin{cases} x^i - h, & x^i \geq h, \\ 0, & x^i < h; \end{cases} \quad y_2^i = \begin{cases} h, & x^i \geq h, \\ x^i, & x^i < h. \end{cases} \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу конечномерности инфимум достигается на некотором разбиении $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Нетрудно видеть, что можно считать $\mathbf{x}_1 \geq 0$, $\mathbf{x}_2 \geq 0$. Тогда возьмем $h = \max_i(x_2^i)$ и построим соответствующее разбиение $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Очевидно, $\|\mathbf{y}_2\|_2 = h = \max_i(x_2^i) = \|\mathbf{x}_2\|_2$ и $\|\mathbf{y}_1\|_1 \leq \|\mathbf{x}_1\|_1$, так как $y_1^i \leq x_1^i$. Следовательно, $\sqrt{\|\mathbf{y}_1\|_1^2 + t_0^2\|\mathbf{y}_2\|_2^2} \leq \sqrt{\|\mathbf{x}_1\|_1^2 + t_0^2\|\mathbf{x}_2\|_2^2}$. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что оптимальное разбиение следует искать среди разбиений вида (2).

При $n = 1$ функция $K_2(t)$ преобразуется к виду

$$K_2(t) = \inf_h \sqrt{(\alpha_1(x^1 - h))^2 + t^2 h^2}. \quad (3)$$

Инфимум в (3) достигается при $h = \alpha_1^2 x^1 / (\alpha_1^2 + t^2)$ или, что то же самое,

$$t^2 = \frac{\alpha_1^2(x^1 - h)}{h}. \quad (4)$$

Поэтому

$$K_2(t) = x^1 \sqrt{\frac{\alpha_1^2 t^2}{\alpha_1^2 + t^2}}.$$

Пусть теперь $n \geq 1$. Обозначим

$$f_k(t) = \inf_h \sqrt{\alpha_k^2(x^k - h) + t^2 h^2} = x^k \sqrt{\frac{\alpha_k^2 t^2}{\alpha_k^2 + t^2}},$$

при $1 \leq k \leq n$.

Очевидно, что $K_2(t) \geq f_k(t)$. Поэтому

$$K_2(t) \geq \max_{1 \leq k \leq n} f_k(t).$$

ЛЕММА 3. Пусть гипербола $\psi(t) = \sqrt{a^2 + b^2 t^2}$ касается $f(t) = \max_{1 \leq k \leq n} f_k(t)$ и $f(t) \leq \psi(t)$ для любого t . Тогда существуют векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, $\|\mathbf{y}_1\|_1 = a$, $\|\mathbf{y}_2\|_2 = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\psi(t) = \sqrt{a^2 + b^2 t^2}$ касается $f(t)$, то она должна касаться одной из $f_k(t)$. Пусть она касается $f_i(t)$ в точке t_i . Тогда существует такое h_i , что

$$f_i(t_i) = \sqrt{\alpha_i^2 (x^i - h_i)^2 + h_i^2 t_i^2}.$$

Обозначим

$$\varphi(t) = \sqrt{\alpha_i^2 (x^i - h_i)^2 + h_i^2 t^2}.$$

Функция $\varphi(t)$ тоже касается $f_i(t)$ в точке t_i , так как $\varphi(t_i) = f_i(t_i)$ и

$$f_i(t) = \inf_h \sqrt{\alpha_i^2 (x^i - h_i)^2 + h_i^2 t^2} \leq \varphi(t).$$

Отсюда вытекает, что $\psi(t_i) = f_i(t_i) = \varphi(t_i)$ и $\psi'(t_i) = f_i'(t_i) = \varphi'(t_i)$. Поэтому гиперболы $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ совпадут, т.е. $a = \alpha_i(x^i - h_i)$, $b = h_i$.

Рассмотрим разбиение $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ вида (2) с $h = h_i$. Докажем, что $\|\mathbf{y}_1\|_1 = \alpha_i(x^i - h_i)$.

Предположим противное, т.е. что норма $\|\mathbf{y}_1\|_1$ вычисляется по другой координате: $\|\mathbf{y}_1\|_1 = \alpha_j(x^j - h_i)$. Тогда $\alpha_j(x^j - h_i) > \alpha_i(x^i - h_i)$. Рассмотрим

$$f_j(t) = \inf_h \sqrt{\alpha_j^2 (x^j - h)^2 + h^2 t^2}. \quad (5)$$

Из формулы (4) определяется такое t_j , что инфимум в (5) достигается при $h = h_i$, т.е.

$f_j(t_j) = \sqrt{\alpha_j^2 (x^j - h_i)^2 + h_i^2 t_j^2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \psi(t_j) &= \varphi(t_j) = \sqrt{\alpha_i^2 (x^i - h_i)^2 + h_i^2 t_j^2} \\ &< \sqrt{\alpha_j^2 (x^j - h_i)^2 + h_i^2 t_j^2} = f_j(t_j) \leq f(t_j). \end{aligned}$$

Получили противоречие: $\psi(t_j) < f(t_j)$. Лемма доказана.

Пусть f – произвольная положительная функция, определенная на положительной полуоси. Введем функцию на $[0, +\infty)$

$$G[f](t) = \inf \{ \varphi : \varphi = \sqrt{a^2 + b^2 t^2}, \varphi \geq f(t) \}.$$

Легко видеть, что функция $G[f](t)$ является аналогом вогнутой огибающей функции f , построенной с помощью гипербол вместо линейных функций.

Заметим, что если $f(t)$ является инфимумом гипербол, то $G[f] = f$. В частности, для любого $K_2(t, \mathbf{x})$ справедливо $G[K_2] = K_2$.

ТЕОРЕМА 2. $K_2(t, \mathbf{x}) = G(\max_{1 \leq k \leq n} f_k)(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При определении функции $G(\max_{1 \leq k \leq n} f_k)(t)$ достаточно рассматривать только те гиперболы $\varphi = \sqrt{a^2 + b^2 t^2}$, которые касаются

$$f(t) = \max_{1 \leq k \leq n} f_k(t).$$

Тогда по лемме 3 существуют векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}$, такие, что $\|\mathbf{y}_1\|_1 = a$, $\|\mathbf{y}_2\|_2 = b$. Поэтому

$$K_2(t) = \inf_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2} \sqrt{\|\mathbf{x}_1\|_1^2 + \|\mathbf{x}_2\|_2^2 t^2} \leq \sqrt{\|\mathbf{y}_1\|_1^2 + \|\mathbf{y}_2\|_2^2 t^2} = \varphi(t)$$

для любой гиперболы φ , касающейся f . Следовательно, $K_2(t) \leq G(\max_{1 \leq k \leq n} f_k)(t)$.

Проверим, что $K_2(t) \geq G(\max_{1 \leq k \leq n} f_k)(t)$. Из (4) имеем $K_2(t) \geq \max_{1 \leq k \leq n} f_k(t)$, следовательно, $K_2(t) = G[K_2](t) \geq G(\max_{1 \leq k \leq n} f_k)(t)$. Теорема доказана.

Функции вида $f_k(t)$ – это возрастающие вогнутые ограниченные функции. При взятии максимума нескольких таких функций на графике появляются изломы. Эти изломы сглаживаются гиперболами $\varphi = \sqrt{a^2 + b^2 t^2}$, причем сглаживающая гипербола единственна для каждого излома в силу того, что различные гиперболы могут пересечься лишь в одной точке на $(0, +\infty)$. Таким образом, график $K_2(t)$ представляет из себя чередование функций $f_k(t)$ и гипербол $\varphi = \sqrt{a^2 + b^2 t^2}$.

3. Частный случай в бесконечномерном пространстве. Пусть $\alpha = \{\alpha_i\}$ – последовательность положительных чисел, ℓ_∞ – пространство всех ограниченных последовательностей с нормой $\|\mathbf{x}\| = \sup_i (|x^i|)$. Обозначим через $\ell_\infty(\alpha)$ пространство последовательностей $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ таких, что $\{\alpha_i x^i\}$ – ограниченная последовательность, и норма $\|\mathbf{x}\| = \sup_i (|\alpha_i x^i|)$.

Рассмотрим пару $\{\ell_\infty(\alpha), \ell_\infty\}$, т.е. пусть

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sup(\alpha_1 |x^1|, \alpha_2 |x^2|, \dots), \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sup(|x^1|, |x^2|, \dots).$$

ЛЕММА 4. Для пары $\{\ell_\infty(\alpha), \ell_\infty\}$ выполняется

$$K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^n),$$

где $K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^n)$ – это функция $K_2(t)$, построенная по нормам

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &= \max(\alpha_1 |x^1|, \alpha_2 |x^2|, \dots, \alpha_n |x^n|), \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \max(|x^1|, |x^2|, \dots, |x^n|). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения норм вытекает, что

$$\|\{x^i\}_{i=1}^\infty\|_1 \geq \|\{x^i\}_{i=1}^n\|_1 \geq \|\{x^i\}_{i=1}^{n-1}\|_1.$$

Обозначив $\mathbf{x} = \{x^i\}_{i=1}^\infty$, $\mathbf{x}^n = \{x^i\}_{i=1}^n$, из этих неравенств получаем для разбиения $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$

$$\sqrt{\|\mathbf{x}_1^{n-1}\|_1^2 + \|\mathbf{x}_2^{n-1}\|_2^2 t^2} \leq \sqrt{\|\mathbf{x}_1^n\|_1^2 + \|\mathbf{x}_2^n\|_2^2 t^2} \leq \sqrt{\|\mathbf{x}_1\|_1^2 + \|\mathbf{x}_2\|_2^2 t^2}.$$

Отсюда следует, что $K_2(t, \mathbf{x}) \geq K_2(t, \mathbf{x}^n) \geq K_2(t, \mathbf{x}^{n-1})$. С другой стороны, применяя лемму о сопряженной форме и подставляя $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x^i$, $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{-1} |\beta_i|$, $\|f\|_2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|$ (см. [1, 2.7.1]), получим

$$K_2 = \sup_{\beta} \frac{|\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x^i|}{((\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{-1} |\beta_i|)^2 + (\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|)^2)^{1/2}}.$$

Обозначим функцию, стоящую под знаком $\sup$, через $\kappa(t, \beta)$ и соответственно $\kappa(t, \beta^n)$ будет та же функция, но суммирование не до бесконечности, а до n . Тогда по определению супремума существует такое β_0 , что $K_2(t_0, \mathbf{x}) - \kappa(t_0, \beta_0) < \varepsilon$. С другой стороны, существует такое n , что $|\kappa(t_0, \beta_0^n) - \kappa(t_0, \beta_0)| < \varepsilon$. Таким образом, получим $|K_2(t_0, \mathbf{x}) - \kappa(t_0, \beta_0^n)| < 2\varepsilon$. Так как

$$K_2(t_0, \mathbf{x}) \geq K_2(t_0, \mathbf{x}^n) = \sup_{\beta^n} \kappa(t_0, \beta^n) \geq \kappa(t_0, \beta_0^n),$$

то так же получим $|K_2(t_0, \mathbf{x}) - K_2(t_0, \mathbf{x}^n)| < 2\varepsilon$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. $K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^{\infty}) = G(\sup_{1 \leq k < \infty} f_k)(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^n) = G\left(\max_{1 \leq k \leq n} f_k\right)(t) \leq G\left(\sup_{1 \leq k < \infty} f_k\right)(t).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим

$$K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^{\infty}) \leq G\left(\sup_{1 \leq k < \infty} f_k\right)(t).$$

С другой стороны,

$$K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^{\infty}) \geq K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^n) \geq \max_{1 \leq k \leq n} f_k(t).$$

Поэтому

$$K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^{\infty}) \geq \sup_{1 \leq k < \infty} f_k(t),$$

следовательно,

$$K_2(t, \{x^i\}_{i=1}^{\infty}) \geq G\left(\sup_{1 \leq k < \infty} f_k\right)(t).$$

Теорема доказана.

4. Функции, имеющие представление в виде K_2 -функционала.

ТЕОРЕМА 4. *Любая непрерывная функция, которая может быть представлена как $f(t) = \sup_{\xi, \alpha} \xi \sqrt{\alpha^2 t^2 / (\alpha^2 + t^2)} = \inf_{c, d} \sqrt{c^2 + d^2 t^2}$ для некоторого множества A положительных параметров α, ξ, c, d , может быть получена в качестве K_2 -функционала от некоторого вектора в некоторой банаховой паре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{R}^1$ сепарабельно, рассмотрим множество $B = \{b_i\}$ – счетное всюду плотное на $\mathbb{R}^1$. Для каждого b_i найдется счетное подмножество A_i множества параметров A такое, что

$$f(b_i) = \sup_{\xi, \alpha \in A_i} \xi \sqrt{\frac{\alpha^2 b_i^2}{\alpha^2 + b_i^2}}.$$

Множество $A' = \bigcup_i A_i$ будет счетным. Перенумеруем все $\xi, \alpha \in A'$. Рассмотрим пару $\{\ell_\infty(\alpha), \ell_\infty\}$, где $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ и вектор $\mathbf{x} = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty$. Тогда получим

$$\begin{aligned} K_2(t) &= G\left(\sup_{\xi, \alpha \in A'} \xi_i \sqrt{\frac{\alpha_i^2 t^2}{\alpha_i^2 + t^2}}\right) = G\left(\sup_{\xi, \alpha \in A} \xi \sqrt{\frac{\alpha^2 t^2}{\alpha^2 + t^2}}\right) \\ &= G[f](t) = f(t) \end{aligned}$$

на множестве B , а, следовательно, и на всей полуоси, в силу непрерывности $f(t)$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает следующая теорема о возможности сведения общего случая функции $K_2(t)$ к рассмотренному выше частному.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть X_1, X_2 – банахова пара, тогда для любого $\mathbf{x} \in X_1 + X_2$ найдутся последовательности $\alpha = \{\alpha_i\}$ и $\mathbf{x}' = \{\xi_i'\}$, что*

$$K_2(t, \mathbf{x}, X_1, X_2) = K_2(t, \mathbf{x}', \ell_\infty(\alpha), \ell_\infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$K_2(t, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2} \sqrt{\|\mathbf{x}_1\|_1^2 + t^2 \|\mathbf{x}_2\|_2^2},$$

т.е.

$$K_2(t) = \inf_{c, d} \sqrt{c^2 + d^2 t^2}$$

для некоторого множества параметров c, d . С другой стороны, по лемме 1

$$K_2(t, \mathbf{x}) = \sup_{f \neq 0} \frac{|f(\mathbf{x})|}{(\|f\|_1^2 + t^{-2} \|f\|_2^2)^{1/2}} = \sup_{\xi, \alpha} \xi \sqrt{\frac{\alpha^2 t^2}{\alpha^2 + t^2}},$$

где $\xi = |f(\mathbf{x})|/\|f\|_2$, $\alpha = \|f\|_2/\|f\|_1$. Значит, функция $K_2(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Теорема доказана.

Определим функцию $L[f](t)$ как вогнутую огибающую положительной функции f :

$$L[f](t) = \inf \{\varphi = a + bt : \varphi \geq f(t)\}.$$

ТЕОРЕМА 6. Функция $F(t) = L[f](t)$, где

$$f(t) = \sup_{\xi, \alpha} \xi \sqrt{\frac{\alpha^2 t^2}{\alpha^2 + t^2}}$$

для некоторого множества положительных параметров ξ, α , может быть получена в качестве K_2 -функционала от некоторого вектора в некоторой банаховой паре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как вогнутая функция $F(t)$ может быть представлена в качестве инфимума гипербол $\varphi(t) = \sqrt{c^2 + d^2 t^2}$, и, если мы докажем, что

$$F(t) = \sup_{\zeta, \beta} \zeta \sqrt{\frac{\beta^2 t^2}{\beta^2 + t^2}} \quad (6)$$

для некоторых ζ, β , то получим искомый результат непосредственно из теоремы 4.

Рассмотрим произвольную точку t_0 . Легко видеть, что возможны два варианта: или $f(t_0) = F(t_0)$, или существуют такие $t_1, t_2, t_1 < t_0 < t_2$, что на отрезке $[t_1, t_2]$ функция $F(t)$ представляет собой линейную функцию, причем $f(t_1) = F(t_1)$ и $f(t_2) = F(t_2)$. В первом случае равенство (6) в точке t_0 выполняется автоматически. Докажем, что оно справедливо во втором случае.

Нетрудно видеть, что существуют такие ζ, β , что функция

$$g(t) = \zeta \sqrt{\frac{\beta^2 t^2}{\beta^2 + t^2}}$$

касается функции $F(t)$ снизу в точке t_0 , следовательно, $g(t_0) > f(t_0)$. С другой стороны, по свойству супремума, найдется такая функция

$$g_1(t) = \xi \sqrt{\frac{\alpha^2 t^2}{\alpha^2 + t^2}},$$

что $f(t_1) \geq g_1(t_1) > g(t_1)$. Так как уравнение $g(t) = g_1(t)$ может иметь только одно решение на полуоси $(0, +\infty)$ и оно, очевидно, лежит между t_1 и t_0 , то на промежутке $(0, t_1)$ выполнено неравенство $g(t) < g_1(t)$, и, следовательно, неравенство $g(t) < f(t) \leq F(t)$. Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что $g(t) < F(t)$ и на промежутке $(t_2, +\infty)$. Таким образом, $g(t) \leq F(t)$ на всей полуоси $(0, +\infty)$ и в точке t_0 условие (6) выполнено. Теорема доказана.

Воронежский государственный университет

Поступило
23.09.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берг Й., Лёфстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [2] Овчинников В. И. Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. №4. С. 45–54.
- [3] Бурбаки Н. Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.