Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Власов, Функционалы над пространством $C(Q, X)$,
достигающие своей нормы, *Матем. заметки*, 1997, том 61,
выпуск 1, 45–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:26:51

УДК 517.982

ФУНКЦИОНАЛЫ НАД ПРОСТРАНСТВОМ $C(Q, X)$, ДОСТИГАЮЩИЕ СВОЕЙ НОРМЫ

Л. П. Власов

В статье описываются функционалы (векторные меры) над пространством $C(Q, X)$ абстрактных непрерывных функций (Q – бикомпакт, X – банахово пространство), достигающие своей нормы на единичной сфере. Характеристика дается в терминах производной Радона–Никодима векторной меры по ее вариации и аналогов производной. Даются приложения к вопросам характеристики подпространств конечной коразмерности, обладающих свойством существования элемента наилучшего приближения. Аналогичные результаты получены для пространства $B(Q, \Sigma, X)$ равномерных пределов простых функций.

Библиография: 12 названий.

Функционалы, достигающие нормы, т.е. принимающие максимальное по модулю значение на некотором элементе единичной сферы, играют большую роль в некоторых вопросах геометрии банаховых пространств и наилучших приближений в этих пространствах [1], [2]. Г. М. Устинов и Ю. А. Шашкин [3], [4] изучали вопрос о характеристике таких функционалов над $C(Q, X)$ (и над пространством аффинных абстрактных функций). Этому посвящена и настоящая заметка. Даются приложения к проблеме характеристики подпространств существования конечной коразмерности в $C(Q, X)$, дополняющие результаты работы [5].

В статье используются обозначения: $Q = (Q, \theta)$ – бесконечный бикомпакт с топологией θ , X – банахово пространство, $n(w, w^*)$ – нормированная (слабая, слабая*) топология в X или X^* ; Σ – σ -алгебра борелевских подмножеств Q , $C = C(Q, X)$ – пространство непрерывных отображений $g: Q \rightarrow X$ с нормой $\|g\| = \sup\{\|g(t)\| : t \in Q\}$; $B = B(Q, \Sigma, X)$ – пространство равномерных пределов простых функций

$$\psi(t) = \sum x_i \chi_{e_i}(t)$$

($t \in Q$, $x_i \in X$, $e_i \in \Sigma$, χ_e – характеристическая функция множества $e \in \Sigma$, сумма конечная) с той же нормой, так что C есть подпространство B . C (а также B) предполагается вещественным (комплексным), если X вещественное (комплексное). Сопряженное пространство C^* – это пространство векторных мер μ , определенных на Σ , со значениями в X^* , с нормой $\|\mu\| = |\mu|Q$, где для $E \in \Sigma$

$$|\mu|E = \text{var}(\mu, E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\mu e_i\|_{X^*} : e_i \in \Sigma, e_i \subset E, e_i \cap e_j = \emptyset, n \in \mathbb{N} \right\},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–00196.

мера $|\mu|$ предполагается конечной и регулярной, а $\langle g, \mu \rangle = \int_Q \langle g(t), d\mu \rangle$ – интеграл Гавурина, определяемый для простых функций как $\sum \langle x_i, \mu e_i \rangle$ и продолжаемый по непрерывности на все B (см. [6]). Отметим неравенства

$$\left| \int_E \langle g(t), d\mu \rangle \right| \leq \int_E \|g(t)\| d|\mu| \leq \|g\|'_E |\mu| E,$$

где $E \in \Sigma$, $g \in B$, $\|g\|'_E = |\mu| - \text{ess sup}\{\|g(t)\| : t \in E\}$.

В последующем множества E , e , e_i предполагаются борелевскими, т.е. из Σ . Через $\text{Re } \mu$ обозначается вещественный функционал такой, что $\forall g \in B \quad \langle g, \text{Re } \mu \rangle = \text{Re} \langle g, \mu \rangle$. Функция $\dot{\mu} \in L^1(Q, \Sigma, |\mu|, X^*)$, определяемая соотношением $\forall e \in \Sigma$

$$\mu e = \int_e \dot{\mu} d|\mu| = \int_e \dot{\mu}(t) |\mu| (dt)$$

(интеграл Бохнера), называется *производной Радона–Никодима векторной меры μ по ее вариации $|\mu|$* и обозначается $d\mu/d|\mu|$ (см. [1]). Нам понадобится также аналог производной Радона–Никодима в следующей форме (ср. [7, гл. VI]). Будем обозначать через μ' функцию из Q в X^* такую, что числовая функция $t \rightarrow \langle x, \mu'(t) \rangle$ является $|\mu|$ -интегрируемой для любого $x \in X$ и

$$\forall e \in \Sigma, \quad \forall x \in X \quad \langle x, \mu e \rangle = \int_e \langle x, \mu'(t) \rangle d|\mu|.$$

Производная $\dot{\mu}$ определяется однозначно с точностью до множества меры нуль (т.е. множества e с $|\mu|e = 0$), чего нельзя сказать о μ' (см. [7, гл. VI, § 1, упр. 12]). Из равенства

$$\left\langle x, \int_e f(t) d|\mu| \right\rangle = \int_e \langle x, f(t) \rangle d|\mu|$$

(см. [8, теорема III.6.20, с. 170], f – интегрируемая функция) следует, что $\dot{\mu}$ есть одна из функций μ' , а если μ' измерима, то $\mu'(t) = \dot{\mu}(t) \quad \forall t$ (т.е. $|\mu|$ -п.в.).

Для атомической меры μ имеем $\mu' = \dot{\mu}$ и $\forall t$ с $\mu\{t\} \neq 0$

$$\dot{\mu}(t) = \frac{\mu\{t\}}{\|\mu\{t\}\|}.$$

Через S_μ обозначается носитель меры μ , т.е. наименьшее замкнутое множество $F \subset Q$ со свойством $|\mu|(Q \setminus F) = 0$; $\mathbf{S} = \mathbf{S}_X$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_X$ – единичные сфера и шар в X ; $\mathbf{S}^*$, $\mathbf{V}^*$ – то же в X^* ; $\Gamma_f = \{x \in \mathbf{S} : f(x) = 1\}$, где $f \in \mathbf{S}^*$; $\text{att } \mathbf{S}^* = \{f \in \mathbf{S}^* : \Gamma_f \neq \emptyset\}$ – множество функционалов из $\mathbf{S}^*$, достигающих нормы на $\mathbf{S}$; со A – выпуклая оболочка, $w^* - \text{cl } A$ – w^* -замыкание множества $A \subset X^*$; $t_\alpha(f_\alpha, e_\alpha)$ – направленности в Q (X^* , 2^Q); $\theta - \text{Ls } t_\alpha$ или просто $\text{Ls } t_\alpha$ – множество всех предельных точек направленности t_α ; аналогичны обозначения $w^* - \text{Ls } f_\alpha$,

$$w^* - \text{Ls } \xi(e) = \bigcup_{e_\alpha: e_\alpha \rightarrow t} w^* - \text{Ls } \xi(e_\alpha),$$

где $\xi: \Sigma \rightarrow X^*$ (см. ниже); $\alpha_n \sim \beta_n$ означает $\alpha_n - \beta_n \rightarrow 0$.

Используются следующие классы банаховых пространств:

$(R)((LUR), (Rf))$ – класс строго выпуклых (локально равномерно выпуклых, рефлексивных) пространств;

$(F)((S))$ – класс пространств с нормой, дифференцируемой по Фреше (по Гато, т.е. класс гладких пространств);

(D) – класс пространств, в которых из $x_n \in \mathbf{S}$, $f \in \mathbf{S}^*$, $f(x_n) \rightarrow 1$ следует, что x_n сходится;

$(LD)((wLD))$ – класс пространств, в которых из $x, x_n \in \mathbf{S}$, $f \in \mathbf{S}^*$, $f(x) = 1$, $f(x_n) \rightarrow 1$ следует $x = \lim x_n$ ($x = w - \lim x_n$).

Имеют место соотношения

$$(F) \subset (S), \quad (LUR) \subset (LD) \subset (wLD) \subset (R), \quad (1)$$

$$(D) = (LD) \cap (Rf), \quad (R) \cap (Rf) \subset (wLD), \quad (2)$$

$$X \in (D) \iff X^* \in (F) \quad (\text{В. Л. Шмультян, см. [8, V.12, с. 510]}), \quad (3)$$

$$(D) \cap (F) = (Rf) \cap (LUR) \cap (F) \quad (\text{см. [9]}). \quad (4)$$

Нам потребуются некоторые известные факты.

ТЕОРЕМА ШМУЛЬЯНА (см. [8, с. 510]). *Если $X \in (F)$, $x \in \mathbf{S}$, $f, f_n \in \mathbf{V}^*$, $f(x) = 1$, то из $f_n(x) \rightarrow 1$ (или из $f = w^* - \lim f_n$) следует, что $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.*

ТЕОРЕМА А. *Пусть Q – бикомпакт, X – банахово пространство, $F = \overline{F} \subset Q$, $g_0 \in C(F, X)$. Тогда существует $g \in C(Q, X)$ с $g(t) = g_0(t) \quad \forall t \in F$, $\|g\|_C = \|g_0\|_{C(F, X)}$.*

Этот факт – следствие теоремы Э. Майкла о селекциях (см. [10, следствие 11.7.5]).

ТЕОРЕМА Б [11, гл. 3, теорема 3.2.1]. *Пусть A – всюду плотное подмножество топологического пространства Q , Y – бикомпакт, $h \in C(A, Y)$. Тогда для того чтобы h можно было продолжить до $\overline{h} \in C(Q, Y)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых замкнутых непересекающихся множеств $B_1, B_2 \subset Y$*

$$\overline{h^{-1}(B_1)} \cap \overline{h^{-1}(B_2)} = \emptyset.$$

Введем еще некоторые обозначения. Пусть $t \in Q$, e_α – направленность множеств из Σ . Будем писать, что $e_\alpha \rightarrow t$, если для любого открытого $G \ni t$ найдется α_G с $e_\alpha \subset G \quad \forall \alpha > \alpha_G$ (не обязательно, чтобы $t \in e_\alpha$; сходимости $e \rightarrow t$ означает сходимости $e \rightarrow \{t\}$ в пространстве 2^Q , в котором базу образуют множества 2^G , где G пробегает открытые множества в Q).

Пусть $\mu \in C^*$ и $t \in S_\mu$. Положим

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi_\mu(t) = w^* - \text{Ls}_{e \rightarrow t} \left(\frac{\mu e}{|\mu| e} \right) \\ &= \left\{ f \in X^* : \exists e_\alpha \in \Sigma, |\mu| e_\alpha > 0, e_\alpha \rightarrow t, w^* - \lim_{|\mu| e_\alpha} \frac{\mu e_\alpha}{|\mu| e_\alpha} = f \right\}, \\ \Phi(t) &= \Phi_\mu(t) = \{x \in \mathbf{S} : f(x) = 1 \quad \forall f \in \Psi(t)\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\forall t \in S_\mu \quad \Psi(t)$ непусто (по теореме Алаоглу), w^* -замкнуто, $\Psi(t) \subset \mathbf{V}^*$ (ввиду $\|\mu e\| \leq |\mu|e$), а многозначное отображение $t \rightarrow \Psi(t)$ θ - w^* -полу-прерывно сверху. Далее, если $\Phi(t) \neq \emptyset$, то

$$w^* - \text{cl co } \Psi(t) \subset \{f \in \mathbf{S}^* : f(x) = 1 \forall x \in \Phi(t)\} \subset \text{att } \mathbf{S}^*.$$

Легко привести примеры, когда $\Psi(t) = \{0\}$, $\{f\}$ или $\{0, f\}$ ($\|f\| = 1$). Если $\Psi_\mu(t) = \{f\}$, в частности, если $f \in \text{att } \mathbf{S}^*$ и $X \in (S)$, то $w^* - \lim(\mu e/|\mu|e) = f$ при $e \rightarrow t$. Если, более того, $X \in (F)$, то $\|\mu e/(|\mu|e) - f\| \rightarrow 0$ (по теореме Шмудляна). $\Phi(t)$ выпукло и замкнуто, а если $X \in (R)$, то $\text{card } \Phi(t) \leq 1$; если $X \in (S)$ и $\Phi(t) \neq \emptyset$, то $\text{card } \Psi(t) = 1$.

В дальнейшем важную роль играет функция $\dot{\mu}$, определяемая следующим образом для меры $\mu \in C^*$. Пусть P_μ — множество функций $g \in \mathbf{V}_B$, удовлетворяющее условию

$$\forall e \in \Sigma \quad \int_e \langle g(t), d\mu \rangle = |\mu|e. \quad (5)$$

С помощью аксиомы выбора для каждой μ с $P_\mu \neq \emptyset$ можно выбрать функцию $\dot{\mu} \in P_\mu$ таким образом, что если $P_\mu \cap C \neq \emptyset$, то $\dot{\mu} \in P_\mu \cap C$. В случае $P_\mu = \emptyset$ считаем, что $\dot{\mu}$ не существует (пример такой меры μ приведен в [5]). Выбор обозначения навеян некоторым сходством $\dot{\mu}$ с производными μ' , $\dot{\mu}$ (см. предложение 1). Заметим еще, что когда $X = \mathbb{C}, \mathbb{R}$,

$$\dot{\mu}(t) = \frac{1}{\dot{\mu}(t)} \quad \forall t, \quad \dot{\mu} = \frac{d|\mu|}{d\mu}.$$

Это вытекает, например, из предложения 1.

ЛЕММА 1 [5]. Пусть $\mu \in C^*$, $g \in \mathbf{V}_B$ ($\mathbf{V}_C$). Если $\langle g, \mu \rangle = \|\mu\|$ или (что эквивалентно) $\text{Re}\langle g, \mu \rangle = \|\mu\|$, то

- (а) $g \in P_\mu$ ($P_\mu \cap C$) и существует $\dot{\mu} \in B(C)$;
- (б) $\|g(t)\| = 1 \quad \forall t$ ($\forall t \in S_\mu$);
- (в) если $X \in (R)$, то $g(t) = \dot{\mu}(t) \quad \forall t$ ($\forall t \in S_\mu$) и

$$P_\mu = \{g \in \mathbf{S}_B : \text{Re}\langle g, \mu \rangle = \|\mu\|\} = \{g \in \mathbf{S}_B : g(t) = \dot{\mu}(t) \quad \forall t\},$$

$$P_\mu \cap C = \{g \in \mathbf{S}_C : \text{Re}\langle g, \mu \rangle = \|\mu\|\} = \{g \in \mathbf{S}_C : g(t) = \dot{\mu}(t) \quad \forall t \in S_\mu\}.$$

Для доказательства см. [5, леммы 2, 3, соотношения (5), (6)].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [5]. Если $E \in \Sigma$, $\mu \in C^*$ и существует μ' ($\dot{\mu}$), то

$$\forall g \in B = B(Q, \Sigma, X) \quad \int_E \langle g(t), d\mu \rangle = \int_E \langle g(t), \mu'(t) \rangle d|\mu|$$

$$\left(\forall \alpha \in B(Q, \Sigma, \mathbb{C}) \quad \int_E \alpha(t) d|\mu| = \int_E \langle \alpha(t) \dot{\mu}(t), d\mu \rangle \right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mu \in C^*$. Следующие условия на функцию $g \in B$, $\|g\| \leq 1$, эквивалентны:

- (а) $g(t) \in \Phi(t) \quad \forall t$ (при $g \in C \quad \forall t \in S_\mu$);
- (б) $\operatorname{Re}\langle g, \mu \rangle = \|\mu\|$;
- (в) $\langle g, \mu \rangle = \|\mu\|$;
- (г) $\int_e \langle g(t), d\mu \rangle = |\mu|e \quad \forall e \in \Sigma$ (т.е. $g \in P_\mu$).

Условия (а)–(г) выполняются для g с $g|_{S_\mu} = \dot{\mu}|_{S_\mu}$, если $\dot{\mu}$ существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\implies$ (б). По теореме Лузина $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E = \overline{E} \subset S_\mu$, $|\mu|E > (1 - \varepsilon)\|\mu\|$, $g|_E$ непрерывна, $g(t) \in \Phi(t) \quad \forall t \in E$. Допустим, что для некоторого $t \in E$ и любого открытого $G \ni t$ найдется $e_G \subset G$, $|\mu|e_G > 0$, $\operatorname{Re}\langle g(t), \mu e_G / (|\mu|e_G) \rangle \leq 1 - \varepsilon$. Так как $\mu e_G / (|\mu|e_G)$ – ограниченная в X^* направленность, то по теореме Алаоглу существует ее поднаправленность, w^* -сходящаяся к некоторому $f \in X^*$. Тогда $f \in \Psi(t)$, $\operatorname{Re}\langle g(t), f \rangle \leq 1 - \varepsilon$, но это противоречит соотношению $g(t) \in \Phi(t)$. Поэтому допущение было неверно, и $\forall t \in E \quad \exists G \ni t \quad \forall e \subset G$ с $|\mu|e > 0$ имеем $\operatorname{Re}\langle g(t), \mu e / (|\mu|e) \rangle > 1 - \varepsilon$. Кроме того, можно считать, что $\|g(\tau) - g(t)\| < \varepsilon \quad \forall \tau \in G \cap E$. Выбранные таким образом для каждой точки $t \in E$ множества G образуют покрытие бикompакта E , которое имеет конечное подпокрытие $\{G_i\}$. Положим $e_1 = G_1 \cap E$, $e_k = (G_k \cap E) \setminus (e_1 \cup \dots \cup e_{k-1})$, $k = 2, 3, \dots$. Если $e_k \neq \emptyset$, возьмем $t_k \in e_k$. Имеем $E = \bigcup e_i$, $e_i \cap e_j = \emptyset$, где слагаемые с $e_i = \emptyset$ можно считать отброшенными. Тогда

$$\operatorname{Re} \int_E \langle g(t), d\mu \rangle = \operatorname{Re} \sum \int_{e_i} \langle g(t) - g(t_i), d\mu \rangle + \operatorname{Re} \sum \int_{e_i} \langle g(t_i), d\mu \rangle.$$

Первое слагаемое по модулю не превосходит $\varepsilon|\mu|E$, второе равно (исключаем из суммы слагаемые с $|\mu|e_i = 0$)

$$\operatorname{Re} \sum \langle g(t_i), \mu e_i \rangle = \operatorname{Re} \sum \left\langle g(t_i), \frac{\mu e_i}{|\mu|e_i} \right\rangle |\mu|e_i > \sum (1 - \varepsilon) |\mu|e_i = (1 - \varepsilon) |\mu|E.$$

Тогда $\operatorname{Re} \int_Q \langle g(t), d\mu \rangle > (1 - 3\varepsilon)\|\mu\|$, и мы имеем (б).

(г) $\implies$ (а). Пусть вначале $g \in C$. Возьмем любые $\varepsilon > 0$, $t_0 \in S_\mu$ и открытое $G \ni t_0$ такое, что $\|g(t) - g(t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \in G$. Тогда для $e \subset G$ с $|\mu|e > 0$ имеем

$$\langle g(t_0), \mu e \rangle = \int_e \langle g(t), d\mu \rangle - \int_e \langle g(t) - g(t_0), d\mu \rangle = |\mu|e - \int_e \langle g(t) - g(t_0), d\mu \rangle,$$

$$\operatorname{Re}\langle g(t_0), \mu e \rangle = |\mu|e - \operatorname{Re} \int_e \langle g(t) - g(t_0), d\mu \rangle \geq (1 - \varepsilon) |\mu|e.$$

Отсюда при $e \rightarrow t_0$ $\operatorname{Re}\langle g(t_0), \mu e / (|\mu|e) \rangle \rightarrow 1$, а если $f \in \Psi(t_0)$ произвольно, то $\exists e_\alpha \rightarrow t_0$

$$w^* - \lim \frac{\mu e_\alpha}{|\mu|e_\alpha} = f,$$

и значит, $\operatorname{Re}\langle g(t_0), f \rangle = 1$. Тогда $\|g(t_0)\| = \|f\| = 1$, $g(t_0) \in \Phi(t_0)$. Рассмотрим случай $g \in B$. По теореме Лузина

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists E_n = \overline{E}_n, \quad g|_{E_n} \in C(E_n, X), \quad |\mu|(Q \setminus E_n) < \frac{1}{n}.$$

По доказанному (вместо Q берется E_n) $\forall t \in E_n \quad g(t) \in \Phi(t)$, а так как $|\mu| \cup E_n = |\mu|Q$, то (а) доказано. То, что (б) $\implies$ (г), следует по лемме 1, (г) $\implies$ (в) $\implies$ (б) очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [5]. Для любой меры $\mu \in C^*$ производная μ' существует и $\|\mu'(t)\| \leq 1 \quad |\mu| \cdot n.v.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f из Q в X^* называется θ - w^* -измеримой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E = \overline{E}$ с $|\mu|(Q \setminus E) < \varepsilon$, на котором f θ - w^* -непрерывна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mu \in C^*$ и производная μ' θ - w^* -измерима (θ - w^* -непрерывна в каждой точке $t \in S_\mu$). Тогда

$$\mu'(t) \in \Psi(t) \quad \forall t \quad (\forall t \in S_\mu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1, 2, \dots$ найдется $F_n = \overline{F}_n \subset S_\mu$ с $|\mu|F_n > \|\mu\| - n^{-1}$, такое, что $\mu'|_{F_n}$ θ - w^* -непрерывна. Положим $E_n = S_\mu|_{F_n}$, $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Тогда $|\mu|E_n = |\mu|F_n$, $|\mu|E = \|\mu\|$. Для всякого $t_0 \in E$ и некоторого n $t_0 \in E_n$. Для любого открытого $G \ni t_0$ $|\mu|(G \cap E_n) = |\mu|(G \cap F_n) = |\mu|_{F_n}|G| > 0$. Тогда для $e = e_G = G \cap E_n$ и для любого $x \in X$ имеем

$$\left\langle x, \frac{\mu e}{|\mu|e} - \mu'(t_0) \right\rangle = \frac{1}{|\mu|e} \int_e \langle x, \mu'(t) - \mu'(t_0) \rangle d|\mu|, \quad w^* - \lim \frac{\mu e_G}{|\mu|e_G} = \mu'(t_0)$$

ввиду θ - w^* -непрерывности $\mu'|_{E_n}$, поэтому $\mu'(t_0) \in \Psi(t_0)$.

Пусть $X \in (S)$. Обозначим через φ опорное, или дуальное, отображение S в S^* , т.е. такое, что $\langle x, \varphi(x) \rangle = 1$ (см. [1]).

ЛЕММА 2. Пусть $X \in (S)$ ($X \in (F)$), а $\mu \in C^*$ достигает нормы на S_B . Тогда существует θ - w^* -измеримая производная μ' такая, что $w^* - \text{cl } \mu'(S_\mu) \subset S^*$ (существует производная Радона–Никодима $\dot{\mu}$ такая, что $\dot{\mu}(S_\mu)$ относительно компактно). Если $\mu \in \text{att } S_{C^*}$, т.е. μ достигает нормы на S_C , то можно считать, что μ' θ - w^* -непрерывна ($\dot{\mu}$ непрерывна) на S_μ и $w^* - \text{cl } \mu'(S_\mu) \subset S^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложений 3 и 1 для некоторой $g \in S_B$

$$\int_Q d|\mu| = |\mu|Q = \int_Q \langle g(t), d\mu \rangle = \int_Q \langle g(t), \mu'(t) \rangle d|\mu|,$$

откуда $\langle g(t), \mu'(t) \rangle = 1 \quad \forall t$, а по лемме 1 $\|g(t)\| = 1 \quad \forall t$ ($\forall t \in S_\mu$, если $g \in C$). Так как $\langle g(t), \varphi(g(t)) \rangle = 1 \quad \forall t$ с $\|g(t)\| = 1$, то, изменяя g и μ' на $e \in \Sigma$ с $|\mu|e = 0$, можно считать, что $g(t) \in S$, а в силу $X \in (S)$ $\mu'(t) = \varphi(g(t)) \quad \forall t \in S_\mu$. По теореме Лузина $\forall \varepsilon > 0$ существует $E = \overline{E} \subset S_\mu$ такое, что $g|_E$ непрерывна, $|\mu|(S_\mu \setminus E) < \varepsilon$. Отображение $t \rightarrow \varphi(g(t)) = \mu'(t)$ θ - w^* -непрерывно (непрерывно) на E , так как φ n - w^* -(n - n -непрерывно) [1, с. 24, 30]. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, μ' θ - w^* -измерима (измерима, и тогда $\mu' = \dot{\mu}$, как уже отмечалось). Заметим, что из-за $g \in B$ множество $g(Q)$ относительно компактно в (S, n) . Пусть f — w^* -предельная точка множества $\mu'(S_\mu)$. Можно считать, что $f = w^* - \lim f_\alpha$, $f_\alpha = \mu'(t_\alpha)$, $t_\alpha \in S_\mu$ и $g(t_\alpha) \rightarrow x$. Тогда из $\langle g(t_\alpha), \mu'(t_\alpha) \rangle = 1$ следует, что $\|f\| \geq \|x\|$ $\|f\| \geq \langle x, f \rangle = 1$, $f \in S^*$, т.е. $w^* - \text{cl } \mu'(S_\mu) \subset S^*$ ($\dot{\mu}(Q) = \varphi(g(Q)) \subset \varphi(\overline{g(Q)})$ и так как φ n - n -непрерывно, то $\varphi(\overline{g(Q)})$ компактно). Последнее утверждение леммы тоже справедливо, поскольку в рассуждениях выше можно считать, что $E = S_\mu$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $X \in (F)$ существование $\dot{\mu}$ даже без условия $\mu \in \text{att } \mathbf{S}_B^*$ хорошо известно [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $M \subset X$ называется *проксимальным, или множеством существования*, если $\forall x \in X \exists y \in M$ с

$$\|x - y\| = d(x, M) = \inf\{\|x - z\| : z \in M\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Следующие утверждения относительно меры $\mu \in C^* \setminus \{0\}$ эквивалентны:

- (а) гиперплоскость $\{g : \langle g, \mu \rangle = 0\}$ является множеством существования в $B(C)$;
- (б) функционал μ достигает своей нормы на сфере $\mathbf{S}_B(\mathbf{S}_C)$;
- (в) вещественный функционал $\text{Re } \mu$ достигает максимума на $\mathbf{S}_B(\mathbf{S}_C)$;
- (г) существует $g \in B$ ($g \in C$) такая, что $g(t) \in \Phi(t) \quad \forall t \in S_\mu$;
- (д) существует функция $\dot{\mu} \in B$ ($\dot{\mu} \in C$);
- (е) $P_\mu \neq \emptyset$ ($P_\mu \cap C \neq \emptyset$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\implies$ (б). Пусть $\mu \neq 0$, $H_\mu = \{g : \langle g, \mu \rangle = 0\}$ в $B(C)$, $h \notin H_\mu$, $h' \in H_\mu$ таковы, что $\|h - h'\| = d(h, H_\mu)$. Как известно, $d(h, H_\mu) = \langle h, \mu \rangle / \|\mu\|$. Положим $g_0 = (h - h') / \|h - h'\|$, тогда

$$\langle g_0, \mu \rangle = \left\langle \frac{h - h'}{\|h - h'\|}, \mu \right\rangle = \frac{\langle h, \mu \rangle}{d(h, H_\mu)} = \|\mu\|.$$

(б) $\implies$ (в), поскольку $\|\text{Re } \mu\| = \|\mu\|$, как хорошо известно.

(в) $\implies$ (г). Если $J = \int_Q \langle g(t), d\mu \rangle$, $\|g\| = 1$, $\text{Re } J = \|\text{Re } \mu\|$, то $\text{Im } J = 0$ и $\langle g, \mu \rangle = J = \|\mu\|$. По предложению (2) $g(t) \in \Phi(t) \quad \forall t$ ($\forall t \in S_\mu$), причем функцию $g \in \mathbf{S}_B$ можно изменить на борелевском множестве меры нуль так, чтобы $g(t) \in \Phi(t) \quad \forall t \in S_\mu$.

(г) $\implies$ (е) по предложению 2, так как в (г) можно считать $\|g\| \leq 1$.

(е) $\implies$ (д) в силу определения $\dot{\mu}$.

(д) $\implies$ (а). Для любого $h \notin H_\mu$ положим $h' = h - d(h, H_\mu)\dot{\mu}$, и так как

$$\langle \dot{\mu}, \mu \rangle = \int_Q \langle \dot{\mu}(t), d\mu \rangle = |\mu|Q = \|\mu\|,$$

то $\langle h', \mu \rangle = \langle h, \mu \rangle - d(h, H_\mu)\|\mu\| = 0$ и h' – ближайший элемент для h .

Рассмотрим в качестве примера точечную векторную меру $\mu = \delta_{t,f}$, где $t \in Q$, $f \in X^* \setminus \{0\}$, $\mu e = \chi_e(t)f$. Очевидно,

$$|\mu|e = \chi_e(t)\|f\|, \quad \mu\{t\} = f, \quad \mu(q) = \delta_t\{q\} \frac{f}{\|f\|},$$

$$\|\mu\| = \|f\|, \quad \langle g, \mu \rangle = \int_Q \langle g(q), d\mu \rangle = \langle g(t), f \rangle.$$

(Здесь δ_t – мера Дирака, $\delta_t(e) = \chi_e(t)$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Мера $\mu = \delta_{t,f}$ достигает своей нормы на $\mathbf{S}_B$ ($\mathbf{S}_C$) тогда и только тогда, когда f достигает своей нормы на $\mathbf{S}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $X \in (R)$, $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{t_i, f_i}$, где $t_i \in Q$ различны, $A = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ дискретно; $f_i \in \mathbf{S}^*$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) $\mu \in \text{att } \mathbf{S}_B^*$ ($\mu \in \text{att } \mathbf{S}_C^*$), т.е. μ достигает своей нормы на $\mathbf{S}_B$ ($\mathbf{S}_C$);
- (б) $\forall i \ f_i \in \text{att } \mathbf{S}^*$ и множество $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ относительно компактно (здесь $\{x_i\} = \Gamma_{f_i}$) ($\forall i \ f_i \in \text{att } \mathbf{S}^*$ и для любых подпоследовательностей t_{i_k} , $t'_{i'_k}$, имеющих общую предельную точку, x_{i_k} , $x'_{i'_k}$ тоже имеют общую предельную точку).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\implies$ (б). Заметим, что $\|\mu\| = \sum |\alpha_i| = 1$ и что $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ $\delta_{t, \alpha f} = \alpha \delta_{t, f}$. Поэтому можно считать, что $\alpha_i > 0$. Тогда поскольку $\mu \in \text{att } \mathbf{S}_B^*$, то же верно для δ_{t_i, f_i} и по предложению 5 $f_i \in \text{att } \mathbf{S}^*$. Условие $g \in B$, как нетрудно видеть, влечет за собой, что $g(Q)$ вполне ограничено (относительно компактно, так как X полно). Если теперь $g \in \mathbf{S}_B$ и $\langle g, \mu \rangle = \|\mu\|$, то

$$\sum \alpha_i = \int_Q \langle g(t), d\mu \rangle = \sum \langle g(t_i), \mu\{t_i\} \rangle = \sum \alpha_i \langle g(t_i), f_i \rangle,$$

откуда $\langle g(t_i), f_i \rangle = 1$, $g(t_i) \in \Gamma_{f_i}$, $g(t_i) = x_i \ \forall i$. Импликация (а) $\implies$ (б), таким образом, справедлива с учетом того, что для $g \in C$ выполняется условие о предельных точках.

(б) $\implies$ (а). Положим $g(t_i) = x_i = \Gamma_{f_i}$, $g(t) = 0 \ \forall t \neq t_i$. Ясно, что μ достигает нормы в точке $g \in \mathbf{S}_B$. Далее, условие на предельные точки означает, что отображение $h: t_i \rightarrow x_i$ непрерывно на множестве A . Полагая $Y = \overline{h(A)}$, легко заметить, что выполняются условия теоремы Б. Тогда h можно продолжить по непрерывности на $\overline{A}$, а по теореме А – до функции $g \in \mathbf{S}_C$. Очевидно, что $\langle g, \mu \rangle = \|\mu\|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) $X \in (Rf) \cap (LUR) \cap (S)$ ($X \in (D) \cap (F)$);
- (б) отображение φ является гомеоморфизмом $(\mathbf{S}, n)$ на $(\mathbf{S}^*, w^*)$ (на $(\mathbf{S}^*, n)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\implies$ (б). Так как $X \in (Rf) \cap (R) \cap (S)$, то φ – взаимно однозначное отображение $\mathbf{S}$ на $\mathbf{S}^*$. В силу [1, с. 24] ([1, с. 30]) φ n - w^* -непрерывно (n - n -непрерывно). Пусть $f_\alpha \in \mathbf{S}^*$, $w^* - \lim f_\alpha = f \in \mathbf{S}^*$, $x_\alpha, x \in \mathbf{S}$, $\varphi(x_\alpha) = f_\alpha$, $\varphi(x) = f$. Тогда $f_\alpha(x) \rightarrow f(x) = 1$, $\|x + x_\alpha\| \geq f_\alpha(x + x_\alpha) \rightarrow 2$, и ввиду $X \in (LUR)$ $x_\alpha \rightarrow x$. Это означает, что φ^{-1} $w^* - n$ -непрерывно (тем более, n - n -непрерывно).

(б) $\implies$ (а). Так как φ – взаимно однозначное отображение $\mathbf{S}$ на $\mathbf{S}^*$, то $X \in (Rf) \cap (R) \cap (S)$. Покажем, что $X \in (LUR)$ ($X \in (D) \cap (F)$). Допустим, что $X \notin (LUR)$, тогда найдутся $x, y_n \in \mathbf{S}$ с $\|y_n - x\| \geq \varepsilon > 0 \ \forall n$, $\|y_n + x\| \rightarrow 2$. Возьмем $f_n \in \mathbf{S}^*$ с $f_n(y_n + x) = \|y_n + x\|$, тогда имеем $f_n(x_n) \sim f_n(x) \sim 1$. Поскольку $X \in (Rf)$, можно считать, что $w^* - \lim f_n = f$, где $f \in \mathbf{S}^*$ ввиду $f(x) \sim f_n(x) \sim 1$ и $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$. Положим $x_n = (y_n + x)/\|y_n + x\|$, тогда $x_n = \varphi^{-1}(f_n)$, $x = \varphi^{-1}(f)$. По условию φ^{-1} $w^* - n$ -непрерывно, следовательно, $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow x$ и $X \in (LUR)$. (Так как $X \in (Rf)$ и φ, φ^{-1} n - n -непрерывны, то $X, X^* \in (F)$ [1, с. 30], т.е. $X \in (D) \cap (F)$ в силу (3).)

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \in (Rf) \cap (LUR) \cap (S)$, $\mu \in C^*$. Тогда эквивалентны условия

- (а) $\mu \in \text{att } \mathbf{S}_B^*$, т.е. μ достигает своей нормы на $\mathbf{S}_B$;
- (б) существует θ - w^* -измеримая производная μ' с $w^* - \text{cl } \mu'(S_\mu) \subset \mathbf{S}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\implies$ (б) по лемме 2.

(б) $\implies$ (а). Рассмотрим функцию $g(t) = \varphi^{-1}(\mu'(t))$, $t \in S_\mu$. По предложению 7 $g(S_\mu) = \varphi^{-1}(\mu'(S_\mu)) \subset \varphi^{-1}(w^* - \text{cl } \mu'(S_\mu))$ относительно компактно. Пусть $\{x_i\}_1^n$ — ε -сеть в $g(S_\mu)$, $E_i = \{t \in S_\mu : \|g(t) - x_i\| < \varepsilon\}$.

Положим $e_1 = E_1$, $e_i = E_i \setminus E_{i-1}$, $\psi(t) = x_i \ \forall t \in e_i$ (если $e_i \neq \emptyset$). Полагая $g(t) = \psi(t) = 0 \ \forall t \in Q \setminus S_\mu$, получим, что $\|\psi - g\| < \varepsilon$. Следовательно, $g \in \mathbf{S}_B$. Далее, по предложению 1

$$\langle g, \mu \rangle = \int_Q \langle g(t), d\mu \rangle = \int_Q \langle g(t), \mu'(t) \rangle d|\mu| = \int_Q d|\mu| = \|\mu\|,$$

т.е. $\mu \in \text{att } \mathbf{S}_B^*$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X, X^* \in (F)$ или (что то же самое в силу (3)) $X \in (D) \cap (F)$. Тогда эквивалентны условия

- (а) $\mu \in \text{att } \mathbf{S}_B^*$, т.е. μ достигает своей нормы на $\mathbf{S}_B$;
- (б) существует производная Радона–Никодима $\dot{\mu}$ с $w^* - \text{cl } \dot{\mu}(S_\mu) \subset \mathbf{S}^*$;
- (в) существует производная Радона–Никодима $\dot{\mu}$ такая, что $\dot{\mu}(S_\mu)$ относительно компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\implies$ (б) по лемме 2.

(б) $\implies$ (а) по теореме 2. По предложению 7 $n = w^*$ в $\mathbf{S}^*$, поэтому $\overline{\dot{\mu}(S_\mu)} = w^* - \text{cl } \dot{\mu}(S_\mu)$ компактно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X \in (Rf) \cap (LUR) \cap (S)$, $\mu \in C^*$. Тогда эквивалентны условия

- (а) $\mu \in \text{att } \mathbf{S}_C^*$, т.е. μ достигает своей нормы на $\mathbf{S}_C$;
- (б) существует θ - w^* -непрерывная производная μ' с $\|\mu'(t)\| = 1 \ \forall t \in S_\mu$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $X, X^* \in (F)$ или (что то же самое в силу (3)) $X \in (D) \cap (F)$. Тогда эквивалентны условия

- (а) $\mu \in \text{att } \mathbf{S}_C^*$, т.е. μ достигает своей нормы на $\mathbf{S}_C$;
- (б) существует непрерывная производная Радона–Никодима $\dot{\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 4 И 5. (а) $\implies$ (б) по лемме 2.

(б) $\implies$ (а) справедливо ввиду того, что функция $g(t) = \varphi^{-1}(\mu'(t))$ непрерывна по предложению 7.

Покажем теперь, что условия на пространство X в теоремах 4 и 5 неулучшаемы, если на бикомпакт наложить довольно слабое ограничение (*): существуют непересекающиеся последовательности t_n^1, t_n^2 , имеющие общую предельную точку, но никакой элемент t_n^i не является предельной точкой ни для t_n^1 , ни для t_n^2 .

Условию (*) удовлетворяют бикомпакты с первой аксиомой счетности (в частности, метризуемые, а более общо, имеющие счетную тесноту [12, с. 57 и гл. 5, задача 64]). Не удовлетворяют этому условию, например, экстремально несвязные бикомпакты [12, гл. 5, задача 164].

ТЕОРЕМА 6. Пусть Q удовлетворяет условию (*). Тогда если для банахова пространства X и любой меры $\mu \in C^*$ условия (а) и (б) теоремы 4 (5) эквивалентны (т.е. одновременно выполняются или одновременно не выполняются), то

$$X \in (Rf) \cap (LUR) \cap (S) \quad (X \in (D) \cap (F)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку меры вида $\mu = \delta_{t,f}$ имеют θ - w^* -непрерывную (на $S_\mu = \{t\}$) производную μ' , то в силу предложения 5 $X \in (Rf)$. Допустим теперь, что $X \in (Rf) \setminus (S)$. Тогда найдутся $x_0 \in S$, $f_0, f \in S^*$ такие, что $f_0 \neq f$, $f_0(x_0) = f(x_0) = 1$. Возьмем в Q последовательность t_n различных точек такую, что для некоторой ее предельной точки t_0 $t_n \neq t_0 \quad \forall n$. Положим $\mu = \delta_{t_0, f_0} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \delta_{t_i, f}$. Для $g \in C$ с $g(t) \equiv x_0$ имеем, очевидно, $\langle g, \mu \rangle = \|\mu\|$, т.е. выполняется (а). В то же время (б) не имеет места: $\dot{\mu}(t_n) = f$, $\dot{\mu}(t_0) = f_0 \neq f$ и θ - w^* -непрерывности нет. Итак, $X \in (Rf) \cap (S)$. Покажем теперь, что $X \in (R)$. Допустим противное. Тогда существует $f_0 \in S^*$ такое, что непусто и неодноточечно. Найдется $g \in S^*$ с $\inf g(\Gamma_{f_0}) < \sup g(\Gamma_{f_0})$. Пусть $L = \{x \in X : f_0(x) = g(x) = 0\}$, тогда $Z = X/L$ двумерно. Элементы $Y, F, \dot{x} \in Z$ ($\dot{x} = x + L$, $x \in X$) могут обозначать и соответствующие “классы смежности” в X , функционалы $f \in L^\perp \subset X^*$ рассматриваются и как элементы Z^* : $f(x) = f(\dot{x})$; S_Z, S_{Z^*} – единичные сферы в Z, Z^* . В частности, рассматривая f_0 как элемент Z^* , видим, что Γ_{f_0} в Z^* представляет собой некоторый отрезок $[F^1, F^2]$ единичной сферы S_Z . Так как F^i – крайние точки S_Z , то по известной теореме Стражевича существуют последовательности F_n^i достижимых точек S_Z с $F_n^i \rightarrow F^i$ при $n \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2$). Поэтому существуют $f_n^i \in S_{Z^*}$ (или $f_n^i \in L^\perp \cap S$) такие, что

$$\{F_n^i\} = \{F \in Z : f_n^i(F) = \|F\| = 1\}.$$

В силу $X \in (S) \cap (Rf)$ имеем $Z \in (S)$ и поэтому $f_n^i \rightarrow f_0$ ($i = 1, 2$) как в Z^* , так и в X^* . Возьмем в Q последовательности t_n^1, t_n^2 из условия (*). Рассмотрим векторную меру $\mu = \sum_{n,i} 2^{-n} \delta_{t_n^i, f_n^i}$. В таком случае $\dot{\mu}(t_n^i) = f_n^i$. Положим $\dot{\mu}(t) = f_0 \quad \forall t \in \text{Ls } t_n^1 \cup \text{Ls } t_n^2$ (сами члены t_n^i не являются предельными точками). Ясно, что $\dot{\mu}$ θ - w^* -непрерывна на S_μ и $\|\dot{\mu}(t)\| = 1 \quad \forall t \in S_\mu$. Но t_n^1, t_n^2 имеют общие предельные точки, а $\Gamma_{f_n^1} = F_n^1$, $\Gamma_{f_n^2} = F_n^2$ – нет (вопреки предложению 6), ибо $\rho(\Gamma_{f_n^1}, \Gamma_{f_n^2}) = \rho(F_n^1, F_n^2) \rightarrow \rho(F^1, F^2) > 0$ (здесь $\rho(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$).

Итак, $X \in (R)$ и остается показать, что $X \in (LUR)$. Пусть $x, x_n \in S$, $\|x + x_n\| \rightarrow 2$, $y_n = (x + x_n)/\|x + x_n\|$, $f_n \in S^*$, $f_n(y_n) = 1$. Так как $2 \geq f_n(x) + 1 \geq f_n(x + x_n) = \|x + x_n\| \rightarrow 2$, то $f_n(x) \rightarrow 1$, и если $f \in w^* - \text{Ls } f_n$, то $f(x) = 1$, $\|f\| \leq 1$, $f \in S^*$. В силу $X \in (S)$ такое f единственно, значит, $f = w^* - \lim f_n$. Возьмем дискретное счетное множество $\{t_n\}_1^\infty \subset Q$. Так как $t_j \notin \text{Ls } t_n \quad \forall j$, то можно определить векторную меру, положив $\mu = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \delta_{t_n, f_n}$. Имеем $\dot{\mu}(t_n) = f_n$ и пусть $\dot{\mu}(t) = f \quad \forall t \in \text{Ls } t_n$; тогда $\forall t \in S_\mu$ $\dot{\mu}$ определена и θ - w^* -непрерывна, $\|\dot{\mu}(t)\| = 1 \quad \forall t \in S_\mu$. В силу предложения 6 множество точек $y_n = \Gamma_{f_n}$ относительно компактно. Если $y_{n_k} \rightarrow y$, то $y \in S$, $x_{n_k} = \|x_{n_k} + x\|y_{n_k} - x \rightarrow 2y - x \in S$, $y = (x + 2y - x)/2$, поэтому из $X \in (R)$ имеем $y = x$, $x_{n_k} \rightarrow x$. Отсюда понятно, что $X \in (LUR)$, так как проведенное рассуждение верно не только для x_n , но и для любой ее подпоследовательности.

Покажем, что если $\forall \mu \in C^*$ (а) $\iff$ (б), то $X \in (F)$. Мы уже знаем из предыдущего, что $X \in (Rf) \cap (LUR) \cap (S)$. Допустим, что $X \notin (F)$. Тогда найдутся $x, x_n \in S$, $x_n \rightarrow x$,

$f, f_n \in \mathbf{S}^*$ с $f(x) = f_n(x_n) = 1$, но $\|f_n - f_m\| \geq \varepsilon > 0 \forall n, m$. Положим для дискретного счетного $\{t_n\}_1^\infty \subset Q$ $g(t_n) = x_n, g(t) = x \forall t \in \text{Ls } t_n$, далее g считается продолженной на все Q по теореме А, $\mu = \sum_1^\infty 2^{-n} \delta_{t_n, f_n}$. Так как

$$\langle g, \mu \rangle = \int_Q \langle g(t), d\mu \rangle = \sum_1^\infty \langle g(t_n), \mu\{t_n\} \rangle = \sum_1^\infty 2^{-n} = 1 = \|\mu\| = \|g\|,$$

то $\mu \in \text{att } \mathbf{S}C^*$. Так как (а) $\iff$ (б), должна существовать непрерывная производная Радона–Никодима $\dot{\mu}$. Однако $\dot{\mu}(t_n) = f_n$, непрерывности нет ни в одной предельной точке t при любом продолжении $\dot{\mu}$ (предложение б). Остается воспользоваться соотношением (4).

Г.М. Устинов и Ю.А. Шашкин [3] доказали утверждение, аналогичное теореме 5, в случае, когда вещественное X равномерно выпукло и равномерно гладко; наряду с $C(Q, X)$ они рассматривали пространство аффинных функций на симплексе Шоке; результат несколько иного плана в этом направлении Г.М. Устинов получил в [4, предложение 1].

Пусть L – подпространство в C , $\text{codim } L < \infty$. Рассмотрим следующие условия на меры μ, ν из $L^\perp$:

- (а) существует непрерывная производная $\dot{\mu}$ (т.е. $P_\mu \cap C \neq \emptyset$);
- (а') существует θ - w^* -непрерывная производная μ' с $\|\mu'(t)\| = 1 \forall t \in S_\mu$;
- (ä) существует непрерывная производная Радона–Никодима $\dot{\mu}$;
- (б) множество $S_\nu \setminus S_\mu$ замкнуто;
- (в) мера $|\nu|$ абсолютно непрерывна относительно $|\mu|$ на S_μ .

ТЕОРЕМА 7 [5]. Пусть $X \in (wLD)$. Для того чтобы подпространство $L \subset C$, $\text{codim } L < \infty$, было множеством существования, необходимо и достаточно, чтобы для любых $\mu, \nu \in L^\perp$ выполнялись условия (а), (б), (в).

ТЕОРЕМА 8. Пусть $X \in (Rf) \cap (LUR) \cap (S)$ ($X \in (D) \cap (F)$). Для того, чтобы подпространство $L \subset C$, $\text{codim } L < \infty$, было проксиминальным в C , необходимо и достаточно, чтобы для всех $\mu, \nu \in L^\perp$ выполнялись условия (а'), (б), (в) ((ä), (б), (в)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из теоремы 4 (теоремы 5) и теоремы 1, условие (а') ((ä)) эквивалентно условию (а). Остается сослаться на теорему 7 и соотношения (1), (2).

Рассмотрим вопрос о проксиминальности в B подпространств вида

$$L = \left\{ g \in B : \int_Q \langle g(t), d\mu_i \rangle = 0, i = 1, \dots, n \right\}, \quad (6)$$

где $\mu_i \in C^*$.

ТЕОРЕМА 9 [5]. Пусть $X \in (wLD)$. Тогда для того чтобы подпространство (6) было множеством существования в B , необходимо и достаточно, чтобы для любой меры $\mu \in L^\perp$ существовала функция $\dot{\mu}$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $X \in (Rf) \cap (LUR) \cap (S)$ ($X \in (D) \cap (F)$). Для того чтобы подпространство (6) было множеством существования в B , необходимо и достаточно, чтобы для любой меры $\mu \in L^\perp$ существовала θ - w^* -измеримая производная μ' с $w^* - cl \mu'(S_\mu) \subset S^*$ (существовала производная Радона-Никодима μ такая, что $\mu(S_\mu)$ относительно компактно).

Для доказательства следует сослаться на теорему 4 (5), на соотношения (1), (2) и на теорему 9.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН

Поступило
01.03.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища школа, 1980.
- [2] Singer I. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Berlin: Springer Verlag, 1970.
- [3] Устинов Г. М., Шашкин Ю. А. О функционалах, достигающих нормы // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. Сб. науч. тр. УрГУ. Свердловск, 1985. С. 103–109.
- [4] Устинов Г. М. О подпространствах существования в $C(Q, X)$ // Исследования по функциональному анализу и топологии. Сб. науч. тр. УрГУ. Свердловск, 1990. С. 127–130.
- [5] Власов Л. П. Существование элементов наилучшего приближения в $C(Q, X)$ // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 163–175.
- [6] Зингер И. Линейные функционалы на пространстве непрерывных отображений бикompактного хаусдорфова пространства в пространство Банаха // Revue Roum. Math. Pur. Appl. 1957. V. 2. P. 301–315.
- [7] Бурбаки Н. Интегрирование (Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления). М.: Наука, 1970.
- [8] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы (общая теория). М.: ИЛ, 1962.
- [9] Балаганский В. С., Власов Л. П. Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в банаховых пространствах. Препринт ИММ УрО АН СССР. Свердловск, 1990.
- [10] Bessaga C., Pełczyński A. Selected topics in infinite-dimensional topology // Monogr. Mat. V. 58. Warsaw: PWN, 1975.
- [11] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [12] Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.