Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Данилов, Мерозначные почти периодические функции, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 57–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:47:08

УДК 517.9

МЕРОЗНАЧНЫЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Л. И. Данилов

Рассматриваются почти периодические по Степанову функции $\mu \in S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ со значениями в метрическом пространстве вероятностных борелевских мер $\mathcal{M}$ с метрикой Прохорова, определенных на полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathcal{U}$. Основной результат: функция $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда для всех ограниченных непрерывных функций $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ функции $\int_{\mathcal{U}} \mathcal{F}(x) \mu[dx; \cdot]$ почти периодические по Степанову (степени 1) при этом

$$\text{Mod } \mu = \sum_{\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U}, \mathbb{R})} \text{Mod } \int_{\mathcal{U}} \mathcal{F}(x) \mu[dx; \cdot].$$

Библиография: 17 названий.

В работе рассматриваются почти периодические (п.п.) по Степанову функции со значениями в пространстве вероятностных борелевских мер $\mathcal{M}(\mathcal{U})$, определенных на полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathcal{U}$.

Мерозначные функции естественно возникают в задачах теории управления [1]–[3]. Ряд свойств п.п. по Степанову мерозначных функций приведен в [4]. Для задач оптимального п.п. управления они применялись в [5], [6]. Мерозначные функции используются также при исследовании вопроса о п.п. сечениях многозначных отображений. В частности, при характеристике многозначных отображений $t \rightarrow F(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с замкнутыми образами (в полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathcal{U}$), которые при почти всех (п.в.) $t \in \mathbb{R}$ представимы в виде замыкания множества $\bigcup_j f_j(t)$, где $f_j \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ – п.п. по Степанову функции. Все такие многозначные отображения и только они являются носителями $\text{supp } \mu[\cdot; \cdot]$ мерозначных п.п. по Степанову функций $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$, $t \in \mathbb{R}$ (для компактных метрических пространств $\mathcal{U}$ см. [7], [8]). Ряд утверждений о п.п. сечениях многозначных отображений $t \rightarrow \text{supp } \mu[\cdot; t]$, свойства которых определяются мерозначной п.п. по Степанову функцией $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$, содержатся в [9], [10].

В п. 1 приводятся определения и некоторые стандартные утверждения о п.п. функциях, а также о вероятностных борелевских мерах, которые используются в дальнейшем. Большинство утверждений о п.п. функциях можно найти в [11], [12] (теорема Фреше [13] позволяет непосредственно переносить многие из них с нормированного пространства на метрическое). Относительно утверждений о вероятностных борелевских мерах см. [14]. Основные результаты работы приведены в п. 2. В п. 3 доказывается теорема 1, сформулированная в предыдущем пункте.

1. Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ – полное сепарабельное метрическое пространство. Через $\bar{A}$ обозначается замыкание множества $A \subset \mathcal{U}$, $K(x, r) = \{y \in \mathcal{U} : \rho(x, y) \leq r\}$, $x \in \mathcal{U}$, $r \geq 0$. Множество $K \subset \mathcal{U}$ предкомпактно, если $\bar{K}$ – компактное множество.

Если $T_j \subset \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, – измеримые (по Лебегу) множества, $T_i \cap T_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\text{mes}(\mathbb{R} \setminus \bigcup_j T_j) = 0$ (mes – мера Лебега) и $x_j \in \mathcal{U}$, то через $\sum x_j \chi_{T_j}(\cdot)$, где χ_{T_j} – характеристические функции множеств T_j , обозначается элементарная функция [14], определенная на множестве $\bigcup_j T_j$ и принимающая при $t \in T_j$ значение x_j , $j \in \mathbb{N}$. Такое же обозначение используется и для конечного числа множеств T_j , если $\text{mes}(\mathbb{R} \setminus \bigcup_j T_j) = 0$. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ измерима [14], если для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $\sum x_j \chi_{T_j}(\cdot)$ такая, что

$$\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho\left(f(t), \sum x_j \chi_{T_j}(t)\right) < \varepsilon.$$

Если $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$, $j \in \mathbb{N}$, – измеримые функции, то аналогично элементарным функциям введем обозначение $\sum f_j(\cdot) \chi_{T_j}(\cdot)$ для измеримой функции, совпадающей с функцией $f_j(t)$ при $t \in T_j \subset \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$.

Пусть $M(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ – класс измеримых функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$, при этом функции, совпадающие при п.в. $t \in \mathbb{R}$, отождествляются. Фиксируем элемент $x_0 \in \mathcal{U}$; $M_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ – класс функций $f \in M(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, для которых

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+1} \rho(f(t), x_0) dt < +\infty.$$

Для функций $f, g \in M_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ положим

$$D_1^{(\rho)}(f, g) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+1} \rho(f(t), g(t)) dt.$$

Множество почти периодических по Степанову функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ степени 1 обозначается через $S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ принадлежит $S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда $f \in M_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ и для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых $D_1^{(\rho)}(f(\cdot + \tau), f(\cdot)) < \varepsilon$, относительно плотно [11] (множество $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ относительно плотно, если существует число $l > 0$ такое, что $\mathcal{E} \cap [\xi, \xi + l] \neq \emptyset$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$). Последовательность $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$ называется *f-возвращающей для функции* $f \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, если $D_1^{(\rho)}(f(\cdot + \tau_j), f(\cdot)) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Для каждой функции $f \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ определяется множество $\text{Mod } f$, состоящее из тех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $e^{i\lambda\tau_j} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow +\infty$ для любой *f-возвращающей* последовательности $\{\tau_j\}$. Наоборот, если $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$ и $e^{i\lambda\tau_j} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow +\infty$ для любого числа $\lambda \in \text{Mod } f$, то $\{\tau_j\}$ – *f-возвращающая* последовательность. Для любой функции $f \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, которая не совпадает (п.в.) с постоянной, множество $\text{Mod } f$ счетное. Если $\mathcal{U}$ – банахово пространство, то $\text{Mod } f$ совпадает с модулем показателей Фурье функции $f \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$.

Пусть $f \in M_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $f_j \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$, и $D_1^{(\rho)}(f, f_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Тогда $f \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ и $\text{Mod } f \subset \sum \text{Mod } f_j$ (сумма модулей определяется как наименьший модуль (груша по сложению), содержащий все слагаемые).

Функция $f \in M(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ почти периодических по Степанову функций, если для любых $\varepsilon, \delta > 0$ множество тех чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \text{mes}\{t \in [\xi, \xi + 1] : \rho(f(t + \tau), f(t)) \geq \varepsilon\} < \delta,$$

относительно плотно.

Определим функцию θ : $\theta(\xi) = 0$ при $\xi \leq 0$, $\theta(\xi) = \xi$ при $0 \leq \xi \leq 1$ и $\theta(\xi) = 1$ при $\xi \geq 1$. Введем метрику $\rho'(x, y) = \theta(\rho(x, y))$, $x, y \in \mathcal{U}$. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда $f \in S_1(\mathbb{R}, (\mathcal{U}, \rho')) \pmod{f}$ для функции $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ определяется как для функции из пространства $S_1(\mathbb{R}, (\mathcal{U}, \rho'))$. Для функций $f, g \in M(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ положим $D^{(\rho)}(f, g) = D_1^{(\rho')}(f, g)$. Множество $S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ замкнуто в полном метрическом пространстве $(M(\mathbb{R}, \mathcal{U}), D^{(\rho)})$. Если $f \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, то $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ и $\text{Mod } f$ не зависит от рассматриваемого пространства функций.

Далее будем использовать краткие обозначения $S_1 = S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $S = S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Пусть $S(\mathbb{R})$ – совокупность измеримых множеств $T \subset \mathbb{R}$ таких, что $\chi_T(\cdot) \in S_1$. Для множеств $T \in S(\mathbb{R})$ положим $\text{Mod } T = \text{Mod } \chi_T(\cdot)$. Если $T \in S(\mathbb{R})$, то $\mathbb{R} \setminus T \in S(\mathbb{R})$ и $\text{Mod}(\mathbb{R} \setminus T) = \text{Mod } T$. Если $T_1, T_2 \in S(\mathbb{R})$, то $T_1 \cap T_2 \in S(\mathbb{R})$ и $\text{Mod } T_1 \cap T_2 \subset \text{Mod } T_1 + \text{Mod } T_2$. Для любого измеримого множества $T \subset \mathbb{R}$ положим

$$\kappa(T) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \text{mes}([\xi, \xi + 1] \setminus T).$$

Если $T_j \in S(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, и $\sum_j \kappa(T_j) < +\infty$, то $\bigcap T_j \in S(\mathbb{R})$, $\text{Mod } \bigcap T_j \subset \sum_j \text{Mod } T_j$ и $\kappa(\bigcap T_j) \leq \sum_j \kappa(T_j)$.

Пусть Λ – произвольный модуль (группа по сложению) в $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\Lambda)$ множество последовательностей $\{T_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, непересекающихся множеств $T_j \in S(\mathbb{R})$ таких, что $\text{Mod } T_j \subset \Lambda$ и

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \kappa\left(\bigcup_{j \leq N} T_j\right) = 0$$

(последовательности из $\mathfrak{M}(\Lambda)$ могут состоять из конечного числа множеств T_j , которые всегда можно дополнить пустыми множествами до счетной последовательности).

Следующая лемма является следствием леммы 3 из [8].

ЛЕММА 1. Пусть $\{T_j\} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ и $f_j \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum f_j(\cdot) \chi_{T_j}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$$

и

$$\text{Mod}\left(\sum f_j(\cdot) \chi_{T_j}(\cdot)\right) \subset \sum_j \text{Mod } f_j + \sum_j \text{Mod } T_j.$$

Множество непрерывных функций $\mathcal{F}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через $C(\mathcal{U})$, $C_b(\mathcal{U})$ – банахово пространство ограниченных функций $\mathcal{F} \in C(\mathcal{U})$ с нормой

$$\|\mathcal{F}\| = \|\mathcal{F}\|_{C_b(\mathcal{U})} = \sup_{x \in \mathcal{U}} |\mathcal{F}(x)|,$$

$C_b^+(\mathcal{U})$ – множество неотрицательных функций из $C_b(\mathcal{U})$. Если $A \subset \mathcal{U}$, то $\mathcal{F}(\cdot|_A)$ – ограничение функции $\mathcal{F} \in C(\mathcal{U})$ на множество A . По определению $S(\mathbb{R}, C_b(\mathcal{U})) = S_1(\mathbb{R}, (C_b(\mathcal{U}), \tilde{D}))$, где $\tilde{D}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \theta(\|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2\|)$, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C_b(\mathcal{U})$.

ЛЕММА 2. Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ – полное метрическое пространство. Если $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ и функция $t \rightarrow \mathcal{F}(\cdot, t) \in C_b(\mathcal{U})$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C_b(\mathcal{U}))$, тогда

$$\mathcal{F}(f(\cdot), \cdot) \in S \quad \text{и} \quad \text{Mod } \mathcal{F}(f(\cdot), \cdot) \subset \text{Mod } f + \text{Mod } \mathcal{F}(\cdot, \cdot).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО несложной леммы 2 можно найти в [8] и [15].

ЛЕММА 3. Пусть $f \in S$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $T = T(\varepsilon) \in S(\mathbb{R})$ такое, что $\text{Mod } T \subset \text{Mod } f$, $f(t) < 2\varepsilon$ при всех $t \in T$ и $f(t) > \varepsilon$ при н.в. $t \in \mathbb{R} \setminus T$.

Лемма 3 непосредственно вытекает из теоремы 2 в [16].

Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ – совокупность борелевских подмножеств метрического пространства $(\mathcal{U}, \rho)$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{U})$ – множество борелевских вероятностных мер на пространстве $(\mathcal{U}, \rho)$. Каждой мере $\mu[\cdot] \in \mathcal{M}$ ставится в соответствие линейный вероятностный функционал $\mu(\cdot)$ на банаховом пространстве

$$C_b(\mathcal{U}) : \mu(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{U}} \mathcal{F}(x) \mu[dx], \quad \mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U}).$$

Так как пространство $(\mathcal{U}, \rho)$ сепарабельно, то каждая мера $\mu[\cdot] \in \mathcal{M}$ является радоновой, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset \mathcal{U}$ такой, что $\mu[K_\varepsilon] > 1 - \varepsilon$.

На множестве $\mathcal{M}$ вводится метрика Прохорова

$$\tilde{d}(\mu, \gamma) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \mu[A] \leq \gamma[A^\varepsilon] + \varepsilon \text{ для всех } A \in \mathcal{B}(\mathcal{U}) \}, \quad \mu, \gamma \in \mathcal{M},$$

где $A^\varepsilon = \{x \in \mathcal{U} : \rho(x, A) < \varepsilon\}$. Метрическое пространство $(\mathcal{M}, \tilde{d})$ является полным и сепарабельным (вместе с пространством $(\mathcal{U}, \rho)$). Пусть $\mu_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N}$. Если $\mu \in \mathcal{M}$ и $\tilde{d}(\mu, \mu_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$, то $\mu_j(\mathcal{F}) \rightarrow \mu(\mathcal{F})$ для любой функции $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$. Наоборот, если $\varphi(\cdot)$ – линейный вероятностный функционал на $C_b(\mathcal{U})$ и $\mu_j(\mathcal{F}) \rightarrow \varphi(\mathcal{F})$ при $j \rightarrow +\infty$ для любой функции $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$, то найдется мера $\mu \in \mathcal{M}$ такая, что $\varphi(\cdot) = \mu(\cdot)$ и $\tilde{d}(\mu, \mu_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.

Множество $\mathcal{H}$ предкомпактно в метрическом пространстве $(\mathcal{M}, \tilde{d})$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset \mathcal{U}$ такой, что $\mu[K_\varepsilon] > 1 - \varepsilon$ для всех мер $\mu \in \mathcal{H}$.

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ множество функций $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$ таких, что $0 \leq \mathcal{F}(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathcal{U}$ и $|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)| \leq \rho(x, y)$ для всех $x, y \in \mathcal{U}$. Положим

$$d(\mu, \gamma) = \sup \{ |\mu(\mathcal{F}) - \gamma(\mathcal{F})| : \mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) \}, \quad \mu, \gamma \in \mathcal{M}.$$

Метрики d и $\tilde{d}$ определяют одну и ту же топологию на $\mathcal{M}$. Более того, нетрудно показать, что для всех мер $\mu, \gamma \in \mathcal{M}$ выполняются неравенства

$$\tilde{d}^2(\mu, \gamma) \leq d(\mu, \gamma) \leq 24\tilde{d}^{1/3}(\mu, \gamma), \quad (1)$$

поэтому приведенные для метрического пространства $(\mathcal{M}, \tilde{d})$ свойства относятся также и к метрическому пространству $(\mathcal{M}, d)$. В настоящей работе будет использоваться (как более удобная) метрика d .

2. Мерозначная функция $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$, измерима, если $\mu[\cdot; \cdot] \in M(\mathbb{R}, (\mathcal{M}, d))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мерозначная функция $\mu[\cdot; \cdot] \in M(\mathbb{R}, (\mathcal{M}, d))$ называется *почти периодической по Степанову*, если $\mu[\cdot; \cdot] \in S(\mathbb{R}, (\mathcal{M}, d))$ (так как $d(\mu, \gamma) \leq 1$ для всех мер $\mu, \gamma \in \mathcal{M}$, то $\theta(d(\cdot, \cdot)) = d(\cdot, \cdot)$ и $S(\mathbb{R}, (\mathcal{M}, d)) = S_1(\mathbb{R}, (\mathcal{M}, d))$).

Из неравенств (1) следует, что $S(\mathbb{R}, (\mathcal{M}, d)) = S(\mathbb{R}, (\mathcal{M}, \tilde{d}))$ и $\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot]$ для п.п. по Степанову мерозначной функции $\mu[\cdot; \cdot]$ не зависит от того, какая из двух метрик на $\mathcal{M}$ рассматривается. В дальнейшем будет использоваться краткое обозначение $(\mathcal{M}, d) = \mathcal{M}$.

В [4], [9] определялись п.п. по Степанову мерозначные функции $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$, в случае, когда $\mathcal{U}$ – компакт в конечномерном евклидовом пространстве, при этом на множестве вероятностных мер $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ вводилась слабая метрика d_w [1, с. 53]. Так как в последнем случае компактные метрические пространства $(\mathcal{M}, d_w)$ и $(\mathcal{M}, d)$ гомеоморфны (при тождественном отображении множества $\mathcal{M}$ на себя), то эти функции совпадают с функциями из определения 1).

ЛЕММА 4. Если $\mu[\cdot; \cdot] \in S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ и функция $t \rightarrow \mathcal{F}(\cdot, t) \in C_b(\mathcal{U})$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C_b(\mathcal{U}))$, то функция $t \rightarrow \mu(\mathcal{F}(\cdot, t); t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству S и $\text{Mod } \mu(\mathcal{F}(\cdot, \cdot); \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] + \text{Mod } \mathcal{F}(\cdot, \cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждой функции $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$ соответствует функция $l_{\mathcal{F}}(\cdot) \in C_b(\mathcal{M})$, для которой $l_{\mathcal{F}}(\mu) = \mu(\mathcal{F})$, $\mu \in \mathcal{M}$. При этом $\|l_{\mathcal{F}}\|_{C_b(\mathcal{M})} = \|\mathcal{F}\|_{C_b(\mathcal{U})}$ для всех функций $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$. Из последнего равенства следует, что функция $t \rightarrow l_{\mathcal{F}}(\cdot, t)(\cdot)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C_b(\mathcal{M}))$ и $\text{Mod } l_{\mathcal{F}}(\cdot, \cdot)(\cdot) = \text{Mod } \mathcal{F}(\cdot, \cdot)$. Так как метрическое пространство $\mathcal{M}$ полное и $\mu[\cdot; \cdot] \in S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, то отсюда в силу леммы 2 получаем $l_{\mathcal{F}}(\cdot, \cdot)(\mu[\cdot; \cdot]) = \mu(\mathcal{F}(\cdot, \cdot); \cdot) \in S$ и

$$\text{Mod } \mu(\mathcal{F}(\cdot, \cdot); \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] + \text{Mod } l_{\mathcal{F}}(\cdot, \cdot)(\cdot) = \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] + \text{Mod } \mathcal{F}(\cdot, \cdot).$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\mu[\cdot; \cdot] \in S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, то для любой функции $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$ имеем $\mu(\mathcal{F}; \cdot) \in S_1$ и $\text{Mod } \mu(\mathcal{F}; \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot]$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ – полное сепарабельное метрическое пространство и $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$, – произвольная функция. Предположим, что $\mu(\mathcal{F}; \cdot) \in S$ для всех функций $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$. Тогда $\mu[\cdot; \cdot] \in S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ и

$$\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] = \sum_{\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})} \text{Mod } \mu(\mathcal{F}; \cdot).$$

Доказательство теоремы 1 приведено в п. 3.

В теореме 1, в частности, содержится утверждение о том, что произвольная мерозначная функция $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$, измерима, если для всех $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$ измеримы функции $\mu(\mathcal{F}; \cdot)$.

ЛЕММА 5. Пусть $\mu[\cdot; \cdot] \in S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$. Тогда существует функция $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$ такая, что $\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] = \text{Mod } \mu(\mathcal{F}; \cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] \neq \{0\}$. Пусть λ_j , $j \in \mathbb{N}$, – как-то перенумерованные числа из счетного множества $\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] \setminus \{0\}$. Каждому индексу $j \in \mathbb{N}$ поставим в соответствие какую-либо функцию $\mathcal{F}_j \in C_b^+(\mathcal{U})$, для которой $\lambda_j \in \text{Mod } \mu(\mathcal{F}_j; \cdot)$ (это можно сделать в силу теоремы 1). Положим $\alpha_1 = 1$. Найдется число $\beta_1 > 0$ такое, что $\lambda_1 \in \text{Mod } (\alpha_1 \mathcal{F}_1 + \tilde{\mathcal{F}}; \cdot)$ для всех функций $\tilde{\mathcal{F}} \in C_b(\mathcal{U})$, для

которых $\|\tilde{\mathcal{F}}\| \leq \beta_1$. Далее последовательно при $j = 2, 3, \dots$ будем определять числа $\alpha_j > 0$ и $\beta_j > 0$. Если при некотором $j \in \mathbb{N}$ числа $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ и $\beta_1, \dots, \beta_j$ уже определены, причем

$$\lambda_j \in \text{Mod } \mu \left(\sum_{k=1}^j \alpha_k \mathcal{F}_k + \tilde{\mathcal{F}}; \cdot \right)$$

для всех функций $\tilde{\mathcal{F}} \in C_b(\mathcal{U})$, для которых $\|\tilde{\mathcal{F}}\| \leq \beta_j$, то выберем числа α_{j+1} и β_{j+1} так, что $\alpha_{j+1}\|\mathcal{F}_{j+1}\| + \beta_{j+1} \leq \beta_j$ и $\lambda_{j+1} \in \text{Mod } \mu \left(\sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k \mathcal{F}_k + \tilde{\mathcal{F}}; \cdot \right)$ для всех функций $\tilde{\mathcal{F}} \in C_b(\mathcal{U})$, для которых $\|\tilde{\mathcal{F}}\| \leq \beta_{j+1}$ (это можно сделать, так как $\text{Mod } f$ для любой функции $f \in S_1$ совпадает с модулем ее показателей Фурье, которые устойчивы при малых возмущениях функции f). Продолжим до бесконечности нахождение чисел α_j и β_j . Обозначим $\mathcal{F} = \sum_k \alpha_k \mathcal{F}_k$. Из условий, наложенных на числа α_j и β_j , следует, что $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$ и $\lambda_j \in \text{Mod } \mu(\mathcal{F}; \cdot)$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Учитывая следствие леммы 4, отсюда получаем, что $\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] = \text{Mod } \mu(\mathcal{F}; \cdot)$. Лемма доказана.

3. Для доказательства теоремы 1 потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Пусть B – банахово пространство п.п. по Бору функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (см. [11], [12]) с нормой $\|f\|_B = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. Обозначим

$$\|f\|_{S_1} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+1} |f(t)| dt,$$

если $f \in S_1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f_j \in B$, $j \in \mathbb{N}$, $f_j(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\sum_{j \in J} f_j(\cdot) \in B$ для любого множества $J \subset \mathbb{N}$. Обозначим $g_j(\cdot) = \sum_{i \geq j} f_i(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\|g_j\|_B \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Так как $0 \leq \dots \leq g_{j+1}(t) \leq g_j(t) \leq \dots \leq g_1(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то последовательность $\|g_j\|_B$, $j \in \mathbb{N}$, не возрастает и, следовательно, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\|g_j\|_B \geq \varepsilon$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Положим $j_1 = 1$. Найдется число $t_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $g_{j_1}(t_1) \geq \frac{3}{4}\varepsilon$. Выберем индекс $j'_1 \in \mathbb{N}$, $j'_1 > j_1$, так, чтобы выполнялось неравенство $g_{j_1}(t_1) - g_{j'_1}(t_1) \geq \varepsilon/2$. Обозначим $G_1(\cdot) = g_{j_1}(\cdot) - g_{j'_1}(\cdot)$. После этого выберем число $\alpha_1 \geq 1$ так, чтобы для любого $\xi \in \mathbb{R}$ нашелся 1-почти период $\tau = \tau(\xi)$ функции $G_1(\cdot)$, для которого $\xi - \tau \in [t_1, t_1 + \alpha_1]$. Будем, далее, последовательно (при $s = 2, 3, \dots$) находить числа $t_s \in \mathbb{R}$, индексы $j_s, j'_s > j_s$ и числа $\alpha_s \geq s$. Предположим, что они уже определены при некотором $s \in \mathbb{N}$, при этом $G_n(\cdot) = g_{j_n}(\cdot) - g_{j'_n}(\cdot)$, $n = 1, \dots, s$. Из условий теоремы и леммы Дини следует, что функции $g_j(\cdot)$ стремятся к 0 при $j \rightarrow +\infty$ равномерно на каждом отрезке, поэтому можно выбрать индекс $j_{s+1} \geq j'_s$ так, чтобы для всех $t \in [t_s - \alpha_s, t_s + \alpha_s]$ выполнялось неравенство $g_{j_{s+1}}(t) \leq 1/s$. Найдется число $t_{s+1} \in \mathbb{R}$, для которого $g_{j_{s+1}}(t_{s+1}) \geq \frac{3}{4}\varepsilon$. Выберем индекс $j'_{s+1} > j_{s+1}$ так, что

$$g_{j_{s+1}}(t_{s+1}) - g_{j'_{s+1}}(t_{s+1}) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим

$$G_{s+1}(\cdot) = g_{j_{s+1}}(\cdot) - g_{j'_{s+1}}(\cdot).$$

После этого выберем число α_{s+1} из следующих условий:

$$1) \alpha_{s+1} \geq s + 1;$$

- 2) $[t_s, t_s + \alpha_s] \subset [t_{s+1} - \alpha_{s+1}, t_{s+1} + \alpha_{s+1}]$;
 3) для любого $\xi \in \mathbb{R}$ найдется $1/(s+1)$ -почти период $\tau = \tau(\xi)$ функции

$$\sum_{n \leq s+1} G_n(\cdot) \in B,$$

для которого $\xi - \tau \in [t_{s+1}, t_{s+1} + \alpha_{s+1}]$.

Продолжим неограниченно нахождение чисел $t_s \in \mathbb{R}$, индексов j_s, j'_s и чисел $\alpha_s \geq s$.

Обозначим

$$\mathcal{H}_s(\cdot) = \sum_{n \geq s} G_n(\cdot) = \sum_{n \geq s} (f_{j_n}(\cdot) + \dots + f_{j'_n-1}(\cdot)), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Имеем $\mathcal{H}_s \in B$, $\mathcal{H}_s(t) \leq g_{j_s}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{H}_s(t_s) \geq G_s(t_s) \geq \varepsilon/2$ при всех $s \in \mathbb{N}$. В дальнейшем будет также использоваться обозначение

$$\mathcal{P}_s(\cdot) = \sum_{n \leq s} G_n(\cdot) = \mathcal{H}_1(\cdot) - \mathcal{H}_{s+1}(\cdot), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Пусть L – такое положительное число, что на каждом отрезке длины L имеется по крайней мере один $\varepsilon/32$ -почти период функции $\mathcal{H}_1(\cdot)$. Выберем число $N \in \mathbb{N}$, исходя из условий $2N \geq L$ и $\varepsilon N \geq 8$. Для всех $t \in [t_N - \alpha_N, t_N + \alpha_N]$ имеем

$$\mathcal{H}_{N+1}(t) \leq g_{j_{N+1}}(t) \leq \frac{1}{N}.$$

Пусть $L' > 0$ – такое число, что на любом отрезке длины L' существует по крайней мере один $1/N$ -почти период функции $\mathcal{H}_{N+1}(\cdot)$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ можно найти число $\tau'_s \in [-L'/2, L'/2]$ такое, что $t_s + \tau'_s - t_N$ есть $1/N$ -почти период функции $\mathcal{H}_{N+1}(\cdot)$. Отсюда для всех $s \geq N+1$ и $t \in [t_s + \tau'_s - \alpha_N, t_s + \tau'_s + \alpha_N]$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s(t) &\leq \mathcal{H}_{N+1}(t) = (\mathcal{H}_{N+1}(t) - \mathcal{H}_{N+1}(t - t_s - \tau'_s + t_N)) + \mathcal{H}_{N+1}(t - t_s - \tau'_s + t_N) \\ &< \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $2\alpha_N \geq 2N \geq L$, то для каждого $s \geq N+1$ можно найти $\varepsilon/32$ -почти период τ_s функции $\mathcal{H}_1(\cdot)$, для которого $t_s + \tau_s \in [t_s + \tau'_s - \alpha_N, t_s + \tau'_s + \alpha_N]$. Следовательно, для всех $s \geq N+1$ имеем

$$\|\mathcal{H}_s(\cdot + \tau_s) - \mathcal{H}_s(\cdot)\|_B \geq \mathcal{H}_s(t_s) - \mathcal{H}_s(t_s + \tau_s) > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{N} \geq \frac{\varepsilon}{4} \quad (2)$$

и $|\tau_s| \leq |\tau'_s| + \alpha_N \leq L'/2 + \alpha_N$.

Выберем теперь число $M \in \mathbb{N}$, исходя из условий $M \geq L'/2 + \alpha_N$ и $\varepsilon M \geq 64$ (тогда $|\tau_s| \leq M$ при всех $s \geq N+1$). Пусть $s \geq \max\{N, M\}$. Фиксируем некоторое число $\eta \in \mathbb{R}$. Пусть $\tilde{\tau}$ – такой $1/s$ -почти период функции $\mathcal{P}_s(\cdot)$, что

$$\eta + |\tau_{s+1}| - \tilde{\tau} \in [t_s, t_s + \alpha_s]. \quad (3)$$

Так как $\alpha_s \geq s \geq M \geq |\tau_{s+1}|$, то

$$\eta - \tilde{\tau} \in [t_s - \alpha_s, t_s + \alpha_s]. \quad (4)$$

Имеем

$$|\mathcal{P}_s(\eta + |\tau_{s+1}|) - \mathcal{P}_s(\eta + |\tau_{s+1}| - \tilde{\tau})| < \frac{1}{s}, \quad (5)$$

$$|\mathcal{P}_s(\eta) - \mathcal{P}_s(\eta - \tilde{\tau})| < \frac{1}{s}. \quad (6)$$

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{s+1}(\eta + |\tau_{s+1}|) - \mathcal{H}_{s+1}(\eta) \\ &= \mathcal{H}_1(\eta + |\tau_{s+1}|) - \mathcal{H}_1(\eta) - (\mathcal{P}_s(\eta + |\tau_{s+1}|) - \mathcal{P}_s(\eta + |\tau_{s+1}| - \tilde{\tau})) \\ & \quad + (\mathcal{P}_s(\eta) - \mathcal{P}_s(\eta - \tilde{\tau})) - (\mathcal{P}_s(\eta + |\tau_{s+1}| - \tilde{\tau}) - \mathcal{P}_s(\eta - \tilde{\tau})). \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{H}_{s+1}(t) \leq g_{j_{s+1}}(t) \leq 1/s$ для всех $t \in [t_s - \alpha_s, t_s + \alpha_s]$, то отсюда и из неравенств (5), (6), учитывая (3), (4), получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_{s+1}(\eta + |\tau_{s+1}|) - \mathcal{H}_{s+1}(\eta)| &< \frac{\varepsilon}{32} + \frac{2}{s} + |\mathcal{P}_s(\eta + |\tau_{s+1}| - \tilde{\tau}) - \mathcal{P}_s(\eta - \tilde{\tau})| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{32} + \frac{2}{s} + |\mathcal{H}_1(\eta + |\tau_{s+1}| - \tilde{\tau}) - \mathcal{H}_1(\eta - \tilde{\tau})| \\ & \quad + \mathcal{H}_{s+1}(\eta + |\tau_{s+1}| - \tilde{\tau}) + \mathcal{H}_{s+1}(\eta - \tilde{\tau}) \\ &< \frac{\varepsilon}{16} + \frac{4}{M} \leq \frac{\varepsilon}{8}. \end{aligned}$$

Число $\eta \in \mathbb{R}$ можно выбрать произвольно, поэтому из полученных неравенств при всех $s \geq \max\{N, M\}$ следует оценка

$$\|\mathcal{H}_{s+1}(\cdot + \tau_{s+1}) - \mathcal{H}_{s+1}(\cdot)\|_B \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Но последняя оценка противоречит неравенству (2), которое справедливо при всех $s \geq N + 1$. Поэтому сделанное предположение о том, что $\|g_j\|_B \geq \varepsilon > 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$, неверно. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f_j \in S_1$, $j \in \mathbb{N}$, и $f_j(t) \geq 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\sum_{j \in J} f_j(\cdot) \in S_1$ для любого множества $J \subset \mathbb{N}$. Обозначим $g_j(\cdot) = \sum_{i \geq j} f_i(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\|g_j\|_{S_1} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.

Для доказательства следствия достаточно рассмотреть функции

$$\tilde{f}_j(\cdot) = \int_{-1/2}^{1/2} f_j(\cdot + t) dt \in B, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Если $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$ и функция $\mu[\cdot; \cdot]$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то в силу ограниченности функции $\mu(\mathcal{F}; \cdot) \in S$ имеем $\mu(\mathcal{F}; \cdot) \in S_1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть мерозначная функция $\mu[\cdot; \cdot]$ удовлетворяет условиям теоремы 1, $\mathcal{F}_j \in C_b^+(\mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq \dots \leq \mathcal{F}_{j+1}(x) \leq \mathcal{F}_j(x) \leq \dots \leq \mathcal{F}_1(x)$ и $\mathcal{F}_j(x) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ для всех $x \in \mathcal{U}$. Тогда $\|\mu(\mathcal{F}; \cdot)\|_{S_1} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $h_j(\cdot) = \mathcal{F}_j(\cdot) - \mathcal{F}_{j+1}(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu(h_j; \cdot) \in S_1$ и $\mu(h_j; t) \geq 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Для произвольного множества $J \subset \mathbb{N}$ положим

$$h(J; \cdot) = \sum_{j \in J} h_j(\cdot).$$

Нетрудно убедиться, что $h(J; \cdot) \in C_b^+(\mathcal{U})$, поэтому $\mu(h(J; \cdot); \cdot) \in S_1$. С другой стороны,

$$\sum_{j \in J, j \leq s} h_j(x) \rightarrow h(J; x)$$

при $s \rightarrow +\infty$ для всех $x \in \mathcal{U}$, поэтому

$$\mu(h(J; \cdot); t) = \sum_{j \in J} \mu(h_j; t)$$

п.в. и, следовательно,

$$\sum_{j \in J} \mu(h_j; \cdot) \in S_1.$$

Осталось воспользоваться следствием теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Для функции $\mu[\cdot; \cdot]$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, обозначим

$$\Lambda(\mu) = \sum_{\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})} \text{Mod } \mu(\mathcal{F}; \cdot).$$

ЛЕММА 6. Пусть мерозначная функция $\mu[\cdot; \cdot]$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $T = T(\varepsilon) \in S(\mathbb{R})$ такое, что $\text{Mod } T \subset \Lambda(\mu)$, $\kappa(T) < \varepsilon$ и $\mathcal{K} = \bigcup_{t \in T} \mu[\cdot; t]$ – компакт в метрическом пространстве $(\mathcal{M}, d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – плотное в пространстве $\mathcal{U}$ множество точек. Для всех $j, n \in \mathbb{N}$ определим функции

$$\mathcal{F}_j^{(n)}(x) = \theta \left(2n\rho(x, \bigcup_{i \leq j} x_i) - 1 \right), \quad x \in \mathcal{U}.$$

Так как $\mathcal{F}_j^{(n)}(\cdot) \in C_b^+(\mathcal{U})$, то $\mu(\mathcal{F}_j^{(n)}; \cdot) \in S_1$. Функции $\mathcal{F}_j^{(n)}$ (при фиксированном $n \in \mathbb{N}$) удовлетворяют условиям теоремы 3, поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует номер $j(n) \in \mathbb{N}$ такой, что $\|\mu(\mathcal{F}_n; \cdot)\|_{S_1} < 2^{-2n\varepsilon^2}$, где $\mathcal{F}_n(\cdot) = \mathcal{F}_{j(n)}^{(n)}(\cdot)$. Из леммы 3 вытекает существование множества $T^{(n)} \in S(\mathbb{R})$, для которого $\text{Mod } T^{(n)} \subset \text{Mod } \mu(\mathcal{F}_n; \cdot)$, $\mu(\mathcal{F}_n; t) < 2^{1-n\varepsilon}$ при всех $t \in T^{(n)}$ и $\mu(\mathcal{F}_n; t) > 2^{-n\varepsilon}$ при п.в. $t \in \mathbb{R} \setminus T^{(n)}$. Поэтому для любого $\xi \in \mathbb{R}$ имеем

$$2^{-n\varepsilon} \text{mes}([\xi, \xi + 1] \setminus T^{(n)}) \leq \|\mu(\mathcal{F}_n; \cdot)\|_{S_1} < 2^{-2n\varepsilon^2}.$$

Отсюда $\kappa(T^{(n)}) < 2^{-n\varepsilon}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ обозначим

$$T_m = \bigcap_{n \geq m+1} T^{(n)}.$$

Тогда $T_m \in S(\mathbb{R})$, $\text{Mod } T_m \subset \sum_n \text{Mod } T^{(n)} \subset \Lambda(\mu)$ и

$$\kappa(T_m) \leq \sum_{n \geq m+1} \kappa(T^{(n)}) < 2^{-m} \varepsilon.$$

Пусть

$$K_m = \bigcap_{n \geq m+1} \bigcup_{i \leq j(n)} K(x_i, 1/n), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ точки $x_i, i = 1, \dots, j(n)$, при $n \geq m+1$ образуют конечную $2/n$ -сеть для замкнутого множества $K_m \subset \mathcal{U}$, поэтому K_m – компакт. Если $t \in T_m$, то при всех $n \geq m+1$ справедлива оценка

$$\mu \left[\bigcup_{i \leq j(n)} K \left(x_i, \frac{1}{n} \right); t \right] \geq 1 - \mu(\mathcal{F}_n; t) > 1 - 2^{1-n} \varepsilon,$$

следовательно,

$$\mu[K_m; t] \geq 1 - \sum_{n \geq m+1} \mu(\mathcal{F}_n; t) > 1 - 2^{1-m} \varepsilon.$$

Положим $T = \bigcap_m T_m$. Имеем $T \in S(\mathbb{R})$,

$$\text{Mod } T \subset \sum_m \text{Mod } T_m \subset \Lambda(\mu) \quad \text{и} \quad \kappa(T) \leq \sum_m \kappa(T_m) < \varepsilon.$$

С другой стороны, для всех $m \in \mathbb{N}$ и $t \in T$ выполняется неравенство $\mu[K_m; t] > 1 - 2^{1-m} \varepsilon$. Поэтому $\mathcal{K} = \overline{\bigcup_{t \in T} \mu[\cdot; t]}$ – компакт в метрическом пространстве $(\mathcal{M}, d)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Выберем для всех $l \in \mathbb{N}$ (в соответствии с леммой 6) множества $T'_l \in S(\mathbb{R})$ такие, что $\text{Mod } T'_l \subset \Lambda(\mu)$, $\kappa(T'_l) < 1/l$ и $\bigcup_{t \in T'_l} \mu[\cdot; t]$ – предкомпактные множества в метрическом пространстве $(\mathcal{M}, d)$. Положим $T_1 = T'_1$, $T_l = T'_l \setminus \bigcup_{s < l} T'_s$, $l \geq 2$. Выбрасывая множества T_l , для которых $\text{mes } T_l = 0$, можно считать, что $\text{mes } T_l \neq 0$ для всех $l \in \mathbb{N}$ (возможно, останется только конечное число множеств T_l). Имеем $\{T_l\} \in \mathfrak{M}(\Lambda(\mu))$, при этом $\mathcal{K}_l = \overline{\bigcup_{t \in T_l} \mu[\cdot; t]}$ – компактные множества в пространстве $(\mathcal{M}, d)$, $l \in \mathbb{N}$.

Фиксируем число $l \in \mathbb{N}$. Пусть $K_m^{(l)} \subset \mathcal{U}$ – компактные множества, определенные при доказательстве леммы 6, такие, что $\mu[K_m^{(l)}] \geq 1 - 2^{1-m}/l$ для всех $\mu \in \mathcal{K}_l$ и $m \in \mathbb{N}$ (в условиях леммы 6 положено $\varepsilon = 1/l$). Вместе с множествами $K_m^{(l)}$ компактными являются также множества $\mathcal{L}(K_m^{(l)})$ в банаховых пространствах $(C_b(K_m^{(l)}), \|\cdot\|_{C_b(K_m^{(l)})})$, поэтому (так как $\mathcal{L}(K_m^{(l)}) = \{\mathcal{F}(\cdot|_{K_m^{(l)}}) : \mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})\}$) найдется последовательность функций $\mathcal{F}_j \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$, такая, что множества $\{\mathcal{F}_j(\cdot|_{K_m^{(l)}})\}_{j \in \mathbb{N}}$ плотны в $\mathcal{L}(K_m^{(l)}) \subset (C_b(K_m^{(l)}), \|\cdot\|_{C_b(K_m^{(l)})})$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Из выбора множеств $K_m^{(l)}$ и функций $\mathcal{F}_j$ следует, что

$$d^0(\mu, \gamma) = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} |\mu(\mathcal{F}_j) - \gamma(\mathcal{F}_j)|,$$

$\mu, \gamma \in \mathcal{K}_l$, – метрика на множестве $\mathcal{K}_l$. При этом $d^0(\mu, \gamma) \leq d(\mu, \gamma)$ для всех мер $\mu, \gamma \in \mathcal{K}_l$. Тожественное отображение компактного метрического пространства $(\mathcal{K}_l, d)$ на метрическое пространство $(\mathcal{K}_l, d^0)$ непрерывно, поэтому $(\mathcal{K}_l, d^0)$ – также компактное пространство и непрерывно обратное отображение [17, с. 190].

Фиксируем произвольную точку $t_l \in T_l$. Положим

$$\tilde{\mu}_l[\cdot; t] = \begin{cases} \mu[\cdot; t], & \text{если } t \in T_l, \\ \mu[\cdot; t_l], & \text{если } t \notin T_l, \end{cases}$$

$\tilde{\mu}_l[\cdot; t] \in \mathcal{K}_l$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Из леммы 1 получаем $\tilde{\mu}_l(\mathcal{F}_j; \cdot) \in S$ и

$$\text{Mod } \tilde{\mu}_l(\mathcal{F}_j; \cdot) \subset \text{Mod } \mu(\mathcal{F}_j; \cdot) + \text{Mod } T_l \subset \Lambda(\mu), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Из измеримости функций $\tilde{\mu}_l(\mathcal{F}_j; \cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, (и определения метрики d^0) вытекает измеримость функции $t \rightarrow d^0(\tilde{\mu}_l[\cdot; t], \gamma[\cdot])$, $t \in \mathbb{R}$, для любой меры $\gamma \in \mathcal{K}_l$. Так как пространство $(\mathcal{K}_l, d^0)$ сепарабельное, то отсюда следует измеримость функции $\tilde{\mu}_l[\cdot; \cdot]$ со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{K}_l, d^0)$ [14]. Для любого $\delta > 0$ выберем число $N(\delta) \in \mathbb{N}$ так, что $2^{-N(\delta)} < \delta/2$. Если τ есть общий $\delta/2$ -почти период функций $\tilde{\mu}_l(\mathcal{F}_j; \cdot) \in S_1$ (множество таких чисел τ относительно плотно [11]), $j = 1, \dots, N(\delta)$, то

$$\begin{aligned} D^{(d^0)}(\tilde{\mu}_l[\cdot; \cdot + \tau], \tilde{\mu}_l[\cdot; \cdot]) &\leq \sum_{j=1}^{N(\delta)} 2^{-j} \|\tilde{\mu}_l(\mathcal{F}_j; \cdot + \tau) - \tilde{\mu}_l(\mathcal{F}_j; \cdot)\|_{S_1} + \sum_{j=N(\delta)+1}^{+\infty} 2^{-j} \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Поэтому (в силу произвольности выбора числа $\delta > 0$) $\tilde{\mu}_l[\cdot; \cdot] \in S(\mathbb{R}, (\mathcal{K}_l, d^0))$ и, более того, любая $\tilde{\mu}_l(\mathcal{F}_j; \cdot)$ -возрастающая для всех $j \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$ является также и $\tilde{\mu}_l[\cdot; \cdot]$ -возрастающей. Следовательно,

$$\text{Mod } \tilde{\mu}_l[\cdot; \cdot] \subset \sum_{j=1}^{+\infty} \text{Mod } \tilde{\mu}_l(\mathcal{F}_j; \cdot) \subset \Lambda(\mu).$$

В силу непрерывности тождественного отображения компактного метрического пространства $(\mathcal{K}_l, d^0)$ на пространство $(\mathcal{K}_l, d)$ получаем $\tilde{\mu}_l[\cdot; \cdot] \in S(\mathbb{R}, (\mathcal{M}(\mathcal{U}), d))$ ($\text{Mod } \tilde{\mu}_l[\cdot; \cdot]$ не изменяется при переходе к пространству $S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$).

Так как $\mu[\cdot; \cdot] = \sum_l \tilde{\mu}_l[\cdot; \cdot] \chi_{T_l}(\cdot)$ и $\{T_l\} \in \mathfrak{M}(\Lambda(\mu))$, то в силу леммы 1 имеем $\mu[\cdot; \cdot] \in S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ и $\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] \subset \Lambda(\mu)$. Обратное включение $\Lambda(\mu) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot]$ вытекает из следствия леммы 4. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть δ_x – мера Дирака, сосредоточенная в точке $x \in \mathcal{U}$. Для любых $x, y \in \mathcal{U}$ справедливо равенство $d(\delta_x, \delta_y) = \theta(\rho(x, y)) = \rho'(x, y)$, из которого следует, что произвольная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда $\delta_{f(\cdot)} \in S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, при этом $\text{Mod } f = \text{Mod } \delta_{f(\cdot)}$. Поэтому частным случаем теоремы 1 (когда $\mu[\cdot; t] = \delta_{f(t)}$, $t \in \mathbb{R}$) является следующее утверждение: Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ – произвольная функция в полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathcal{U}$, то $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}(f(\cdot)) \in S_1$ для всех функций $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$ при этом

$$\text{Mod } f = \sum_{\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})} \text{Mod } \mathcal{F}(f(\cdot)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\mathcal{U}$ – полное сепарабельное метрическое пространство. Аналогично пространству $S(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ можно рассмотреть пространство $B(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ п.п. по Бору (равномерных п.п.) функций [11], [12] $t \rightarrow \mu[\cdot; t]$, $t \in \mathbb{R}$, со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathcal{U}), d)$. Если $\mu[\cdot; \cdot] \in B(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, то $\mu(\mathcal{F}; \cdot) \in B$ для всех функций $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$. Аналогично теореме 3 (с использованием теоремы 2 вместо ее следствия) доказывается утверждение: если в условиях теоремы 3 $\mu(\mathcal{F}; \cdot) \in B$ для всех $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$, то $\|\mu(\mathcal{F}_j; \cdot)\|_B \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Из последнего утверждения вытекает аналог леммы 6 (при доказательстве которого не применяется лемма 3): если $\mu(\mathcal{F}; \cdot) \in B$ для любой функции $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$, то $\overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mu[\cdot; t]}$ – компакт в метрическом пространстве $\mathcal{M}$. Отсюда (как и при доказательстве теоремы 1), используя метрику d^0 , получаем утверждение, аналогичное теореме 1: если $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$, – мерозначная функция такая, что $\mu(\mathcal{F}; \cdot) \in B$ для всех $\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})$, то $\mu[\cdot; \cdot] \in B(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ и

$$\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] = \sum_{\mathcal{F} \in C_b(\mathcal{U})} \text{Mod } \mu(\mathcal{F}; \cdot).$$

Физико-технический институт
Уральского отделения РАН

Поступило
07.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
- [2] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [3] Ченцов А. Г. Приложение теории меры к задачам управления. Препринт. Свердловск, 1985.
- [4] Иванов А. Г. Мерозначные почти периодические функции. Препринт. Свердловск, 1990.
- [5] Иванов А. Г. О почти периодической ляпуновской задаче // ПММ. 1991. Т. 55. № 5. С. 718–724.
- [6] Иванов А. Г. Оптимальное управление почти периодическими движениями // ПММ. 1992. Т. 56. № 5. С. 133–142.
- [7] Данилов Л. И. О мерозначных почти периодических функциях // Вестн. Удмуртского ун-та. 1993. № 1. С. 51–58.
- [8] Данилов Л. И. Многозначные почти периодические отображения и их сечения // Деп. ВИНТИ. № 2465–В93.
- [9] Данилов Л. И., Иванов А. Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Матем. 1994. № 6. С. 50–59.
- [10] Данилов Л. И. О многозначных почти периодических отображениях, зависящих от параметра // Вестн. Удмуртского ун-та. 1994. № 2. С. 29–44.
- [11] Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.
- [12] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [13] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
- [14] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
- [15] Данилов Л. И. О суперпозиции почти периодических многозначных отображений и функций // Деп. ВИНТИ. № 262–В95.
- [16] Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Изв. отдела матем. и информ. УдГУ. 1993. № 1. С. 16–78.
- [17] Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1981.