Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кучеренко, В. П. Маслов, Нормальные формы квадратичных бозевских операторов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 69–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 11:21:36

УДК 517

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КВАДРАТИЧНЫХ БОЗЕВСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. Кучеренко, В. П. Маслов

В работе построено собственное каноническое преобразование, приводящее квадратичный бозевский оператор к прямой сумме конечномерных квадратичных операторов, каждый из которых конечномерным каноническим преобразованием сводится к набору стандартных форм соответствующих стандартным формам вещественных квадратичных гамильтонианов.

Библиография: 11 названий.

Ф. А. Березин в своей известной книге [1] подробно изучал квадратичные бозевские операторы. В знаменитой работе по сверхтекучести [2] Н. Боголюбов с помощью так называемого $(u-v)$ -преобразования выделил квадратичную часть бозевского оператора, показал, что она является асимптотически главной и получил последовательное теоретическое (не феноменологическое) описание явления сверхтекучести. Метод комплексного роста, предложенный одним из авторов [3], [4] позволяет, в частности, получить результаты Боголюбова из “квазиклассических” рассуждений. Однако, простейшая теория так называемого “ростка в точке” также приводит к проблеме изучения нормальной формы квадратичного бозевского оператора. В настоящей работе этот вопрос изучен наиболее полно, что позволяет надеяться на существенное расширение области применимости метода комплексного роста.

Пусть $M = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ — n -мерный тор со стандартной формой $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Обозначим через $\mathcal{H}^k$, $k \geq 1$, пространство симметричных функций из $L_2(M^k)$, через $\mathcal{H}^0$ обозначим одномерное пространство. Введем на фоксовом пространстве

$$\mathcal{H}_B \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^k \oplus \dots$$

стандартными соотношениями операторы рождения $\psi^+(x)$ и уничтожения $\psi(x)$ [1], [5]. В [4]–[7] при вычислении асимптотики спектральных серий N частичного оператора Шрёдингера при $N \rightarrow \infty$ использовался спектр квадратичного оператора $H_2(\psi^+, \psi)$:

$$H_2(\psi^+, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \iint_{M^2} \{ B(x, y) \psi^+(x) \psi^+(y) + 2A(x, y) \psi^+(x) \psi(y) + B^*(x, y) \psi(x) \psi(y) \} dx dy, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS, грант № 94–2763. Работа первого автора выполнена также при поддержке фонда CONACYT and CINVESTAV under Catedra Patrimonial.

где $B(x, y) = B(y, x)$, $A^*(y, x) = A(x, y)$.

В данной работе мы рассмотрим оператор H_2 , используемый в работах [4], [6]. Приведем выражение для ядер $B(x, y)$, $A(x, y)$.

УСЛОВИЕ 1. Пусть $U(x), V(x, y)$ – измеримые, вещественные функции на M, M^2 , у которых vrai max модулей ограничен и $V(x, y) = V(y, x)$. Если размерность тора M удовлетворяет условию $n \geq 4$, то потребуем, чтобы $V(x, y) \in C^{2(n-3)}(M^2)$, $U(x) \in C^{2(n-3)}(M)$.

Обозначим через $f_0(x)$ некоторое решение стационарного уравнения Хартри

$$-\frac{1}{2}\Delta f_0 + \left\{ U(x) + \frac{N-1}{N} \int_M V(x, y) |f_0(y)|^2 dy \right\} f_0 = \Omega_0 f_0, \quad x \in M,$$

и положим

$$\begin{aligned} B(x, y) &= V(x, y) f_0(y) f_0(x), \\ A(x, y) &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \Delta_x \delta(x - y) + \delta(x - y) [U(x) + V_n(x) - \Omega_0] + V(x, y) f_0(x) f_0^*(y), \\ V_n(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{N-1}{N} \int_M V(x, y) |f_0(y)|^2 dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, $B^T = B$, $A^+ = A$. Из [1, с. 149, теорема 1] следует, что квадратичный оператор (1), (2), рассматриваемый на множестве финитных векторов

$$\Phi_N = \sum_{j=0}^N k_j(x^1, \dots, x^j), \quad k^j \in \mathcal{H}^j \cap W_2^2(M^j),$$

симметричен и имеет нулевые индексы дефекта, а, значит, его замыкание является самосопряженным оператором, который мы по-прежнему будем обозначать через H_2 .

Для дальнейших построений введем вещественный ортонормированный базис $\{f_\nu : 1 \leq \nu < \infty\}$ в пространстве $L_2(M)$. Мы будем использовать разбиение этого базиса на блоки длины m_j , $j = 1, \dots$, и введем двойную нумерацию элементов базиса по блокам и внутри блока. Длины блоков будут определены в дальнейшем. Итак, блок имеет вид $\{f_j^\alpha, 1 \leq \alpha \leq m_j\}$. Очевидно, проектор P_j пространства $L_2(M)$ на подпространство с базисом $\{f_j^\alpha, 1 \leq \alpha \leq m_j\}$ удовлетворяет условию

$$P_j^* = P_j. \quad (3)$$

Квадратичный оператор приведем к нормальной форме собственным линейным каноническим преобразованием [1], [5]

$$\xi = \mathbf{U}^+ \psi - \mathbf{V}^+ \psi^+, \quad \xi^+ = -\mathbf{V}^T \psi + \mathbf{U}^T \psi^+. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ – ограниченные операторы, ядра которых представимы в блочном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, y) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{U}_j(x, y), & \mathbf{V}(x, y) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{V}_j(x, y), \\ \mathbf{U}_j(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{m_j} u_j^\alpha(x) f_j^\alpha(y), & \mathbf{V}_j(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{m_j} v_j^\alpha(x) f_j^\alpha(y). \end{aligned} \quad (5)$$

Векторы $\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T$ будут определены ниже. Обозначим через B_j, A_j матрицы $\|B_j^{\alpha\beta}\|, \|A_j^{\alpha\beta}\|, 1 \leq \alpha, \beta \leq m_j$, удовлетворяющие условиям $B_j^T = B_j, A_j^+ = A_j$, и положим

$$\begin{aligned} a_j^\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \int_m \xi(x) f_j^\alpha(x) dx, & a_j^{\alpha+} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_m \xi(x)^+ f_j^\alpha(x) dx, \\ H^j(a_j^+, a_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{m_j} \sum_{\beta=1}^{m_j} \{B_j^{\alpha\beta} a_j^{\alpha+} a_j^{\beta+} + 2A_j^{\alpha\beta} a_j^{\alpha+} a_j^\beta + B_j^{\alpha\beta*} a_j^\alpha a_j^\beta\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя теорему М. В. Келдыша [8] о полноте собственных функций несамосопряженных операторов [9], мы докажем, что существует такое собственное каноническое преобразование (4) и такой набор матриц B_j, A_j , что квадратичный оператор $H_2(\psi^+, \psi)$ приводится к сумме конечномерных операторов

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} H^j(a_j^+, a_j) + \gamma, \\ \gamma &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \iint_{M^2} B(x, y) \left\{ \int_M \mathbf{V}(x, z) \mathbf{U}^*(y, z) dz \right\} dx dy \\ &\quad + \iint_{M^2} A(x, y) \left\{ \int_M \mathbf{V}(x, z) \mathbf{V}^*(y, z) dz \right\} dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_{M^2} B^*(x, y) \left\{ \int_M \mathbf{U}(x, z) \mathbf{V}^*(y, z) dz \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, будет доказано, что существует такое целое число N , что при $j > N$ имеем

$$B_j = 0, \quad A_j = \lambda_j \|\delta\alpha\beta\|. \quad (8)$$

Отсюда и из (7) будет следовать равенство

$$H_2 = \left\{ \sum_{j=1}^N H^j(a_j^+, a_j) \right\} + \left\{ \sum_{j=N+1}^{\infty} \left\{ \lambda_j \sum_{\alpha=1}^{m_j} a_j^{\alpha+}, a_j^\alpha \right\} \right\} + \gamma. \quad (9)$$

Матрицы B_j, A_j конечномерным каноническим преобразованием операторов $a_j^\alpha, a_j^{\alpha+}$, $1 \leq \alpha \leq m_j$, будут приведены к каноническим формам, отвечающим каноническим формам квадратичных гамильтонианов в работах [10], [11, добавление 6].

Из формул [11] для канонических форм квадратичных гамильтонианов следует, что если оператор $\mathbf{C}$ имеет жордановы клетки или комплексные собственные значения, то оператор H_2 имеет непрерывный спектр.

В [5] предложено выбирать $\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T$ из системы собственных векторов оператора $\mathbf{C}$ (это отвечает в общем случае “уравнению в вариациях” в терминологии работы [3]):

$$\mathbf{C} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = IH, \quad \text{где } I \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad H \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} B^* & A^* \\ A & B \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Для оператора $\mathbf{C}$ с A, B , определенными по формулам (2), справедлива лемма.

ЛЕММА 1. 1°. Спектр оператора $\mathbf{C}$ состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности.

2°. Система корневых векторов оператора $\mathbf{C}$ полна в $L_2(M) \oplus L_2(M)$.

3°. Существует такая константа R , что при $|\lambda_j| > R$

- а) собственное значение λ_j вещественно;
- б) оператор $\mathbf{C}$ при $\lambda = \lambda_j$ не имеет присоединенных векторов;
- в) собственные векторы $\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}$ удовлетворяют неравенству

$$\lambda_j \int_M \{|u_j^\alpha|^2 - |v_j^\alpha|^2\} dx > 0, \quad \alpha = 1, \dots, m_j. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (2) и условия 1° следует, что оператор $\mathbf{C}$ можно представить в виде

$$\mathbf{C} = D + T, \quad D \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \delta_{ij}(-1)^i \left\{ -\frac{1}{2}\Delta + 1 \right\} \right\|, \quad T = \|t_{ij}(x, y)\|, \quad (12)$$

где D – самосопряженный оператор с дискретным спектром, а $\text{vrai max } |t_{ij}(x, y)| < \infty$. Из компактности вложения $W_2^2(M)$ в $L_2(M)$ следует, что операторы D^{-1} , TD^{-1} , $D^{-1}TD^{-1}$ вполне непрерывны. Таким образом, в силу условий теоремы 10.1 работы [9, с. 336] для доказательства п. 1°, 2° леммы достаточно показать, что s – числа оператора $D^{-1}TD^{-1}$ – суммируемы с некоторой степенью $p < \infty$.

Из леммы 4.2 [9, с. 70] следует, что

$$s(D^{-1}TD^{-1}) \leq s_j(D^{-1})s_j(TD^{-1}).$$

Далее, используя неравенства (2.2), (2.3) [9, с. 47], получим

$$s_j(D^{-1}TD^{-1}) \leq \|T\|s_j^2(D^{-1}) = \|T\|\lambda_j^2(D^{-1}).$$

Следовательно,

$$s_j^p(D^{-1}TD^{-1}) \leq \|T\|^p \lambda_j(D^{-2p}), \quad (13)$$

и сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(D^{-1}TD^{-1})$$

будет следовать из сходимости ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(D^{-2p}).$$

Для доказательства сходимости этого ряда достаточно указать такое p_0 , при котором $\text{Sp } D^{-2p_0} < \infty$. Положим $p_0 = \left[\frac{1}{4}(n+1) \right] + 1$ и воспользуемся представлением ядра оператора D^{-2p_0} через ряд Фурье:

$$D^{-2p_0}(x, y) = \sum_{|m| < \infty} \frac{\exp\{i2\pi m(x - y)\}}{\{|m|^2/2 + 1\}^{2p_0}}.$$

Очевидно,

$$|D^{-2p_0}(x, y)| \leq c \int (|\eta|^2 + 1)^{-(n+1/2)} d\eta < \infty,$$

а, значит, $\text{Sp } D^{-2p_0} < \infty$ и п. 1°, 2° леммы доказаны.

Далее, из теоремы 10.1 работы [9, с. 336] следует, что спектр оператора $\mathbf{C}$, за исключением конечного числа точек, лежит в углах $-\varepsilon < \arg \lambda < \varepsilon$, $\pi - \varepsilon < \arg \lambda < \pi + \varepsilon$. Рассмотрим для определенности случай $\text{Re } \lambda_j > 0$. Собственная функция $\{u_j, v_j\}^T$ удовлетворяет уравнениям

$$Au_j + Bv_j = \lambda_j u_j, \quad B^* u_j + A^* v_j = -\lambda_j v_j. \quad (14)$$

Домножая первое уравнение скалярно на u_j , второе на v_j и складывая их, получим соотношение

$$(Au_j, u_j) + (Bv_j, u_j) + (B^* u_j, v_j) + (A^* v_j, v_j) = \lambda_j \{(u_j, u_j) - (v_j, v_j)\}. \quad (15)$$

Поскольку $A^+ = A$, $(A^*)^+ = A^*$, $B^+ = B^*$, то левая часть равенства (7) вещественна. Следовательно, $\text{Im } \lambda_j$ может быть отлично от нуля лишь в случае

$$(u_j, u_j) - (v_j, v_j) = 0. \quad (16)$$

Покажем, что существует такое R , что при $\text{Re } \lambda_j > R$ равенство (16) не выполняется, а, значит, справедливо утверждение п. 3° а) леммы. Из второго уравнения (14) получим

$$v_j = -(A^* + \lambda_j)^{-1} B^* u_j. \quad (17)$$

Пусть $(u_j, u_j) + (v_j, v_j) = 1$. Поскольку главная часть оператора A равна $-\frac{1}{2}\Delta$, а B — ограниченный оператор, то существует такое $R > 0$, что при $\text{Re } \lambda_j > R$ справедливо неравенство $\|(A^* + \lambda_j)^{-1} B\| < 1/4$. Следовательно, выбрав достаточно большое число R , для всех λ_j , лежащих в угле $-\varepsilon < \arg \lambda_j < \varepsilon$, при $|\lambda_j| > R$ получим $\|v_j\|^2 \leq \frac{1}{4}\|u_j\|^2$ и в силу нормировки $\|u_j\|^2 \geq \frac{4}{5}$. Далее,

$$\|u_j\|^2 - \|v_j\|^2 \geq \frac{3}{4}\|u_j\|^2 \geq \frac{3}{5}. \quad (18)$$

Таким образом, при $\text{Re } \lambda_j > R$ равенство (16) не выполняется и, следовательно, п. 3° а) доказан.

Для $\lambda_j > R$ неравенство (11) следует из неравенства (18). Для $\text{Re } \lambda_j < -R$ из первого уравнения получим

$$u_j = -(A - \lambda_j)^{-1} Bv_j. \quad (19)$$

Рассуждения, аналогичные выше приведенным, доказывают существование такого числа R , что при $\text{Re } \lambda_j < -R$ собственные числа вещественны и

$$\|v_j\|^2 - \|u_j\|^2 > \frac{3}{5}, \quad \|v_j\|^2 + \|u_j\|^2 = 1. \quad (20)$$

Тем самым доказано неравенство (11) и для $\lambda_j < -R$.

Докажем п. 3° б). Нетрудно проверить, что

$$C^+ = \begin{pmatrix} A & -B \\ B^* & -A^* \end{pmatrix}, \quad C^+ \{u_j, -v_j\}^T = \lambda_j \{u_j, -v_j\}^T. \quad (21)$$

Для существования присоединенного вектора к собственному вектору $\{u_j, v_j\}^T$ оператора C необходима ортогональность вектора $\{u_j, v_j\}^T$ к собственному вектору сопряженного оператора, т.е. к вектору $\{u_j, -v_j\}^T$. Скалярное произведение этих векторов, очевидно, равно $(u_j, u_j) - (v_j, v_j)$. В силу неравенств (18), (20) при $|\lambda_j| > R$ это скалярное произведение не равно нулю, а, значит, справедливо утверждение 3° б). Лемма доказана.

Поскольку мы рассматриваем более общую ситуацию, чем в [1], [5], то функции $\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}$ будем выбирать некоторым специальным способом из прямой суммы корневых пространств, отвечающих паре $(\lambda, -\lambda)$ или четверке $(\lambda, -\lambda, \lambda^*, -\lambda^*)$ собственных чисел. Обозначим через R_{λ_j} корневое пространство, отвечающее собственному значению λ_j , и введем операторы

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} JI = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Справедлива лемма.

ЛЕММА 2. 1°. Если λ_j – собственное значение оператора $C\varphi = \lambda_j\varphi$, то $-\lambda_j^*$ – также собственное значение оператора C и

$$CJ(\varphi^*) = -\lambda_j^* J(\varphi^*).$$

2°. При $\lambda_j + \lambda_k \neq 0$ элементы корневых пространств R_{λ_j} и R_{λ_k} косоортогональны относительно формы

$$\langle IX, Y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_M (X_2 Y_1 - X_1 Y_2) dx. \quad (23)$$

3°. Положим $R_j \stackrel{\text{def}}{=} R_{\lambda_j} \oplus R_{-\lambda_j}$, если λ_j вещественно или мнимо, и $R_j \stackrel{\text{def}}{=} R_{\lambda_j} \oplus R_{-\lambda_j^*} \oplus R_{\lambda_j^*} \oplus R_{-\lambda_j}$, если $\text{Im } \lambda_j \neq 0$ и $\text{Re } \lambda_j \neq 0$. Тогда

- а) форма $\langle IX, Y \rangle$ на R_j не вырождена;
- б) R_j имеет четную размерность $2m_j$;
- в) $R_{-\lambda_j^*} = J(R_{\lambda_j^*})$, $J(R_j^*) = R_j$;
- г) R_j, R_k при $k \neq j$ косоортогональны относительно $\langle IX, Y \rangle$.

4°. Пусть P_{R_j} – ортопроектор $L_2(M) \oplus L_2(M)$ на R_j . В R_j существует m_j собственных векторов φ_j^α оператора $P_{R_j} L P_{R_j}$ с положительными собственными значениями $\kappa_j^\alpha > 0$ и m_j векторов $J(\varphi_j^{\alpha*})$ с отрицательными собственными значениями $-\kappa_j^\alpha$. Эти векторы образуют базис в R_j и удовлетворяют соотношениям

$$\langle I\varphi_j^\alpha, J(\varphi_j^{\beta*}) \rangle = \delta_{\alpha\beta} \kappa_\alpha, \quad \langle I\varphi_j^\alpha, \varphi_j^\beta \rangle = 0, \quad \langle IJ(\varphi_j^{\alpha*}), J(\varphi_j^{\beta*}) \rangle = 0. \quad (24)$$

5°. Существует такое число R , что при $|\lambda_j| > R$ в качестве $J(\varphi_j^{\alpha*})$, $\alpha = 1, \dots, m_j$, можно принять ортонормированную систему собственных векторов оператора C , отвечающую $\lambda_j > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. В уравнении (14) для собственных векторов перейдем к комплексно сопряженным величинам. Получим

$$A^* u_j^* + B^* v_j^* = -(-\lambda_j^*) u_j^*, \quad B u_j^* + A v_j^* = (-\lambda_j^*) v_j^*. \quad (25)$$

Из (25) следует, что $\{v_j^*, u_j^*\}^T$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{C} \{v_j^*, u_j^*\}^T = -\lambda_j^* \{v_j^*, u_j^*\}^T,$$

что и требовалось доказать.

2°. Если $X_k = \{u_k, v_k\}^T$, $Y_j = \{u_j, v_j\}^T$ – собственные векторы, то косоортogonalность X_k, Y_j при $\lambda_j + \lambda_k \neq 0$ стандартными рассуждениями нетрудно получить из соотношений (10) и равенства $H^T = H$, вытекающего из равенств $B^T = B$, $A^+ = A$. Пусть, далее, $X_{k\nu}$, $\nu = 0, \dots, \mu$, цепочка присоединенных векторов, отвечающая λ_k ,

$$(IH - \lambda_k)X_{k\nu} = X_{k(\nu-1)}, \quad X_{k0} \stackrel{\text{def}}{=} \{u_k, v_k\}^T, \quad X_{k,-1} \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$

а $Y_{j\beta}$, $\beta = 0, 1, \dots, \sigma$, – цепочка присоединенных векторов, отвечающая λ_j ,

$$Y_{j0} \stackrel{\text{def}}{=} \{u_j, v_j\}^T, \quad Y_{j,-1} \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Из очевидного тождества

$$\langle I(IH - \lambda_k)X, Y \rangle = -\langle IX, (IH + \lambda_k)Y \rangle \quad (26)$$

для цепочек присоединенных векторов $Y_{j\beta}$, $X_{k\nu}$ следуют соотношения

$$\langle IX_{k(\nu-1)}, Y_{j\beta} \rangle = -\langle IX_{k\nu}, Y_{j(\beta-1)} \rangle - (\lambda_j + \lambda_k) \langle IX_{k\nu}, Y_{j\beta} \rangle. \quad (27)$$

Итак, пусть $\lambda_j + \lambda_k \neq 0$. Положим в (27) $\nu = 0$, тогда

$$-\langle IX_{k0}, Y_{j(\beta-1)} \rangle = (\lambda_j + \lambda_k) \langle IX_{k0}, Y_{j\beta} \rangle, \quad \beta = 0, 1, \dots, \sigma. \quad (28)$$

Поскольку $Y_{j,-1} = 0$, то из (28) получим

$$\langle IX_{k0}, Y_{j\beta} \rangle = 0, \quad \beta = 0, 1, \dots, \sigma. \quad (29)$$

Воспользуемся методом математической индукции и предположим, что

$$\langle IX_{k\gamma}, Y_{j\beta} \rangle = 0, \quad \beta = 0, 1, \dots, \sigma, \quad \gamma > 0. \quad (30)$$

Тогда из (27) для $\nu = \gamma + 1$ следуют равенства

$$-\langle IX_{k(\gamma+1)}, Y_{j(\beta-1)} \rangle = (\lambda_j + \lambda_k) \langle IX_{k(\gamma+1)}, Y_{j\beta} \rangle. \quad (31)$$

Последовательно переходя в (31) от значений $\beta = 0$ к значениям $\beta = \sigma$ получим, что

$$\langle IX_{k(\gamma+1)}, Y_{j\beta} \rangle = 0, \quad \beta = 0, 1, \dots, \sigma. \quad (32)$$

П. 2° доказан.

3°. г) Из определения пространств R_l следует, что векторы $X \in R_j, Y \in R_k$ при $k \neq j$ разлагаются в суммы

$$X = \sum_{i=1}^4 X_j^i, \quad Y = \sum_{m=1}^4 Y_k^m,$$

где $X_j^i, Y_k^m, 1 \leq i, m \leq 4$, либо нули, либо принадлежат корневым пространствам $R_{\lambda_i}, R_{\lambda_m}$, для которых $\lambda_i + \lambda_m \neq 0$. Следовательно, в силу п. 2° $\langle IX, Y \rangle = 0, X \in R_j, Y \in R_k, j \neq k$.

а) Предположим, что форма $\langle IX, Y \rangle$ на R_j вырождена. Тогда существует такой вектор $e \in R_j, e \neq 0$, что $\langle Ie, Y \rangle = 0$ для всех $Y \in R_j$. В силу п. 3° г) $\langle Ie, X \rangle = 0$ для всех $X \in R_k, k \neq j$. Резюмируя получим, что

$$(X, Ie^*) = 0 \quad \text{для } X \in R_j, \quad 1 \leq j < \infty. \quad (33)$$

Поскольку конечные суммы корневых пространств, а, следовательно, и пространств R_j , по лемме 1 образуют плотное множество, то из (33) следует, что Ie^* ортогонален всюду плотному множеству, а, значит, $Ie^* = 0$. Применив к этому равенству операцию комплексного сопряжения, получим $Ie = 0$ и, значит, в силу обратимости I вектор $e = 0$.

3°. в) Докажем, что если g_j – собственный (присоединенный) вектор, отвечающий собственному значению λ_j , то $J(g_j^*)$ – собственный (присоединенный) вектор, отвечающий собственному значению $-\lambda_j^*$. (Оператор J определен в (22).) Собственные и присоединенные функции $g_1, \dots, g_\mu$ из корневого пространства R_{λ_j} удовлетворяют уравнению вида

$$Cg_k = \sum_{j=1}^{\mu} h_{kj} g_j, \quad k = 1, \dots, \mu. \quad (34)$$

Поскольку J^2 – единичная матрица, а $C = IH$, то

$$JIH^* J J g_k^* = \sum_{j=1}^{\mu} h_{kj}^* J g_j^*.$$

Прямыми вычислениями получим, что $JIH^* J = -C$, а, следовательно,

$$C(Jg_k^*) = - \sum_{j=1}^{\mu} h_{kj}^* (Jg_j^*). \quad (35)$$

Пусть $X_{k\nu}, \nu = 0, \dots, \mu$, – рассмотренная в п. 2° цепочка присоединенных векторов:

$$CX_{k0} = \lambda_k X_{k0}, \quad CX_{k\nu} = \lambda_k X_{k\nu} + X_{k(\nu-1)}, \quad 1 \leq \nu \leq \mu. \quad (36)$$

Из (35) следует, что $(-1)^\nu J(X_{k\nu}^*), \nu = 0, \dots, \mu$, – цепочка присоединенных векторов, отвечающая собственному значению $-\lambda_k^*$.

Очевидно, отсюда следует совпадение размерностей корневых пространств R_{λ_j} и $R_{-\lambda_j^*}$ и соотношение $J(R_{\lambda_j}^*) = R_{-\lambda_j^*}$. Используя это соотношение и определение пространства R_j , получим утверждение 3° в). Утверждение 3° б) следует из линейной независимости корневых пространств, отвечающих различным собственным значениям, и из полученного выше равенства размерностей пространств R_{λ_j} и $R_{-\lambda_j^*}$.

4°. Самосопряженный оператор $P_{R_j}LP_{R_j}$ (см. (22)) на конечномерном пространстве R_j имеет полную ортогональную систему собственных функций $e_1, \dots, e_{2m_j}$. Покажем, что $P_{R_j}LP_{R_j}$ на R_j не имеет нулевых собственных значений. Предположим противное, и пусть $P_{R_j}LP_{R_j}e_1 = 0$. Тогда для всех $Y \in R_j$ имеем

$$(P_{R_j}LP_{R_j}e_1, Y) = (Le_1, Y) = \langle JIe_1, Y^* \rangle = \langle Je_1, J(Y^*) \rangle = 0. \quad (37)$$

В силу 3° в) $J(R_j^*) = R_j$. Поэтому из (37) следует, что $\langle Je_1, Y \rangle = 0$, $Y \in R_j$. Однако, это противоречит невырожденности формы $\langle IX, Y \rangle$ на R_j (п. 3° а)). Следовательно, оператор $P_{R_j}LP_{R_j}$ на R_j не имеет нулевых собственных значений.

Покажем, что собственные значения оператора $P_{R_j}LP_{R_j}$ разбиваются на пары $\kappa_k, -\kappa_k$. В базисе $e_1, \dots, e_{2m_j}$ оператор $P_{R_j}LP_{R_j}$ имеет матрицу $(Le_i, e_j) = \kappa_j \|\delta_{ij}\|$, где $P_{R_j}LP_{R_j}e_i = \kappa_i e_i$. Далее, векторы $J(e_i^*), i = 1, \dots, 2m_j$, также образуют ортогональный базис в R_j :

$$(J(e_i^*), J(e_k^*)) = (J^2 e_i^*, e_k^*) = (e_i, e_k)^* = \delta_{ik}.$$

В этом базисе оператор $P_{R_j}LP_{R_j}$ имеет следующую матрицу:

$$(P_{R_j}LP_{R_j}J(e_k^*), J(e_k^*)) = (JIJ(e_i^*), J(e_k^*)) = (IJ(e_i^*), e_k^*) = -(Le_i, e_k)^* = -\kappa_i \|\delta_{ik}\|, \quad (38)$$

поскольку $IJ = -L$. Из (38) следуют равенства

$$P_{R_j}LP_{R_j}e_j = \kappa_j e_j, \quad P_{R_j}LP_{R_j}J(e_i^*) = -\kappa_i J(e_i^*), \quad (39)$$

обеспечивающие разбиение спектра $\kappa, \dots, \kappa_{2m_j}$ (возможно, содержащего кратные значения) на пары $\kappa_i, -\kappa_i$. Выше мы доказали, что $\kappa_i \neq 0$, $i = 1, \dots, 2m_j$. Следовательно, в спектре есть m_j положительных и m_j отрицательных собственных значений. Не ограничивая общности, будем считать $\kappa_i > 0$, $i = 1, \dots, m_j$, и положим $e_{m_j+k} = J(e_k^*)$. Тогда в силу (39) $P_{R_j}LP_{R_j}J(e_k^*) = -\kappa_k J(e_k^*)$. Покажем, что $e_1, \dots, e_{m_j}, J(e_1^*), \dots, J(e_{m_j}^*)$ образуют базис в R_j .

Имеем $(e_i, e_l) = \delta_{il}$, $1 \leq i, l \leq m_j$. Поскольку $J^2 = E$, то

$$(J(e_i^*), J(e_l^*)) = (e_i, e_l)^* = \delta_{il}, \quad 1 \leq i, l \leq m_j.$$

Далее, векторы e_i отвечают положительным собственным значениям, а $J(e_l^*)$ — отрицательным, следовательно, $(e_i, J(e_l^*)) = 0$. Резюмируя, получим, что $\{e_1, \dots, e_{m_j}, J(e_1^*), \dots, J(e_{m_j}^*)\}$ — ортонормированный базис.

Теперь докажем соотношения (24). Из определения векторов e_l следует, что

$$\begin{aligned} \kappa_i \delta_{im} &= (Le_i, e_m) = (JIe_i, e_m) = \langle Je_i, J(e_m^*) \rangle, \\ 0 &= \kappa_i (e_i, J(e_j^*)) = (JIe_i, J(e_j^*)) = \langle Je_i, e_j \rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

Полагая $\varphi_j^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m_j$, из (40) получим первые два соотношения (24). Последнее из соотношений (24) доказывается аналогично второму из соотношений (40).

5°. Из леммы 1 следует, что при $|\lambda_j| > R$ собственное значение вещественно и не имеет присоединенных векторов. Следовательно, $R_j = R_{\lambda_j} \oplus R_{-\lambda_j}$. Пусть $e_1, \dots, e_{m_j}$ – базис из собственных векторов в R_{λ_j} , $\lambda_j < 0$. Из п. 1° следует, что $J(e_1^*), \dots, J(e_{m_j}^*)$ – базис из собственных векторов в $R_{-\lambda_j}$. Поскольку векторы $e_1, \dots, e_{m_j}$ (и векторы $J(e_1^*), \dots, J(e_{m_j}^*)$) отвечают одному собственному значению $\lambda_j(-\lambda_j)$, то из соотношения

$$\langle I(IH e_i), e_m \rangle = -\langle I e_i, (IH) e_m \rangle, \quad |\lambda_j| > R,$$

следует, что $\langle I e_i, e_m \rangle = 0$, $1 \leq i, m \leq m_j$, и, аналогично, $\langle I J(e_i^*), J(e_m^*) \rangle = 0$. Последнее соотношение можно записать в виде $\langle L e_i, J(e_m^*) \rangle = 0$, $1 \leq i, m \leq m_j$, из которого следует, что подпространство с базисом $\{e_1, \dots, e_{m_j}\}$ инвариантно относительно оператора $P_{R_j} L P_{R_j}$. Пусть $e_1, \dots, e_{m_j}$ выбраны из собственных векторов этого оператора: $P_{R_j} L P_{R_j} e_i = \kappa_i e_i$. Определим знак κ_i , с этой целью домножим скалярно это равенство на e_i :

$$(L e_i, e_i) = \langle I e_i, J(e_i^*) \rangle = (e_i^2, e_i^2) - (e_i^1, e_i^1) = \kappa_i \{ (e_i^1, e_i^1) + (e_i^2, e_i^2) \}.$$

Из (11) следует, что $(e_i^2, e_i^2) - (e_i^1, e_i^1) > 0$, значит, $\kappa_i > 0$. Выше в п. 4° доказано, что $L J(e_i^*) = -\kappa_i J(e_i^*)$, кроме того, в силу п. 1° – $\mathbf{C} J(e_i^*) = -\lambda_j J(e_i^*)$, $-\lambda_j > 0$. Отсюда следует утверждение 5°. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если операторы A, B действуют в линейном конечномерном пространстве L_m , то для оператора $\mathbf{C}$ в $L_m \oplus L_m$ справедлива лемма 2.

Для построения линейного канонического преобразования (5) определим $\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T$ соотношением

$$\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J(\varphi_j^{\alpha*})}{\sqrt{\kappa_j^\alpha}}, \quad \alpha = 1, \dots, m_j, \quad 1 \leq j < \infty. \quad (41)$$

Поскольку пространства R_j инвариантны относительно оператора $\mathbf{C}$, а $\varphi_j^\alpha, J(\varphi_j^{\alpha*})$, $\alpha = 1, \dots, m_j$, образуют базис в R_j , то существует такая блочная матрица $\|W_{km}^j\|$, $1 \leq k, m \leq 2$, что

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T &= \sum_{\beta=1}^{m_j} W_{11, \alpha\beta}^j \{u_j^\beta, v_j^\beta\}^T + \sum_{\beta=1}^{m_j} W_{12, \alpha\beta}^j \{v_j^{\beta*}, u_j^{\beta*}\}^T, \\ \mathbf{C}\{v_j^{\alpha*}, u_j^{\alpha*}\}^T &= \sum_{\beta=1}^{m_j} W_{21, \alpha\beta}^j \{u_j^\beta, v_j^\beta\}^T + \sum_{\beta=1}^{m_j} W_{22, \alpha\beta}^j \{v_j^{\beta*}, u_j^{\beta*}\}^T. \end{aligned} \quad (42)$$

Справедлива лемма.

ЛЕММА 3. Матрицы W_{pq}^j , $1 \leq j < \infty$, $1 \leq p, q \leq 2$, удовлетворяют соотношениям

$$W_{21}^j = -W_{12}^{j*}, \quad W_{22}^j = -W_{11}^{j*}, \quad (W_{11}^j)^+ = W_{11}^j, \quad (W_{12}^j)^T = W_{12}^j. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (35) следует, что

$$W_{11}^{j*} = -W_{22}^j, \quad W_{12}^{j*} = -W_{21}^j. \quad (44)$$

Итак, нам осталось проверить симметричность W_{12}^j и самосопряженность W_{11}^j .

Из (24), (42) и формулы $\mathbf{C} = I\mathbf{H}$ (см. (10)) получим выражения

$$W_{12, \alpha\gamma}^j = -\langle \{u_j^\gamma, v_j^\gamma\}^T, H\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T \rangle, \quad W_{11, \alpha\gamma}^j = +\langle J\{u_j^{\gamma*}, v_j^{\gamma*}\}^T, H\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T \rangle, \\ \text{где } \langle Y, X \rangle = \int_M (Y_1 X_1 + Y_2 X_2) dx. \quad (45)$$

Поскольку $H^T = H$, то из первого соотношения (45) следует, что $W_{12, \alpha\gamma}^j = W_{12, \gamma\alpha}^j$, т.е. $W_{12}^{jT} = W_{12}^j$. Далее, из (10) следует, что $J^2 = E$, $JHJ = H^*$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle J\{u_j^{\gamma*}, v_j^{\gamma*}\}^T, H\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T \rangle &= \langle JHJ\{u_j^{\gamma*}, v_j^{\gamma*}\}^T, J\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T \rangle \\ &= \langle H^*\{u_j^{\gamma*}, v_j^{\gamma*}\}^T, J\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T \rangle \\ &= \langle J\{u_j^{\alpha*}, v_j^{\alpha*}\}^T, H\{u_j^\gamma, v_j^\gamma\}^T \rangle^*. \end{aligned} \quad (46)$$

Соотношение (46) в точности означает, что $W_{11, \alpha\gamma}^j = W_{11, \gamma\alpha}^{j*}$, т.е. $W_{11}^{j+} = W_{11}^j$. Лемма доказана.

Теперь, используя формулу (41), определим операторы $\mathbf{U}(x, y)$, $\mathbf{V}(x, y)$ соотношениями (5). Справедлива теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть потенциалы $U(x)$, $V(x, y)$ удовлетворяют условию 1. Тогда
1°. Оператор $\mathbf{U}$ ограничен в $L_2(M)$, а операторы $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^+$ являются операторами Гильберта–Шмидта.

2°. Преобразование (4) имеет ограниченное обратное преобразование, определяемое выражениями

$$\psi = \mathbf{U}\xi + \mathbf{V}^*\xi^+, \quad \psi^+ = \mathbf{V}\xi + \mathbf{U}^*\xi^+. \quad (47)$$

3°. Преобразование (5) является собственным каноническим преобразованием.

4°. Положим в (6) $A_j \stackrel{\text{def}}{=} W_{11}^{j*}$, $B_j \stackrel{\text{def}}{=} -W_{12}^{j*}$, тогда собственное каноническое преобразование (5) приводит квадратичный оператор (1), (2) к виду (7), (9) с константой $|\gamma| < \infty$.

5°. Пусть вещественное число μ не принадлежит спектру операторов $\mathbf{C}$, $\pm \frac{1}{2}\Delta$. Тогда

$$N(\lambda, (\mathbf{C} - \mu)^{-2}) = 2\Omega(n)2^{n/2}\lambda^{n/4}\{1 + o(1)\} \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Здесь $N(\lambda, (\mathbf{C} - \mu)^{-2})$ – число собственных значений μ_j оператора $(\mathbf{C} - \mu)^2$, удовлетворяющих неравенству $|\mu_j| > (1/\lambda)$, а $\Omega(n)$ – объем единичного шара в n -мерном пространстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. П. 1°, 3°, 5° характеризуют аналитические свойства операторов $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, а п. 2°, 4° – их алгебраические свойства. П. 1° мы докажем позднее, а сейчас, используя п. 1°, докажем п. 2°, 3°, 4°.

2°. В [1], [5] доказано, что из условия $[\xi(x), \xi^+(y)] = \delta(x - y)$ следует, что операторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\mathbf{U}^+ \mathbf{U} - \mathbf{V}^+ \mathbf{V} = E, \quad \mathbf{U}^T \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbf{U} = 0, \quad (48)$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U}^* - \mathbf{V}^T \mathbf{V}^* = E, \quad \mathbf{U}^+ \mathbf{V}^* - \mathbf{V}^+ \mathbf{U}^* = 0. \quad (49)$$

Отметим, что условия (49) получаются из условий (48) комплексным сопряжением. Проверим, что условия (48) следуют из соотношений (24).

Имеем

$$\mathbf{U}^+ \mathbf{U} - \mathbf{V}^+ \mathbf{V} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{\alpha=1}^{m_i} \{ (u_i^{\alpha}, u_j^{\beta}) - (v_i^{\alpha}, v_j^{\beta}) \} f_j^{\beta}(x) f_i^{\alpha}(y). \quad (50)$$

Учитывая выражение (41), соотношения (24) и п. 3° г) можно записать в виде следующих равенств:

$$(u_i^{\alpha}, u_j^{\beta}) - (v_i^{\alpha}, v_j^{\beta}) = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}, \quad (51)$$

$$\langle u_i^{\alpha}, v_j^{\beta} \rangle - \langle v_i^{\alpha}, u_j^{\beta} \rangle = 0, \quad 1 \leq i, j \leq \infty, \quad 1 \leq \alpha \leq m_i, \quad 1 \leq \beta \leq m_j, \quad (51')$$

$$\text{где } \langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_M f(x) g(x) dx.$$

Очевидно из (51) и (50) следует первое из равенств (48). Аналогично, из (51') получим второе равенство в (48).

Введем в $L_2(M) \oplus L_2(M)$ матричные операторы

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^+ & -\mathbf{V}^+ \\ -\mathbf{V}^T & \mathbf{U}^T \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V}^* \\ \mathbf{V} & \mathbf{U}^* \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Нетрудно проверить, что из соотношений (48), (49) следует равенство $\mathcal{K} \mathcal{A} = E$, т.е. $\mathcal{A}$ является правым обратным оператором для $\mathcal{K}$. Покажем, что оператор $\mathcal{K}$ имеет так же и левый обратный.

Существование правого обратного оператора означает, что область значений $\mathcal{K}$ равна $L_2(M) \oplus L_2(M)$. Если мы докажем, что $\mathcal{K}$ не имеет нулей, из теоремы Банаха будет следовать обратимость $\mathcal{K}$. Предположим противное, т.е. существует не равный нулю вектор $\{f, g\}^T$, что $\mathcal{K} \{f, g\}^T = 0$. Очевидно, что тогда вектор $\{f, -g\}^T$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{U}^+ f + \mathbf{V}^+ (-g) = 0, \quad \mathbf{V}^T f + \mathbf{U}^T (-g) = 0. \quad (53)$$

Используя выражения (5) для ядер операторов $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$, соотношения (53) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{m_j} f_j^{\alpha}(x) \{ (f, u_j^{\alpha}) + ((-g), v_j^{\alpha}) \} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{m_j} f_j^{\alpha}(x) \{ (f, v_j^{\alpha*}) + ((-g), u_j^{\alpha*}) \} &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Из (54) следует, что вектор $\{f, -g\}^T$ ортогонален всем векторам $\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}, \{v_j^{\alpha*}, u_j^{\alpha*}\}, 1 \leq \alpha \leq m_j, 1 \leq j \leq \infty$. В силу формулы (41) и п. 4° леммы 2 эти векторы при $1 \leq \alpha \leq m_j$ образуют базис в R_j . Итак, мы доказали, что $\{f, -g\}^T$ ортогонален всем корневым пространствам, которые по лемме 1 образуют плотное множество в $L_2(M) \oplus L_2(M)$. Значит, $f = 0, g = 0$. Полученное противоречие доказывает обратимость оператора $\mathcal{K}$, а, значит, и равенство $\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\mathcal{K} = \mathcal{K}\mathcal{A} = E. \quad (55)$$

Нетрудно проверить, что из $\mathcal{A}\mathcal{K} = E$ следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U}^+ - \mathbf{V}^*\mathbf{V}^T &= E, & \mathbf{V}^*\mathbf{U}^T - \mathbf{U}\mathbf{V}^+ &= 0, \\ \mathbf{U}^*\mathbf{U}^T - \mathbf{V}\mathbf{V}^+ &= E, & \mathbf{V}\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^*\mathbf{V}^T &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Далее, из соотношений (56) получим, что $\mathcal{K}$ – симплектическое комплексное преобразование:

$$\mathcal{K}^T I \mathcal{K} = I.$$

Домножая это равенство слева на $\mathcal{A}^T$ и справа на $\mathcal{A}$, получим

$$\mathcal{A}^T I \mathcal{A} = I.$$

Далее, нетрудно проверить, что множество матриц $\mathcal{K}, \mathcal{A}$ вида (52), у которых элементы обладают свойством п. 1° теоремы и удовлетворяют соотношениям (48), (49), (56), образуют группу по умножению. П. 2° доказан.

П. 3° следует из теоремы 1 [1, с. 102] и соответственно (см. [1]) существует унитарный оператор Q в $\mathcal{H}_B$ такой, что

$$\xi = Q\psi Q^+, \quad \xi^+ = Q\psi^+ Q^+.$$

П. 4°. Произведем в квадратичном операторе (1) замену (47). Обозначим через $H_{\mathcal{A}}$ матрицу

$$H_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^T H \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{B}^* & \tilde{A}^* \\ \tilde{A} & \tilde{B} \end{pmatrix}, \quad (57)$$

здесь $\tilde{B}, \tilde{A}$ – операторы, которые строятся по A, B прямым перемножением матриц $\mathcal{A}^T H \mathcal{A}$. Нетрудно убедиться, что

$$H_2(\psi^+, \psi) = H_{2, \mathcal{A}}(\xi^+, \xi) + \gamma,$$

где γ определено формулой (7), а $H_{2, \mathcal{A}}(\xi^+, \xi)$ – квадратичный оператор вида (1) с матрицами $\tilde{B}, \tilde{A}$. Покажем, что оператор $H_{2, \mathcal{A}}(\xi^+, \xi)$ разлагается в прямую сумму (9).

Воспользуемся выражением (52) для матрицы $\mathcal{A}$, тогда матрицу $H \mathcal{A}$ удобно представить в виде двухстолбцовой матрицы:

$$H \mathcal{A} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{m_j} (H\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T); \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{m_j} (HJ\{u_j^{\alpha*}, v_j^{\alpha*}\}^T)(x)f_j^\alpha(y) \right). \quad (58)$$

Аналогично матрицу $\mathcal{A}^T$ представим в виде двухстрочной матрицы:

$$\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_k} f_k^{\beta}(x) \{u_k^{\beta}(y), v_k^{\beta}(y)\} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_k} f_k^{\beta}(x) J \{u_k^{\beta*}(y), v_k^{\beta*}(y)\} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Из (58), (59) получим следующие выражения для операторов $\tilde{B}^*$, $\tilde{A}^*$ – элементов матрицы (57):

$$\tilde{B}^* = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_k} \sum_{\alpha=1}^{m_j} f_k^{\beta}(x) f_j^{\alpha}(y) \langle \{u_k^{\beta}, v_k^{\beta}\}^T, H \{u_j^{\alpha}, v_j^{\alpha}\}^T \rangle, \quad (60)$$

$$\tilde{A}^* = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_k} \sum_{\alpha=1}^{m_j} f_k^{\beta}(x) f_j^{\alpha}(y) \langle \{u_k^{\beta}, v_k^{\beta}\}^T, H J \{u_j^{\alpha*}, v_j^{\alpha*}\}^T \rangle. \quad (61)$$

Покажем, что

$$\langle \{u_k^{\beta}, v_k^{\beta}\}^T, H \{u_j^{\alpha}, v_j^{\alpha}\}^T \rangle = 0, \quad \langle \{u_k^{\beta}, v_k^{\beta}\}^T, H J \{u_j^{\alpha*}, v_j^{\alpha*}\}^T \rangle = 0 \quad \text{при } j \neq k. \quad (62)$$

Рассмотрим первое равенство, второе доказывается аналогично. Поскольку $I^2 = -E$, $I' = -I$, $IH = C$, то

$$\langle \{u_k^{\beta}, v_k^{\beta}\}^T, H \{u_j^{\alpha}, v_j^{\alpha}\} \rangle = \langle I \{u_k^{\beta}, v_k^{\beta}\}^T, C \{u_j^{\alpha}, v_j^{\alpha}\} \rangle. \quad (63)$$

Так как $\{u_j^{\alpha}, v_j^{\alpha}\} \subseteq R_j$, $CR_j \subseteq R_j$ и пространства R_k , R_j , $k \neq j$, косоортогональны (п. 3° г) леммы 2), то правая часть (62) равна нулю.

Используя выражения (45) и симметричность оператора H , из (60), (61), получим

$$\tilde{B}^* = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta=1}^{m_j} (-W_{12, \beta \alpha}^j) f_j^{\beta}(x) f_j^{\alpha}(y), \quad \tilde{A}^* = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta=1}^{m_j} W_{11, \beta \alpha}^j f_j^{\beta}(x) f_j^{\alpha}(y). \quad (64)$$

Подставив выражения для $\tilde{B}$ и $\tilde{A}$ из (64) в формулу (57), немедленно получим (7). Далее, заметим, что поскольку λ_j имеют точку сгущения лишь на ∞ , то существует такое $N(R)$, что при $j > N(R)$ выполняется неравенство $|\lambda_j| > R$. Выберем R из п. 5° леммы 2. Тогда при $j > N$ в качестве $\{u_j^{\alpha}, v_j^{\alpha}\}$ можно взять ортогональную систему собственных функций оператора C , отвечающих λ_j . Из формулы (63) и косоортогональности векторов $\{u_j^{\alpha}, v_j^{\alpha}\}$, $1 \leq \alpha \leq m_j$ (см. п. 2° леммы 2) следует, что $W_{12}^j = 0$ при $j > N(R)$.

Теперь вычислим W_{11}^j при $j > N(R)$. Имеем $IH = C$, $I^2 = -E$, $I' = -I$. Следовательно, в силу формул (45), (51) получим

$$\begin{aligned} W_{11, \alpha \gamma}^j &= +\lambda_j \langle I J \{u_j^{\gamma*}, v_j^{\gamma*}\}^T, \{u_j^{\alpha}, v_j^{\alpha}\} \rangle \\ &= \lambda_j \{ \langle u_j^{\alpha}, u_j^{\gamma} \rangle - \langle v_j^{\alpha}, v_j^{\gamma} \rangle \} = \lambda_j \delta_{\alpha \beta}, \quad j > N(R). \end{aligned} \quad (65)$$

Из (65) следуют формулы (8), (9). Ограниченность γ будет показана в последнем пункте доказательства теоремы.

Докажем сначала п. 5°, а затем из спектральной асимптотики п. 5° получим п. 1°.

В силу леммы 1 спектр $\mathbf{C}$ не имеет конечных точек сгущения. Поэтому существует такое число μ , что операторы $(\mathbf{C} - \mu)$, $(\pm \frac{1}{2}\Delta - \mu)$ обратимы. Положим

$$D_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \delta_{ij}(-1)^{i-1} \left\{ -\frac{1}{2}\Delta + (-1)^i \mu \right\} \right\|.$$

Тогда из полной непрерывности оператора D_μ^{-1} и формулы (12) следует, что

$$(\mathbf{C} - \mu) = D_\mu(E + S), \quad (\mathbf{C} - \mu) = (E + \tilde{S})D_\mu, \quad (66)$$

где $S, \tilde{S}$ – вполне непрерывные операторы на $L_2(M) \oplus L_2(M)$. Поскольку $(\mathbf{C} - \mu)$ обратим, то $(E + S)$ также не имеет нулей, а, следовательно, по теореме Фредгольма $(E + S)^{-1}$ существует и ограничен. Далее, область значений $(\mathbf{C} - \mu)$ равна $L_2(M) \oplus L_2(M)$, следовательно, и область значений $(E + \tilde{S})$ равна $L_2(M) \oplus L_2(M)$. Отсюда вытекает, что оператор $(E + \tilde{S}^+)$ не имеет нулей, а, следовательно, по теореме Фредгольма $(E + \tilde{S})^{-1}$ существует и ограничен. Из вышесказанного следуют соотношения

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} - \mu)^{-1} &= (E + S)^{-1} D_\mu^{-1}, \quad (\mathbf{C} - \mu)^{-1} = D_\mu^{-1} (E + \tilde{S})^{-1}, \\ (\mathbf{C} - \mu)^{-2} &= (E + S)^{-1} D_\mu^{-2} (E + \tilde{S})^{-1}, \end{aligned} \quad (67)$$

$$(E + S)(\mathbf{C} - \mu)^{-2}(E + S)^{-1} = D_\mu^{-2}(E + \tilde{S})^{-1}(E + S)^{-1} = D_\mu^{-2}(E + S_1). \quad (68)$$

Покажем, что S_1 вполне непрерывен, а $(E + S_1)$ – обратим. Действительно, из тождества Гильберта для резольвенты получим $(E + S)^{-1} = E - (E + S)^{-1}S$, $(E + \tilde{S})^{-1} = E - (E + \tilde{S})^{-1}\tilde{S}$. Перемножив эти соотношения, найдем $(E + S)^{-1}(E + \tilde{S})^{-1}S = E + S_1$, где S_1 вполне непрерывен. Очевидно, $(E + S_1)^{-1} = (E + \tilde{S})(E + S)$. Отметим, что в формуле (68) $D_\mu^{-2} = \|\delta_{ij}\{-\frac{1}{2}\Delta + (-1)^i \mu\}^2\| > 0$. Теперь, используя асимптотику спектральной функции операторов $\{-\frac{1}{2}\Delta \pm \mu\}^2$ (формулу Куранта–Вейля), из формулы (68) и теоремы М. В. Келдыша [9, теорема 11.1, с. 343] получим соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{N(\lambda, D_\mu^{-2})}{N(\lambda, (\mathbf{C} - \mu)^2)} \rightarrow 1. \quad (69)$$

П. 5° следует из формулы (69) и формулы Куранта–Вейля для операторов $\{-\frac{1}{2}\Delta \pm \mu\}^2$.

1°. а) Предположим сначала, что размерность $n \leq 3$. Докажем, что существует такое положительное число R , что

$$\sum_{\lambda_j > R} \sum_{\lambda_j > R} \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} |(v_i^\alpha, v_j^\beta)|^2 < \infty. \quad (70)$$

Из формулы (17) в силу нормировки $(u_j^\alpha, u_j^\alpha) + (v_j^\alpha, v_j^\alpha) = 1$ и условия (1) получим с некоторой константой a неравенство

$$\|v_j^\alpha\|^2 \leq \frac{a}{\lambda_j^2}, \quad 1 \leq \alpha \leq m_j, \quad \lambda_j > R. \quad (71)$$

Поскольку $|(v_i^\alpha, v_j^\beta)| \leq \|v_i^\alpha\| \cdot \|v_j^\beta\|$, то оценка (71) будет следовать из оценки

$$\sum_{\lambda_i > R} \sum_{\lambda_j > R} \frac{m_i}{\lambda_i^2} \frac{m_j}{\lambda_j^2} = \left(\sum_{\lambda_i > R} \frac{m_i}{\lambda_i^2} \right)^2 < \infty. \quad (72)$$

Заметим, что поскольку $\lambda_i \rightarrow +\infty$, то неравенство (72) эквивалентно неравенству

$$\left(\sum_{\lambda_i > R} \frac{m_i}{(\lambda_i - \mu)^2} \right)^2 < \infty.$$

Далее, для целых значений R, ρ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_j=R+1}^{\rho} (\lambda_i - \mu)^{-2} m_i &\leq \sum_{k=R}^{\rho+1} \sum_{k \leq (\lambda_j - \mu)^2 < k+1} \frac{m_j}{(\lambda_j - \mu)^2} \\ &\leq \sum_{k=R}^{\rho+1} \frac{1}{k} \{ N((k+1), (C - \mu)^{-2}) - N(k, (C - \mu)^{-2}) \}. \end{aligned} \quad (73)$$

Используя тождество

$$\sum_{i=1}^N (b_i - b_{i-1}) a_i = \sum_{j=1}^{N-1} b_j (a_j - a_{j+1}) + b_N a_N - b_0 a_1,$$

из (73) получим

$$\sum_{\lambda_j=R+1}^{\rho} m_i (\lambda_i - \mu)^{-2} \leq \sum_{k=R}^{\rho+1} N(k, (C - \mu)^{-2}) \frac{1}{k(k+1)} + \frac{N((\rho+1)^2, (C - \mu)^{-2})}{(\rho+1)^2}. \quad (74)$$

Для размерностей $n \leq 3$ в силу спектральной оценки п. 5° в (74) можно перейти к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$ и получить оценку (72).

Для размерностей $n \geq 4$, используя дифференцируемость потенциалов $V(x, y), U(x)$, докажем сначала оценку

$$\|B^* u_j\| \leq \frac{a}{\lambda_j^{(n-3)}}, \quad \lambda_j > R. \quad (75)$$

Из (17), (14) для u_j^α получим уравнение

$$(A - \lambda_j) u_j^\alpha = B(A^* + \lambda_j)^{-1} B^* u_j^\alpha. \quad (76)$$

Домножим уравнение (76) слева на оператор $B^*(A^{k-1} + \lambda_j A^{k-2} + \dots + \lambda_j^{k-1})$. Используя интегрирование по частям, нетрудно убедиться, что оператор $(B^* A^k)$ ограничен при

$k \leq (n-3)$ и, следовательно, при $k \leq (n-3)$ мы имеем право провести умножение. В результате умножения из (76) получим

$$(B^* A^k) u_j^\alpha - \lambda_j^k B^* u_j^\alpha = \{ (B^* A^{k-1}) + \lambda_j (B^* A^{k-2}) + \dots + B^* \lambda_j^{k-1} \} B (A^* + \lambda_j)^{-1} (B^* u_j^\alpha), \quad (77)$$

$$\{ 1 + \widehat{O}(|\lambda_j|^{-2}) \} (B^* u_j^\alpha) = \lambda_j^{-k} (B^* A^k) u_j^\alpha, \quad (78)$$

где $\widehat{O}(|\lambda_j|^{-2}) \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda_j^{-k} (B^* A^{k-1}) + \dots + \lambda_j^{-1} B^*] B (A^* + \lambda_j)^{-1}$.

Поскольку при достаточно больших значениях $|\lambda_j|$ оператор $\{ 1 + O(|\lambda_j|^{-2}) \}$ обратим, то из (78) и нормировки $\|u_j^\alpha\|^2 + \|v_j^\alpha\|^2 = 1$ следует неравенство

$$\|B^* u_j^\alpha\| \leq \frac{a}{\lambda_j^k}, \quad \lambda_j > R. \quad (79)$$

Величина k зависит от дифференцируемости потенциалов $V(x, y), U(x)$. Из условия (1) следует, что $k \leq n-3$. Из (79) следует (75).

Формулы (75), (17) позволяют получить усиленную оценку

$$\|v_j^\alpha\|^2 \leq \frac{a}{\lambda_j^{2+(n-3)}}, \quad \lambda_j > R. \quad (80)$$

Из (80) получим

$$\sum_{\lambda_i > R} \sum_{\lambda_j > R} \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} |(v_i^\alpha, v_j^\beta)|^2 \leq \left(\sum_{\lambda_i > R} \frac{m_i}{\lambda_i^{2(n-2)}} \right)^2. \quad (81)$$

Дословно повторяя рассуждения для $n \leq 3$, получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_i > R} \frac{m_i}{\lambda_i^{2(n-2)}} &\leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} N(k, (C - \mu)^{-2}) \frac{1}{k^{n-1}} \\ &\leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n/4}}{k^{n-1}} = \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3n/4-1}}. \end{aligned} \quad (82)$$

Поскольку $\frac{3}{4}n - 1 \geq 2$ при $n \geq 4$, то ряд (82) сходится, и тем самым неравенство (70) доказано и в общем случае.

1°. б) Докажем, что $\mathbf{V}$ – оператор Гильберта–Шмидта. Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} |(v_j^\alpha, v_i^\beta)|^2 &\leq \sum_{|\lambda_i| \leq R} \sum_{|\lambda_j| \leq R} \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} |(v_i^\alpha, v_j^\beta)|^2 \\ &+ 2 \sum_{|\lambda_i| \leq R} \sum_{|\lambda_j| > R} \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} |(v_i^\alpha, v_j^\beta)|^2 + \sum_{\lambda_i > R} \sum_{\lambda_j > R} |(v_i^\alpha, v_j^\beta)|^2. \end{aligned} \quad (83)$$

Поскольку спектр оператора $\mathbf{C}$ не имеет конечных точек сгущения, то: а) первая сумма в правой части (83) конечна; б) вторая сумма по неравенству Коши–Буняковского оценивается через

$$\text{const} \sum_{\lambda_j > R} \sum_{\beta=1}^{m_j} |v_j^\beta|^2,$$

а третья сумма была оценена выше. Из неравенства (80) и оценки (82) следует конечность второй суммы в (83). Тем самым доказано: сумма в левой части (83) ограничена, а, следовательно, $\mathbf{V}$ – оператор Гильберта–Шмидта.

1°. в) Докажем ограниченность оператора $\mathbf{U}$. С этой целью рассмотрим его на плотном множестве векторов

$$f_N = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=1}^{m_j} a_j^\alpha f_j^\alpha(x), \quad N < \infty :$$

$$\mathbf{U} f_N = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=1}^{m_j} u_j^\alpha(x) a_j^\alpha, \quad \|\mathbf{U} f_N\| = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=1}^{m_j} |a_j^\alpha|^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} a_i^\alpha a_j^{\beta*} (v_i^\alpha, v_j^\beta). \quad (84)$$

Второе из равенств (84) следует из соотношений (51). Далее, из оценки (70) и (84) следует равномерная ограниченность оператора $\mathbf{U}$ на плотном множестве, а, значит, и его ограниченность на $L_2(M)$.

4°. Ограниченность константы γ в разложении (7). Воспользуемся формулой (7) для γ . Ядро

$$\int_M \mathbf{V}(x, z) \mathbf{U}^*(y, z) dz,$$

очевидно, равно ядру оператора $\mathbf{V}\mathbf{U}^+$, где $\mathbf{V}$ – оператор Гильберта–Шмидта, $\mathbf{U}$ ограничен. Из формул (2.1)–(2.3) [9, с. 47] получим неравенства для s чисел

$$s_j(\mathbf{V}\mathbf{U}^+) \leq \|\mathbf{U}\| s_j(\mathbf{V}), \quad s_j(\mathbf{U}\mathbf{V}^+) \leq \|\mathbf{U}\| s_j(\mathbf{V}).$$

Следовательно, операторы $\mathbf{V}\mathbf{U}^+$, $\mathbf{U}\mathbf{V}^+$ также являются операторами Гильберта–Шмидта, и интегралы

$$\iint_{M^2} B(x, y) \left\{ \int_M \mathbf{V}(x, z) \mathbf{U}^*(y, z) dz \right\} dx dy,$$

$$\iint_{M^2} B(x, y) \left\{ \int_M \mathbf{U}(x, z) \mathbf{V}^*(y, z) dz \right\} dx dy$$

по $dx dy$ являются интегралами от произведения двух функций из $L_2(M)$, а, значит, ограничены.

Поскольку функции $v_j^\alpha(x)$, входящие в выражение (5) для оператора $\mathbf{V}$, при $j > N$ являются собственными функциями с $\lambda_j > R > 0$, то ограниченность второго члена в выражении (7) для γ будет следовать из ограниченности суммы

$$\sum_{\lambda_j > R} \sum_{\alpha=1}^{m_j} \lambda_j \|v_j^\alpha\|^2. \quad (85)$$

Используя формулу (17), запишем сумму (85) в виде

$$\sum_{\lambda_j > R} \sum_{\alpha=1}^{m_j} \lambda_j \|(A^* + \lambda_j)^{-1} B^* u_j^\alpha\|^2. \quad (86)$$

Из теоремы 2.1 работы [9, с. 374] следует, что из ограниченности оператора $\|(u_j^\alpha, u_k^\beta)\|$ в L_2 вытекает, что векторы $\{u_j^\alpha, 1 \leq \alpha \leq m_j, 1 \leq j < \infty\}$ на подпространстве $\tilde{L}_2$ ($\tilde{L}_2 \subseteq L_2(M)$), равно замканию их линейной оболочки в $L_2(M)$, образуют базис, эквивалентный ортонормированному: $u_j^\alpha = F g_j^\alpha$, g_j^α – ортонормированный базис в $\tilde{L}_2$, F – ограниченный оператор в $\tilde{L}_2$. Обозначим через $\tilde{P}$ ортогональный проектор $\tilde{L}_2$ на $L_2(M)$. Очевидно,

$$B^* u_j^\alpha = \int_M V(x, y) f_0^*(x) f_0^*(y) u_j^\alpha(y) dy = f_0^*(x) \int_M F^+ \tilde{P} \{V(x, \cdot) f_0^*(\cdot)\} g_j^\alpha(y) dy. \quad (87)$$

Здесь оператор $F^+ \tilde{P}$ действует “по переменной y ”. Из условия (1) следует, что для почти всех $x \in M$ справедливо неравенство

$$\|F^+ \tilde{P} V(x, \cdot) f_0^*(\cdot)\| \leq a, \quad a < \infty. \quad (88)$$

Из (88), (87) получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{m_j} \|B^* u_j^\alpha\|^2 = \iint_{M^2} |f_0^*(x) F^+ \{V(x, \cdot) f_0^*(\cdot)\}|^2 dx dy < \infty. \quad (89)$$

Поскольку $\lambda_j \|(A^* + \lambda_j)^{-1}\| \leq \text{const}$ при $\lambda_j > R$, то из (86), (89) следует ограниченность суммы (85). Итак, доказано, что трое слагаемых, входящих в выражение константы γ , ограничены. Следовательно, $|\gamma| < \infty$. Теорема доказана.

Классификация конечномерных квадратичных операторов $H^j(a_j^+, a_j)$ осуществляется на основе конечномерных собственных канонических преобразований операторов a_j^+, a_j :

$$\xi_j = \mathbf{U}_j^+ a_j - \mathbf{V}_j^+ a_j^+, \quad \xi_j^+ = -\mathbf{V}_j^T a_j + \mathbf{U}_j^T a_j^+. \quad (90)$$

Здесь $\mathbf{U}_j$, $\mathbf{V}_j$ – конечномерные матрицы. Введем оператор $\mathcal{A}_j$ по формуле (52), заменив $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ на $\mathbf{U}_j$, $\mathbf{V}_j$. Рассмотрим взаимосвязь конечномерных канонических преобразований $\mathcal{A}_j$, формы H^j и линейных кососимметричных преобразований S_j фазового пространства $R_{x,p}^{2m_j}$. Положим $z_\alpha = x^\alpha + ip^\alpha$, $z_\alpha^* = x^\alpha - ip^\alpha$. Переход от вектора $\{x, p\}^T$ к вектору $\{z, z^*\}^T$ осуществляется матрицей K : $K_{11} = E$, $K_{12} = iE$, $K_{21} = E$, $K_{22} = -iE$. Из соотношения $(K^T)^{-1} I K^{-1} = \frac{i}{2} I$ с очевидностью следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если S – матрица вещественного канонического преобразования, то справедливо следующее.

1°. Матрица $\mathcal{A}_j = K S_j K^{-1}$ удовлетворяет соотношению (58) и матрицы $\mathbf{U}_j$, $\mathbf{V}_j$, определяющие матрицу $\mathcal{A}_j$, выражаются через элементы $S_{j,pq}$ матрицы S_j по формулам

$$\mathbf{U}_j = \frac{1}{2}(S_{j,22} + S_{j,11}) + \frac{i}{2}(S_{j,21} - S_{j,12}), \quad \mathbf{V}_j = \frac{1}{2}(S_{j,11} - S_{j,12}) - \frac{i}{2}(S_{j,21} + S_{j,12}). \quad (91)$$

2°. Матрицы U_j, V_j удовлетворяют соотношениям (48), (49), (56), и формулы (90) определяют конечномерное каноническое преобразование, т.е. $[\xi_j^\alpha, \xi_j^{\beta+}] = \delta_{\alpha\beta}$, $[\xi_j^\alpha, \xi_j^\beta] = 0$, $[\xi_j^{\alpha+}, \xi_j^{\beta+}] = 0$.

Далее, подставим формально в квадратичный оператор H^j вместо a_j^+ , a_j соответственно $z = x + ip$, $z^* = x - ip$. Получим вещественную форму $H_j(x, p)$:

$$H_j(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \langle B^* z, z \rangle + \langle A z^*, z \rangle + \frac{1}{2} \langle B z^*, z^* \rangle. \quad (92)$$

Здесь $\langle a, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^{m_j} a_\alpha b_\alpha$. Квадратичные гамильтонианы линейными каноническими преобразованиями фазового пространства $R_{x,p}^{2m_j}$ приводятся к серии канонических форм [10], [11], в зависимости от структуры корневых пространств.

Подставим в формулу (10), определяющую оператор C , вместо A, B соответственно A_j, B_j . Полученный оператор обозначим через C_j . Справедливо утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. 1°. Матрицы $\frac{i}{2} I \text{Hess } H_j(x, p)$ и C_j подобны.

2°. Матрица C_j может иметь спектр

$$\begin{aligned} &\lambda_j, -\lambda_j, \text{ если } \lambda_j \text{ вещественно или мнимо;} \\ &\lambda_j, -\lambda_j, \lambda_j^*, \lambda_j^*, \text{ если } \text{Im } \lambda_j \neq 0, \text{ Re } \lambda_j \neq 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H_j}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_j}{\partial x}. \quad (93)$$

Введем операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial p} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial p} \right).$$

Тогда

$$\frac{\partial H_j}{\partial p} = i \left(\frac{\partial H_j}{\partial z} - \frac{\partial H_j}{\partial z^*} \right), \quad \frac{\partial H_j}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_j}{\partial z} + \frac{\partial H_j}{\partial z^*} \right)$$

и из (93) следует известная система для z, z^* :

$$i\dot{z} = 2 \frac{\partial H_j}{\partial z^*}, \quad i\dot{z}^* = -2 \frac{\partial H_j}{\partial z}. \quad (94)$$

Подставим в формулу (94) выражение (92) для H_j . Используя оператор C_j , систему (94) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \{z, z^*\}^T = -2i C_j \{z, z^*\}^T. \quad (95)$$

Далее, используя матрицу K^{-1} для перехода от $\{z, z^*\}^T$ к $\{x, p\}^T$, из (95) получим

$$\frac{d}{dt} \{x, p\}^T = -2i K^{-1} C_j K \{x, p\}^T \quad (96)$$

и соответственно из (93) получим

$$\frac{d}{dt}\{x, p\}^T = (I \text{Hess } H_j)\{x, p\}^T. \quad (97)$$

Итак, любое решение системы (97) удовлетворяет (96). Поскольку левые части в (96), (97) совпадают, то

$$\{2iK^{-1}\mathbf{C}_j K + I \text{Hess } H_j\} \times \{x(0), p(0)\}^T = 0. \quad (98)$$

Из произвольности начальных данных $\{x(0), p(0)\}^T$ в силу (98) получим п. 1° утверждения. Из определения матриц A_j, B_j (см. условие теоремы п. 4°), формулы (42) и леммы 3 следует, что матрица $\mathbf{C}_j$ равна транспонированной матрице от матрицы ограничения $\mathbf{C}|_{R_j}$ на инвариантном пространстве R_j в базисе $\{u_j^\alpha, v_j^\alpha\}^T, J\{u_j^{\alpha*}, v_j^{\alpha*}\}^T$. (Напомним, что пространство R_j по определению п. 3° леммы 2 инвариантно относительно $\mathbf{C}$.) Поскольку спектр матриц $(\mathbf{C}|_{R_j})^T, \mathbf{C}|_{R_j}$ совпадает, а спектр $\mathbf{C}|_{R_j}$ в силу определения пространства R_j удовлетворяет п. 2°, то и спектр матрицы $\mathbf{C}_j$ удовлетворяет условиям п. 2°. Утверждение доказано.

Из утверждений 1, 2 следует, что собственным каноническим преобразованием операторов a_j^+, a_j квадратичный оператор $H^j(a_j^+, a_j)$ можно привести к каноническим формам, которые получаются из канонических форм квадратичного гамильтониана $H_j(x, p)$ [10], [11] заменой $x = \frac{1}{2}(a_j^+ + a_j), p = \frac{1}{2i}(a_j - a_j^+)$.

Спектр операторов $H^j(a_j^+, a_j)$. В силу утверждения 2 спектр матрицы $I \text{Hess } H_j$ получается из спектра $\mathbf{C}_j$ умножением на $-2i$. Рассмотрим два важных примера.

ПРИМЕР 1. Спектр $\mathbf{C}_j$ вещественный $-b, b$, но матрица $\mathbf{C}_j$ имеет пару жордановых клеток второго порядка. Из [11] получим, что в этом случае гамильтониан $H_j(q, p)$ можно привести к виду

$$H_j = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} q_1^2 + q_2^2 \right) - b^2 p_1 q_2 + p_2 q_1. \quad (99)$$

Воспользуемся представлением

$$a_j^\alpha = + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} + q_\alpha, \quad a_j^{\alpha+} = - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} + q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Тогда

$$H_\pm^j(a_j^+, a_j) = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} q_1^2 + q_2^2 \right) + b^2 i \frac{\partial}{\partial q_1} - i \frac{\partial}{\partial q_2} q_1, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Этот оператор имеет собственные функции непрерывного спектра вида $\delta(\frac{1}{b^2} q_1^2 + q_2^2 - \lambda)$, отвечающие собственному значению $\pm \frac{1}{2} \lambda$ ('+' для H_+^j и '-' для H_-^j).

ПРИМЕР 2. Матрица $\mathbf{C}_j$ имеет чисто мнимые собственные значения $\pm ib$. Тогда [11] в случае отсутствия жордановых клеток

$$H_j(q, p) = -bpq, \quad H^j(a^+, a) = ibq \frac{\partial}{\partial q} + ib \frac{\partial}{\partial q} q + \text{const}. \quad (100)$$

Очевидно, оператор (100) имеет непрерывный спектр.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
- [2] Боголюбов Н. Н. К теории сверхтекучести // Изв. АН СССР. Сер. физич. 1947. Т. 11. № 1. С. 77–90.
- [3] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [4] Маслов В. П., Шведов О. Ю. Квантование в окрестности классических решений в задаче N частиц и сверхтекучесть // ТМФ. 1994. Т. 98. № 2. С. 266–288.
- [5] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.) Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
- [6] Кучеренко В. В., Маслов В. П. Спектр системы N бозонов, когда N стремится к бесконечности // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 2. С. 169–172.
- [7] Ring P., Schuck P. The nuclear many-body problem. Berlin: Springer Verlag, 1980.
- [8] Келдыш М. В., Лидский В. Б. Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов // Труды IV Всесоюзного матем. съезда. 1963. Т. I. С. 101–120.
- [9] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
- [10] Williamson J. On algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems // Amer. J. Math. 1936. V. 58. № 1. P. 141–163.
- [11] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.