Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Стечкин, Ряды Фарея, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 91–113

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:28:27

УДК 511.33

РЯДЫ ФАРЕЯ

С. Б. Стечкин

Изучается связь между распределением членов рядов Фарея и поведением дзета-функции Римана.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $H_n = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq b \leq n, (a, b) = 1\}$ – ряд Фарея порядка n . Мы будем писать $H_n = \{h_\nu(n)\}$ ($\nu = 1, \dots, \Phi(n)$) и считать, что числа $h_\nu(n)$ упорядочены по возрастанию:

$$\frac{1}{n} = h_1(n) < \dots < h_{\Phi(n)}(n) = 1.$$

Индекс n часто будет опускаться. Основные арифметические свойства H_n были установлены Харосом (1802 г.) (см. [1, гл. V], а также [2, гл. III]), а (исторически неправильное) название “ряд Фарея” принадлежит Харди и Рамануджану [3], которые использовали множества H_n ($n \in \mathbb{N}$) в своем круговом методе исследования аддитивных задач теории чисел.

Существует тесная связь между свойствами $\{H_n\}$, поведением дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (s = \sigma + it)$$

и распределением простых чисел. Положим $\Theta = \sup\{\sigma \mid \zeta(\sigma + it) = 0\}$, так что $1/2 \leq \Theta \leq 1$. Равенство $\Theta = 1/2$ равносильно тому, что справедлива гипотеза Римана (RH): $\zeta(s) \neq 0$ при $\Re s > 1/2$. Пусть μ – функция Мёбиуса,

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n).$$

Литтлвуд [4] доказал (см. также [5, гл. XIV]), что

$$\text{RH} \iff M(x) = O_\varepsilon(x^{1/2+\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант МС5000. Рукопись подготовили к печати С. В. Конягин и А. Ю. Попов.

Так как (см. ниже (6))

$$M(n) = \sum_{h_\nu \in H_n} e(h_\nu) \quad (e(u) = e^{2\pi i u}),$$

то

$$\text{RH} \iff \sum_{h_\nu \in H_n} e(h_\nu) = O_\varepsilon(n^{1/2+\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

Затем были найдены более простые формулировки для этой эквивалентности. Положим $\delta_\nu = h_\nu - \nu/\Phi_\nu$, так что δ_ν есть уклонение h_ν от ν -го числа равномерной на $(0, 1]$ сетки $\{\nu/\Phi\}$ ($\nu = 1, \dots, \Phi$). Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Положим

$$\begin{aligned} S_p(n) &= \left(\sum_{\nu=1}^{\Phi} |\delta_\nu|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \\ S_\infty(n) &= \max\{|\delta_\nu| \mid \nu = 1, \dots, \Phi\} \quad (p = \infty), \\ \Delta(n) &= \max \left\{ \left| \sum_{\nu=1}^m \delta_\nu \right| \mid m = 1, \dots, \Phi \right\}. \end{aligned}$$

Франель [6] доказал, что

$$\text{RH} \iff S_2(n) = O_\varepsilon(n^{-1/2+\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0),$$

и затем Ландау [7] (см. также [8]) показал, что

$$\text{RH} \iff S_1(n) = O_\varepsilon(n^{1/2+\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

и [9]

$$\text{RH} \iff \Delta(n) = O_\varepsilon(n^{1/2+\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

Изучались также свойства $S_1(n)$ и $S_2(n)$, если известно значение Θ , и (см. [10] и [11]) связь между поведением $S_1(n)$ и $S_2(n)$ с асимптотическим законом простых чисел

$$(A3) \quad \pi(x) = \sum_{p \leq x, p \in \mathbb{P}} 1 \approx \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow \infty),$$

($\mathbb{P}$ – множество простых чисел) и более точными оценками для $\pi(x)$. Например, из (A3) легко следует, что $S_2(n) = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$), и наоборот. Точный порядок роста $S_p(n)$ известен только для $p = \infty$. Ландау [9] доказал, что $S_\infty(n) \asymp n^{-1}$.

В настоящей работе исследуется поведение $S_p(n)$ для всех $p \geq 1$, а также поведение $\Delta(n)$. Устанавливаются как безусловные оценки, так и условные оценки в предположении, что известно значение Θ . Для получения оценок сверху и Ω -оценок используются известные приемы. Основное внимание уделено получению новых оценок снизу. Результаты отражены в подпункте “Итоги” п. 3.

Положим

$$\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}, \quad B(x) = \sum_{n \leq x} b_n.$$

Технически задача об оценке $S_p(n)$ снизу сводится нами к оценке снизу интеграла

$$F(x) = \int_1^x B^2(u)u^{-2} du. \quad (1)$$

Такого рода задачи об оценках снизу для функций, связанных с $\zeta(s)$, ранее почти не исследовались. Я доказал простую тауберову теорему, из которой следует, что

$$F(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Отсюда с помощью модернизированной формулы Фрanelя для $S_2(n)$ сразу следует, что

$$S_p(n)n^{1-1/p} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty, \quad 1 \leq p \leq 2).$$

После этого С. В. Конягин и А. Ю. Попов [12] доказали “правильную” тауберову теорему для интеграла (1), которой я и буду пользоваться. В частности, из нее вытекает, что

$$F(x) \geq C \ln x \quad (3)$$

с эффективной константой C , и отсюда выводится, что

$$S_p(n) \geq Cn^{1/p-1}(\ln n)^{1/p} \quad (1 \leq p \leq 2). \quad (4)$$

Работа написана так, что ее можно читать, не обращаясь к другим источникам, кроме [12] и нескольких технических ссылок на [8]. В п. 2 излагаются основы теории сумм $S_p(n)$ и $\Delta(n)$. Все результаты этого параграфа хорошо известны.

В п. 3 излагаются оценки $S_p(n)$ и $\Delta(n)$. Я полагаю, что оценки снизу являются новыми.

Наконец, в п. 4 доказываются три тауберовы теоремы для интегралов Дирихле, из которых следует моя первоначальная, и уже устаревшая, оценка (2). Отметим, что эти тауберовы теоремы не перекрываются результатами С. В. Конягина и А. Ю. Попова.

2. Основы. Здесь излагаются основы теории сумм $S_p(n)$ и $\Delta(n)$, которые понадобятся в дальнейшем. Почти все они хорошо известны.

Формула обращения Мёбиуса (см. [2, с. 236–237]). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f: [0, 1] = I \rightarrow \mathbb{C}$,

$$F(n) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq n \\ (a, n) = 1}} f\left(\frac{a}{n}\right), \quad G(n) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{d|n} F(d).$$

По формуле обращения Мёбиуса имеем

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) G(d) = \sum_{dm=n} \mu(m) G(d)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{h_\nu \in H_n} f(h_\nu) &= \sum_{k \leq n} F(k) = \sum_{dm \leq n} \mu(m) G(d) = \sum_{m \leq n} \mu(m) \sum_{d \leq n/m} G(d) \\ &= \sum_{d \leq n} G(d) M\left(\frac{n}{d}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим несколько частных случаев этой формулы. Полагая $f(u) = e(u) = e^{2\pi i u}$, находим

$$G(d) = \begin{cases} 1, & d = 1, \\ 0, & d > 1. \end{cases}$$

Следовательно (см. [2, с. 238], а также [13]),

$$\sum_{h_\nu \in H_n} e(h_\nu) = M(n) = \sum_{h_\nu \in H_n} \cos(2\pi h_\nu). \quad (6)$$

Если $t \in I$ и

$$f(u) = f_t(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq t, \\ 0, & t < u \leq 1, \end{cases}$$

то $G(d) = [dt]$ и ввиду (5) приходим к соотношению

$$\sum_{\substack{h_\nu \in H_n \\ h_\nu \leq t}} 1 = \sum_{d \leq n} [dt] M\left(\frac{n}{d}\right). \quad (7)$$

В частности ($t = 1$),

$$\#\{\nu \mid h_\nu \in H_n\} = \sum_{d \leq n} dM\left(\frac{n}{d}\right) = \Phi(n), \quad (8)$$

где (Мертенс, 1874г.; см. [2, с. 268])

$$\Phi = \Phi(n) = \sum_{k \leq n} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \ln n), \quad (9)$$

здесь φ – функция Эйлера.

Положим

$$E(t) = E_n(t) = \sum_{\substack{h_\nu \in H_n \\ h_\nu \leq t}} 1 - t\Phi + \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Из (7) и тождества

$$\sum_{d \leq n} M\left(\frac{n}{d}\right) = 1$$

следует, что

$$E(t) = - \sum_{d \leq n} g(dt) M\left(\frac{n}{d}\right), \quad (11)$$

где $g(x) = x - [x] - 1/2$. Полагая в (10) $t = h_m$, находим

$$\begin{aligned} \delta_m = h_m - \frac{m}{\Phi} &= -\Phi^{-1} \left\{ E(h_m) - \frac{1}{2} \right\} = \Phi^{-1} \left\{ \sum_{d \leq n} g(dh_m) M\left(\frac{n}{d}\right) + \frac{1}{2} \right\} \\ &(m = 1, \dots, \Phi(n)). \end{aligned} \quad (12)$$

Возмущение аргументов суммы. Оценим, как меняется сумма

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi} f(x_{\nu})$$

при возмущении аргументов $x = \{x_{\nu}\}$. Пусть $f \in C^{(1)}(I)$. По формуле Тейлора

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\Phi} f(\tilde{x}_{\nu}) - \sum_{\nu=1}^{\Phi} f(x_{\nu}) \right| \leq \|f'\|_{C(I)} \sum_{\nu=1}^{\Phi} |\tilde{x}_{\nu} - x_{\nu}|.$$

В частности (см. [2]), если $x_{\nu} = \nu/\Phi$, $\tilde{x}_{\nu} = h_{\nu}$, $f(u) = e(u)$, то в силу (6)

$$|M(n)| \leq 2\pi S_1(n). \quad (13)$$

Пусть $f \in C^{(2)}(I)$. Тогда

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\Phi} f(\tilde{x}_{\nu}) - \sum_{\nu=1}^{\Phi} f(x_{\nu}) - \sum_{\nu=1}^{\Phi} f'(x_{\nu})(\tilde{x}_{\nu} - x_{\nu}) \right| \leq \frac{1}{2} \|f''\|_{C(I)} \sum_{\nu=1}^{\Phi} (\tilde{x}_{\nu} - x_{\nu})^2.$$

В частности (см. [9]),

$$|M(n)| \leq 2\pi \left| \sum_{\nu=1}^{\Phi} e\left(\frac{\nu}{\Phi}\right) \delta_{\nu} \right| + 2\pi^2 S_2^2(n).$$

Но, полагая на момент

$$\Delta_m = \sum_{\nu=1}^m \delta_{\nu},$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\Phi} f'\left(\frac{\nu}{\Phi}\right) \delta_{\nu} &= \sum_{\nu=1}^{\Phi-1} \left(f'\left(\frac{\nu}{\Phi}\right) - f'\left(\frac{\nu+1}{\Phi}\right) \right) \Delta_{\nu} + f'(1) \Delta_{\Phi}, \\ \left| \sum_{\nu=1}^{\Phi} f'\left(\frac{\nu}{\Phi}\right) \delta_{\nu} \right| &\leq \left(\bigvee_I f' + |f'(1)| \right) \Delta(n) \end{aligned}$$

и

$$|M(n)| \leq C_1 \Delta(n) + C_2 S_2^2(n). \quad (14)$$

Интегрирование. Интегрируя равенство (10) по отрезку $[0, h_m]$, находим (см. [9])

$$\sum_{\nu=1}^m \delta_{\nu} = \int_0^{h_m} E(t) dt - \frac{\Phi}{2} \delta_m^2 + \frac{1}{2} \delta_m \quad (m = 1, \dots, \Phi). \quad (15)$$

Аналогично, возводя (10) в квадрат и интегрируя по $[0, 1]$, находим (см. [8])

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi} \delta_{\nu}^2 = \Phi^{-1} \left\{ \int_0^1 E^2(t) dt - \frac{1}{12} \right\}. \quad (16)$$

Функция Мёбиуса. Перечислим ряд свойств функции $M(x)$.

Асимптотический закон распределения простых чисел равносильно оценке

$$M(x) = o(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

(см. [14] или [15]).

Справедливы оценки (см. [16], [5, гл. XIV])

$$M(x) = O(xR_1(x)), \quad R_1(x) = \exp\{-c(\ln x)^{3/5}(\ln \ln x)^{-1/5}\} \quad (17)$$

и

$$M(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x}). \quad (18)$$

Нам понадобится более слабое соотношение

$$M(x) = \Omega(\sqrt{x}), \quad (19)$$

которое сразу вытекает из неравенства

$$\int_1^x M^2(u)u^{-2} du \geq c \ln x,$$

приведенного в [12].

Справедливы “условные” оценки

$$M(x) = O_{\varepsilon}(x^{\Theta+\varepsilon}), \quad M(x) = \Omega(x^{\Theta-\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0), \quad (20)$$

доказательство не отличается от случая $\Theta = 1/2$.

Кроме того (см. [5, гл. XIV]),

$$\text{RH} \implies M(x) = O(\sqrt{x}R_2(x)), \quad R_2(x) = \exp\left\{c \frac{\ln x}{\ln \ln x}\right\}. \quad (21)$$

Первую оценку (20) тоже можно уточнить в духе (21).

Функции Эйлера–Жордана. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим

$$\varphi_{\alpha}(n) = \sum_{dk=n} d^{\alpha} \mu(k) = n^{\alpha} \sum_{k|n} k^{-\alpha} \mu(k) = n^{\alpha} \prod_{p|n} (1 - p^{-\alpha}) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (22)$$

В случае $\alpha = 1$ $\varphi_1 = \varphi$ – классическая функция Эйлера. Для $\alpha = k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, эта функция была введена Жорданом в 1870 г. и равна числу наборов из k натуральных чисел, не превосходящих n , общий наибольший делитель которых взаимно прост с n . Функции φ_{α} иногда встречаются в аналитической теории чисел. Например, они появляются в работе Давенпорта [17] при подсчете асимптотики суммы

$$\sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ (m, n)=1}} m^{\alpha}$$

(см. формулу (9) из этой работы). Последнее равенство в этой формуле ошибочно, но это не влияет на правильность основных результатов работы. Функция $\varphi_2(k)$ появляется также в главном члене асимптотики суммы

$$\sum_{\substack{m \leq n \\ m \equiv b \pmod{k}}} \varphi(m)$$

(см. [18, с. 262]).

Кроме случая $\alpha = 1$, φ_α понадобятся нам для $\alpha = 2$ и $\alpha = -1$.

По формуле обращения Мёбиуса

$$\sum_{k|n} \varphi_\alpha(k) = n^\alpha, \quad (23)$$

в частности,

$$\sum_{k|a, k|b} \varphi_2(k) = (a, b)^2. \quad (24)$$

Отсюда сразу вытекает следующее тождество: для любых $x_\nu \in \mathbb{C}$ ($\nu = 1, \dots, n$)

$$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n (a, b)^2 x_a \bar{x}_b = \sum_{k=1}^n \varphi_2(x) \left| \sum_{t \leq n/k} x_{kt} \right|^2. \quad (25)$$

Далее, так как

$$\varphi_2(n) = n^2 \prod_{p|n} (1 - p^{-2}),$$

то

$$\frac{1}{\zeta(2)} n^2 < \varphi_2(n) \leq n^2, \quad (26)$$

т.е. $\varphi_2(n) \asymp n^2$.

Сумматорная функция для последовательности $\{\varphi_\alpha(n)\}$ равна

$$A_\alpha(x) = \sum_{n \leq x} \varphi_\alpha(n) = \sum_{dk \leq x} d^\alpha \mu(k) = \sum_{d \leq x} d^\alpha M\left(\frac{x}{d}\right),$$

а производящий ряд Дирихле для нее имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s - \alpha)}{\zeta(s)}, \quad \sigma > \max(1, 1 + \alpha).$$

Если $\alpha = -1$, то мы будем писать

$$b_n = \varphi_{-1}(n), \quad B(x) = \sum_{n \leq x} b_n = \sum_{k \leq x} k^{-1} M\left(\frac{x}{k}\right), \quad (27)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = \frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} \quad \sigma > \Theta. \quad (28)$$

При $\alpha < 0$ свойства функций φ_α и A_α похожи на свойства функций μ и M . Например, $\varphi_\alpha(n)$ имеет знак $(-1)^{\omega(n)}$, где $\omega(n)$ – число различных простых делителей n . Отметим также, что

$$|\varphi_\alpha(n)| \leq 1 \quad (\alpha < 0, \quad n \in \mathbb{N}). \quad (29)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(n) &= n^\alpha \prod_{p|n} (1 - p^{-\alpha}) = n^\alpha \prod_{p|n} p^{-\alpha} \cdot \prod_{p|n} (p^\alpha - 1), \\ |\varphi_\alpha(n)| &\leq \left(\frac{1}{n} \prod_{p|n} p \right)^{-\alpha} \leq 1. \end{aligned}$$

Формула Франеля.

ЛЕММА 1. *Справедлива формула*

$$S_2^2(n) = \frac{1}{12\Phi(n)} \left\{ \sum_{k \leq n} k^{-2} \varphi_2(k) B^2\left(\frac{n}{k}\right) - 1 \right\}, \quad (30)$$

в частности,

$$S_2(n) \asymp n^{-1} \left(\sum_{k \leq n} B^2\left(\frac{n}{k}\right) \right)^{1/2} \quad (n \geq n_0). \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (16)

$$S_2(n) = \Phi(n)^{-1} \left\{ \int_0^1 E_n^2(t) dt - \frac{1}{12} \right\},$$

где

$$E_n(t) = \sum_{k \leq n} g(kt) M\left(\frac{n}{k}\right).$$

Возводя эту формулу в квадрат, интегрируя почленно и учитывая, что (см. [6])

$$\int_0^1 g(kt)g(lt) dt = \frac{(k, l)^2}{12kl} \quad (k, l \in \mathbb{N}),$$

находим

$$J = \int_0^1 E_n^2(t) dt = \frac{1}{12} \sum_{k \leq n} \sum_{l \leq n} \frac{(k, l)^2}{kl} M\left(\frac{n}{k}\right) M\left(\frac{n}{l}\right).$$

Далее, полагая в (25) $x_k = k^{-1} M(n/k)$ ($k = 1, \dots, n$), получаем

$$J = \sum_{k \leq n} \varphi_2(k) \left(\sum_{m \leq n/k} (mk)^{-1} M\left(\frac{n}{mk}\right) \right)^2 = \sum_{k \leq n} k^{-2} \varphi_2(k) B^2\left(\frac{n}{k}\right),$$

откуда и следует (30).

Далее, в силу (30) и (9)

$$S_2(n) \leq cn^{-1} \left(\sum_{k \leq n} B^2 \left(\frac{n}{k} \right) \right)^{1/2}. \quad (32)$$

С другой стороны, согласно (26) $k^{-2}\varphi_2(k) \geq 6/\pi^2$,

$$\begin{aligned} J &\geq \sum_{n/2 < k \leq n} k^{-2}\varphi_2(k) B^2 \left(\frac{n}{k} \right) \geq \frac{6}{\pi^2} B^2(1) \sum_{n/2 < k \leq n} 1 \geq cn, \\ S_2(n) &\geq cn^{-1} \left(\sum_{k \leq n} B^2 \left(\frac{n}{k} \right) \right)^{1/2} \quad (n \geq n_0). \end{aligned} \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует (31).

3. Оценки. В случаях $p = 1$, $p = 2$ и $p = \infty$ оценки $S_p(n)$ сверху и Ω -оценки были получены ранее (см. [6], [7], [9]–[11]).

Порядок $S_\infty(n)$ играет в дальнейшем важную роль, и мы, следуя [9], приведем простое доказательство формулы

$$S_\infty(n) \asymp n^{-1}. \quad (34)$$

В силу (12) имеем

$$S_\infty(n) = O \left(n^{-2} \sum_{k \leq n} \left| M \left(\frac{n}{k} \right) \right| \right).$$

Отсюда и из элементарной оценки $M(x) = O(x/(\ln x)^2)$ вытекает, что $S_\infty(n) = O(n^{-1})$, а оценка снизу очевидна:

$$S_\infty(n) \geq \delta_1(n) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{\Phi(n)} \geq cn^{-1} \quad (n > 1). \quad (35)$$

Для остальных p , т.е. для $1 \leq p < \infty$, для $S_p(n)$ удастся получить только оценки сверху и снизу и Ω -оценки.

Общие неравенства. Соотношение (34) позволяет написать общее неравенство, связывающее величины $S_p(n)$ при разных p . Имеем при $1 \leq p < q < \infty$

$$S_q^q(n) = \sum_{\nu=1}^{\Phi} |\delta_\nu|^q \leq (cn^{-1})^{q-p} \sum_{\nu=1}^{\Phi} |\delta_\nu|^p \leq (cn^{-1})^{q-p} S_p^p(n),$$

откуда

$$\overline{(p)} \implies \overline{(q)} \quad S_q(n) \leq C n^{p/q-1} S_p^{p/q}(n) \quad (1 \leq p < q < \infty).$$

Кроме того, по неравенству Гёльдера с $r = q/p$

$$\begin{aligned} S_p^p(n) &= \sum_{\nu=1}^{\Phi} |\delta_\nu|^p \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\Phi} 1 \right)^{1-1/r} \left(\sum_{\nu=1}^{\Phi} |\delta_\nu|^{pr} \right)^{1/r} = \Phi^{1-1/r} (S_q^q(n))^{1/r} \\ &\leq (cn)^{2-2p/q} S_q^p(n), \end{aligned}$$

т.е.

$$\overline{(q)} \Rightarrow \overline{(p)} \quad S_p(n) \leq C n^{2/p-2/q} S_q(n) \quad (1 \leq p < q < \infty).$$

Отсюда

$$\underline{(p)} \Rightarrow \underline{(q)} \quad S_q(n) \geq C n^{2/q-2/p} S_p(n) \quad (1 \leq p < q < \infty),$$

$$\underline{(q)} \Rightarrow \underline{(p)} \quad S_p(n) \geq C n^{q/p-1} S_q^{q/p}(n) \quad (1 \leq p < q < \infty).$$

Оценки снизу. Единственная известная оценка величины $S_q(n)$ снизу – это оценка $S_\infty(n) \geq c n^{-1}$.

Начнем с простой арифметической теоремы, доказательство которой основано на той же идее.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq q \leq \infty$, $n \geq n_0$. Тогда

$$S_q(n) \geq C n^{1/q-1} \quad (1 < q < \infty), \quad (36)$$

$$S_1(n) \geq C \ln n. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$D(a, b, n) = \left[\frac{a}{b} + \frac{1}{3bn}, \frac{a}{b} + \frac{2}{3bn} \right], \quad 1 < b < n, \quad 1 \leq a < b, \quad (a, b) = 1.$$

Поскольку расстояние между любыми двумя соседними членами a/b и a'/b' ряда Фарея равно $1/(bb') \geq 1/(bn)$, то интервал $(a/b, a/b + 1/(bn))$ не содержит элементов H_n . Ввиду сказанного,

- 1) отрезки $D(a, b, n)$ попарно не пересекаются;
- 2) если $x \in D(a, b, n)$, то расстояние от x до H_n не меньше, чем $1/(3bn)$.

Легко сообразить, что всякий отрезок длины l содержит $[l\Phi(n)]$ (или на единицу больше) членов последовательности $\nu/\Phi(n)$. Следовательно, при $1 < b \leq \Phi(n)/(3n)$ на отрезке $D(a, b, n)$ их не менее $\Phi(n)/(6bn)$. Для каждого из них $|\delta_\nu| \geq 1/(3bn)$. При $n > n_0$ имеем $\Phi(n)/3n > n/10$ (см. (9)). Отсюда

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(n)} |\delta_\nu|^q \geq \sum_{\substack{1 < b < n/10 \\ (a,b)=1 \\ 1 \leq a < b}} (3bn)^{-q} \frac{\Phi(n)}{6bn} = \frac{\Phi(n)}{2(3n)^{q+1}} \sum_{1 < b < n/10} \frac{\varphi(b)}{b^{q+1}}.$$

Поэтому при $q > 1$, $n > n_0 > 20$

$$S_q(n) > \left(\frac{\Phi(n)}{2(3n)^{q+1}} \cdot \frac{\varphi(2)}{2^{q+1}} \right)^{1/q} > C n^{1/q-1}.$$

При $q = 1$ имеем

$$\sum_{2 \leq b \leq n/10} b^{-2} \varphi(b) = 2 \sum_{2 \leq b \leq n/10} b^{-3} \Phi(b) + O(1) = \frac{6}{\pi^2} \ln x + O(1)$$

и

$$S_1(n) \geq C \sum_{2 \leq b \leq \sqrt{n}} b^{-2} \varphi(b) \geq C \ln n.$$

При $1 < p \leq 2$ теорему 1 можно уточнить.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Тогда

$$S_p(n) \geq C n^{1/p-1} (\ln n)^{1/p} \quad (n \geq n_0). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1

$$S_2(n) \geq c n^{-1} \left(\sum_{k \leq n} B^2 \left(\frac{n}{k} \right) \right)^{1/2} \geq c n^{-1} \left(\sum_{\sqrt{2n} \leq k \leq n} B^2 \left(\frac{n}{k} \right) \right)^{1/2}.$$

Но, используя (3),

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{2n} \leq k \leq n} B^2 \left(\frac{n}{k} \right) &= \sum_{m \leq \sqrt{n/2}} \sum_{n/(m+1) < k \leq n/m} B^2(m) \\ &\geq c n \sum_{m \leq \sqrt{n/2}} \frac{B^2(m)}{m(m+1)} \geq c n \int_1^{\sqrt{n/2}} B^2(u) u^{-2} du \geq C n \ln n. \end{aligned}$$

Отсюда $S_2(n) \geq c n^{-1/2} (\ln n)^{1/2}$. Далее, если $1 \leq p \leq 2$, то в силу $(2) \implies (p)$

$$S_p(n) \geq C n^{2/p-1} S_2^{2/p}(n) \geq C n^{1/p-1} (\ln n)^{1/p}.$$

Для случая $p = 2$ эта теорема опровергает гипотезу Сато [19], согласно которой $S_2(n) = O(n^{-1/2} \ln \ln n)$.

Для $p > 2$ теорема не дает новых оценок сравнительно с теоремой 1.

Если гипотеза Римана неверна, то оценки $S_q(n)$ снизу можно еще улучшить.

ТЕОРЕМА 3. Если $1/2 < \Theta \leq 1$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$S_p(n) \geq C(\Theta, \varepsilon) n^{\frac{2}{p}\Theta_1 - 1 - \varepsilon} \quad (1 \leq p \leq 2), \quad (39)$$

$$S_q(n) \geq C(\Theta, \varepsilon) n^{\frac{2}{q} + \Theta_1 - 2 - \varepsilon} \quad (2 \leq q < \infty), \quad (40)$$

где $\Theta_1 = (1 + \Theta)/(2(2 - \Theta))$. В частности, если $\Theta = 1$, то обе оценки склеиваются и дают

$$S_q(n) \geq C(\varepsilon) n^{2/q - 1 - \varepsilon} \quad (\Theta = 1, \quad 1 \leq q < \infty). \quad (41)$$

Оценка (40) содержательна только, если $\Theta_1 > 1 - 1/q$. В противном случае она перекрывается теоремой 1. Если $\Theta = 1$, то она содержательна для всех $q < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим разность

$$K = \left| \sum_{m < k \leq n} B^2\left(\frac{n}{k}\right) - \int_m^n B^2\left(\frac{n}{u}\right) du \right| \leq \sum_{m < k \leq n} \int_{k-1}^k \left| B^2\left(\frac{n}{k}\right) - B^2\left(\frac{n}{u}\right) \right| du.$$

Здесь в силу (20) и (27)

$$B(x) = O\left(\sum_{k \leq x} k^{-1} M\left(\frac{x}{k}\right)\right) = O_\varepsilon(x^{\Theta+\varepsilon}),$$

$$\left| B^2\left(\frac{n}{k}\right) - B^2\left(\frac{n}{u}\right) \right| = \left| \left(B\left(\frac{n}{k}\right) + B\left(\frac{n}{u}\right) \right) \left(B\left(\frac{n}{k}\right) - B\left(\frac{n}{u}\right) \right) \right| \leq c\left(\frac{n}{k}\right)^{\Theta+\varepsilon} \left(\frac{n}{k^2} + 1 \right),$$

причем $\varepsilon = 0$ в случае $\Theta = 1$. Отсюда

$$\begin{aligned} K &= O\left(\sum_{m < k \leq n} \left(\frac{n}{k}\right)^{\Theta+\varepsilon} \left(\frac{n}{k^2} + 1\right)\right) \\ &= O\left(n^{\Theta+1+\varepsilon} \sum_{m < k \leq n} k^{-\Theta-2-\varepsilon} + n^{\Theta+\varepsilon} \sum_{m < k \leq n} k^{-\Theta-\varepsilon}\right) = O\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{1+\Theta+\varepsilon} + n \ln n\right). \end{aligned}$$

Но по теореме 2 из [12]

$$\int_m^n B^2\left(\frac{n}{u}\right) du = n \int_1^{n/m} B^2(u) u^{-2} du \geq cn \left(\frac{n}{m}\right)^{2\Theta-1-\varepsilon},$$

откуда

$$\sum_{m < k \leq n} B^2\left(\frac{n}{k}\right) \geq Cn \left(\frac{n}{m}\right)^{2\Theta-1-\varepsilon} + O\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{1+\Theta+\varepsilon} + n \ln n\right).$$

Положим здесь $m \asymp n^{(1-\Theta)/(2-\Theta)+2\varepsilon}$ так, что $y = n/m \asymp n^{1/(2-\Theta)-2\varepsilon}$. Как непосредственно проверяется, тогда

$$y^{1+\Theta+\varepsilon} = o(ny^{2\Theta-1-\varepsilon}), \quad ny^{2\Theta-1-\varepsilon} > n^{2\Theta_1-3\varepsilon}.$$

Поскольку $\Theta > 1/2$, то при достаточно малом ε $n \ln n = o(ny^{2\Theta-1-\varepsilon})$, так что член $ny^{2\Theta-1-\varepsilon}$ является главным и

$$\sum_{m < k \leq n} B^2\left(\frac{n}{k}\right) \geq Cn^{2\Theta_1-3\varepsilon},$$

откуда $S_2(n) \geq Cn^{\Theta_1-1-3\varepsilon/2}$ или в силу произвольности ε $S_2(n) \geq Cn^{\Theta_1-1-\varepsilon}$.

Наконец, используя неравенства (2) $\implies$ (p) и (2) $\implies$ (q), получаем (39) и (40). В частности, если $\Theta = 1$, то $S_p(n) \geq Cn^{2/p-1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$, $\Theta = 1$).

Вероятно, в случае $\Theta < 1$ эта теорема неточна и в ней Θ_1 можно заменить на Θ . Это равносильно гипотезе

$$L = \sum_{k \leq n} B^2\left(\frac{n}{k}\right) \geq C(\Theta, \varepsilon) n^{2\Theta-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

Несмотря на то, что по теореме 2 из [12]

$$\int_1^x B^2\left(\frac{x}{u}\right) du = x \int_1^x B^2(u) u^{-2} du \geq C(\Theta, \varepsilon) x^{2\Theta-\varepsilon} \quad (\forall \varepsilon > 0),$$

аналогичную оценку для суммы L при $\Theta \in (1/2, 1)$ мне получить не удалось.

Ω -оценки.

ТЕОРЕМА 4. *Выполнено*

$$S_q(n) \geq Cn^{2/q-2}|M(n)| \quad (q \geq 1). \quad (42)$$

В частности,

$$S_q(n) = \Omega(n^{2/q-3/2}) \quad (1 \leq q \leq 2), \quad (43)$$

а если $\Theta > 1/2$, то

$$S_q(n) = \Omega(n^{2/q+\Theta-2-\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0, \quad 1/q < 1 - \Theta). \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (13)

$$|M(n)| \leq CS_1(n),$$

откуда в силу $\underline{(p)} \implies \underline{(q)}$

$$S_q(n) \geq Cn^{2/q-2}S_1(n) \geq Cn^{2/q-2}|M(n)|.$$

Так как $M(n) = \Omega(\sqrt{n})$, то отсюда следует (43). Если же $\Theta > 1/2$, то $M(n) = \Omega(n^{\Theta-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) и $S_q(n) = \Omega(n^{2/q+\Theta-2-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$).

При $1/q \leq 1 - \Theta$ оценка (44) слабее, чем оценка $S_q(n) \geq Cn^{1/q-1}$, доказываемая теоремой 1. Поэтому мы и ограничиваемся значениями q , для которых $1/q > 1 - \Theta$.

Вероятно $S_p(n)$ меняется достаточно правильно, и все Ω -оценки могут быть заменены такими же или близкими к ним оценками снизу.

При $q \geq 2$ Ω -оценки для $S_q(n)$ можно также выводить из леммы 1 или просто из неравенства $S_2(n) \geq Cn^{-1}|B(n)|$, но таким путем мне не удалось получить результаты более сильные, чем теорема 4.

Оценки сверху. Все исследуемые последовательности и функции имеют степенной порядок роста (или убывания). Пусть $S: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $R: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$. Оценка $S(x)$ называется *точной оценкой сверху*, если

$$S(x) = O(x^\alpha R(x)) \quad \text{и} \quad S(x) = \Omega(x^\alpha R(x)).$$

Естественно рассматривать такие функции сравнения R , среди которых содержатся функции, дающие точные оценки сверху. Нетрудно видеть, что этому требованию удовлетворяют функции $R(x)$, для которых

$$x^\varepsilon R(x) \uparrow \quad (x \geq x(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0).$$

Если, кроме того, $R(x) = R([x])$, то будем писать $R \in \Omega$. Если же $\delta \geq 0$ и $x^\delta R(x) \uparrow$, то будем писать $R \in \Omega_\delta$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1/2 \leq \gamma \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $R \in \Omega$. Рассмотрим утверждения

$$\begin{aligned} (a, p) \quad & S_p(n) = O(n^{\gamma+2/p-2} R(n)), \\ (b) \quad & M(n) = O(n^\gamma R(n)), \\ (c) \quad & S_q(n) = O(n^{2\gamma/q-1} R^{2/q}(n)) \quad (q \geq 2). \end{aligned}$$

Тогда при $1 \leq p < q$

$$(a, q) \implies (a, p) \implies (b) \quad \text{и} \quad (a, 2) \implies (c).$$

Если, кроме того, $\gamma > 1/2$ и $R \in \Omega_\delta$, $\delta < \gamma - 1/2$, то при $1 \leq p \leq 2$

$$(a, 2) \iff (a, p) \iff (b),$$

а если $\gamma = 1/2$, то

$$(b) \implies S_2(n) = O(n^{-1/2} R(n) \sqrt{\ln n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство на несколько шагов.

I. Пусть $1 \leq p < q < \infty$. Тогда $(a, q) \implies (a, p)$; R – произвольная функция. В силу неравенства $\overline{(q)} \implies \overline{(p)}$

$$S_p(n) = O(n^{2/p-2/q} S_q(n)) = O(n^{\gamma+2/p-2} R(n)).$$

II. $(a, 1) \implies (b)$; R – произвольная функция. В силу (13)

$$|M(n)| = O(S_1(n)) O(n^\gamma R(n)).$$

III. Если $1/2 < \gamma \leq 1$, $\delta < \gamma/2$, то

$$(n) \implies (a, 2), \quad R \in \Omega_\delta.$$

В силу (27), если $R \in \Omega_\delta$, $\delta \leq \gamma$, то

$$\begin{aligned} B(x) &= O\left(\sum_{k \leq x} k^{-1} \left|M\left(\frac{x}{k}\right)\right|\right) = O\left(\sum_{k \leq x} k^{-1} \left(\frac{x}{k}\right)^{\gamma-\delta} \left(\frac{x}{k}\right)^\delta R\left(\frac{x}{k}\right)\right) \\ &= O\left(x^{\gamma-\delta} x^\delta R(x) \sum_{k \leq x} k^{-1-\gamma+\delta}\right) = O(x^\gamma R(x)). \end{aligned}$$

Отсюда, если $R \in \Omega_\delta$, $\delta < \gamma - 1/2$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq n} B^2\left(\frac{n}{k}\right) &= O\left(\sum_{k \leq n} \left(\frac{n}{k}\right)^{2(\gamma-\delta)} n^{2\delta} R^2(n)\right) = O\left(n^{2\gamma} R(n) \sum_{k \leq n} k^{-2(\gamma-\delta)}\right) \\ &= O(n^{2\gamma} R^2(n)) \end{aligned}$$

и в силу леммы 1

$$S_2(n) = O\left(n^{-1}\left(\sum_{k \leq n} B^2\left(\frac{n}{k}\right)\right)^{1/2}\right) = O(n^{\gamma-1}R(n)).$$

IV. Если $\gamma = 1/2$, $R \in \Omega_0$, то

$$(b) \implies S_2(n) = O(n^{-1/2}R(n)\sqrt{\ln n}).$$

Как и выше,

$$(b) \implies B(x) = O(\sqrt{x}R(x)).$$

Отсюда

$$\sum_{k \leq n} B^2\left(\frac{n}{k}\right) = O\left(nR^2(n) \sum_{k \leq n} k^{-1}\right) = O(nR^2(n) \ln n)$$

и

$$S_2(n) = O\left(n^{-1}\left(\sum_{k \leq n} B^2\left(\frac{n}{k}\right)\right)^{1/2}\right) = O(n^{-1/2}R(n)(\ln n)^{1/2}).$$

V. Если $q \geq 2$, то

$$(a, 2) \implies S_q(n) = O(n^{(2\gamma)/q-1}R^{2/q}(n)).$$

В силу $\overline{(2)} \implies \overline{(q)}$

$$S_q(n) = O(n^{2/q-1}S_2^{2/q}(n)) = O(n^{\frac{2}{q}-1+\frac{2}{q}(\gamma-1)}R^{2/q}(n)) = O(n^{\frac{2}{q}\gamma-1}R^{2/q}(n)).$$

Таким образом, если $1/2 < \gamma \leq 1$ и $R \in \Omega_\delta$, $\delta < \gamma - 1/2$, то в силу I, II и III при $1 < p < 2$

$$(a, 2) \implies (a, p) \implies (a, 1) \implies (b) \implies (a, 2),$$

т.е.

$$(a, 2) \iff (a, p) \iff (a, 1) \iff (b).$$

Вместе с IV и V это доказывает все утверждения теоремы.

Отметим несколько следствий.

Так как $M(x) = O(xR_1(x))$, где функция R_1 определена в (17), то

$$S_q(n) = O(n^{2/q-1}R_1^{\gamma_1}(n)), \quad \gamma_1 = \min\left\{1, \frac{2}{q}\right\}. \quad (45)$$

Условия $M(x) = O_\varepsilon(x^{\Theta+\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) и $S_p(n) = O(n^{2/p+\Theta-2+\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$, $1 \leq p \leq 2$) равносильны. В частности,

$$RH \implies S_p(n) = O(n^{2/p-3/2+\varepsilon}) \quad (1 \leq p \leq 2), \quad (46)$$

и наоборот, из (46) следует RH. При $p = 2$ это результат Франеля, а при $p = 1$ – Ландау.

Точно так же, оценка $M(x) = o(x)$ для каждого p , $1 \leq p \leq 2$, равносильна оценке $S_p(n) = o(n^{2/p-1})$, т.е. равносильна асимптотическому закону простых чисел.

Итоги. Подведем итоги.

Безусловные оценки. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} S_q(n) &= O(n^{2/q-1} R_1^{\gamma(q)}(n)) \quad (1 \leq q \leq \infty), \quad \gamma(q) = \min\left\{\frac{2}{q}, 1\right\}, \\ S_q(n) &= \Omega(n^{2/q-3/2}) \quad (1 \leq q < 2), \\ S_q(n) &\geq C n^{1/q-1} (\ln n)^{1/q} \quad (1 \leq q \leq 2), \\ S_q(n) &\geq C n^{1/q-1} \quad (2 < q \leq \infty). \end{aligned} \quad (47)$$

Условные оценки, $\Theta = 1$. Справедлива оценка сверху (47) и

$$S_q(n) \geq C_\varepsilon n^{2/q-1-\varepsilon} \quad (1 \leq q < \infty).$$

В этом случае Ω -оценки перекрываются оценками снизу.

Пусть $1/2 < \Theta < 1$, $\Theta_1 = (1 + \Theta)/(2(2 - \Theta))$. Тогда

$$\begin{aligned} S_q(n) &= O_\varepsilon(n^{2/q+\Theta-2+\varepsilon}) \quad (1 \leq q \leq 2), \\ S_q(n) &= O_\varepsilon(n^{2\Theta/q-1+\varepsilon}) \quad (2 \leq q < \infty), \\ S_q(n) &= \Omega(n^{2/q+\Theta-2-\varepsilon}) \quad (1 \leq q < (1 - \Theta)^{-1}), \\ S_q(n) &\geq C_\varepsilon n^{2\Theta_1/q-1-\varepsilon} \quad (1 \leq q \leq 2), \\ S_q(n) &\geq C_\varepsilon n^{2/q+\Theta_1-2-\varepsilon} \quad (2 \leq q < (1 - \Theta_1)^{-1}), \\ S_q(n) &\geq C n^{1/q-1} \quad ((1 - \Theta_1)^{-1} \leq q \leq \infty), \end{aligned}$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \iff \text{RH},$$

$$\begin{aligned} S_q(n) &= O(n^{2/q-3/2} R_2(n)) \quad (1 \leq q \leq 2), \\ S_q(n) &= O(n^{1/q-1} R_2^{\gamma(q)}(n)) \quad (2 \leq q \leq \infty), \\ S_q(n) &= \Omega(n^{2/q-3/2}) \quad (1 \leq q < 2), \\ S_q(n) &\geq C n^{1/q-1} (\ln n)^{1/q} \quad (1 \leq q \leq 2), \\ S_q(n) &\geq C n^{1/q-1} \quad (2 < q \leq \infty). \end{aligned}$$

Как видно, удовлетворительные результаты получаются только в случаях $\Theta = 1$ и $\Theta = 1/2$. Если $1/2 < \Theta < 1$, то в области $q > 2$ остаются даже “белые пятна”.

Оценки $\Delta(n)$. В заключение исследуем поведение последовательности

$$\Delta(n) = \max_{m=1, \dots, \Phi(n)} \left| \sum_{\nu=1}^m \delta_\nu(n) \right|.$$

Ландау [9] доказал, что

$$\text{RH} \iff \Delta(n) = O_\varepsilon(n^{1/2+\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0). \quad (48)$$

Мы можем сделать лишь минимальные добавления к его результатам.

ЛЕММА 2. *Справедливо неравенство*

$$C(|M(n)| + 1) \leq \Delta(n) \leq \frac{1}{8} \sum_{k \leq n} k^{-1} \left| M\left(\frac{n}{k}\right) \right| + O(1) \quad (n \geq n_0). \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что

$$\Delta(n) \geq C \quad (n \geq n_0). \quad (50)$$

Рассуждая как при доказательстве теоремы 1, находим, что на левой половине отрезка $[0, 1/n]$ имеется $m \geq cn$ точек вида $\nu/\Phi(n)$. Для каждой из них $\delta_\nu = h_\nu - \nu/\Phi \geq 1/(2n)$ ($\nu = 1, \dots, m$) и поэтому

$$\Delta(n) \geq \left| \sum_{\nu=1}^m \delta_\nu \right| \geq \frac{m}{2n} \cdot \frac{c}{n} \geq C \quad (n \geq n_0). \quad (51)$$

Далее, согласно (14) и (45)

$$|M(n)| \leq C\Delta(n) + CS_2^2(n) \leq C\Delta(n) + o(1). \quad (52)$$

Отсюда и из (51) следует, что

$$C(|M(n)| + 1) \leq \Delta(n).$$

Воспользуемся формулой (15):

$$\sum_{\nu=1}^m \delta_\nu = \int_0^{h_\nu} E(t) dt - \frac{\Phi}{2} \delta_m^2 + \frac{1}{2} \delta_m.$$

Так как $|\delta_m| \leq S_\infty(n) \asymp n^{-1}$, то из нее следует, что

$$\Delta(n) \leq \max_m \left| \int_0^{h_m} E(t) dt \right| + O(1).$$

Далее (см. (11)),

$$\begin{aligned} E(t) &= - \sum_{k \leq n} g(kt) M\left(\frac{n}{k}\right), \\ \left| \int_0^{h_m} E(t) dt \right| &= \left| \sum_{k \leq n} \int_0^{h_m} g(kt) dt M\left(\frac{n}{k}\right) \right| = \left| \sum_{k \leq n} \int_0^{kh_m} g(u) du k^{-1} M\left(\frac{n}{k}\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{8} \sum_{k \leq n} k^{-1} \left| M\left(\frac{n}{k}\right) \right|, \end{aligned}$$

так как

$$\left| \int_0^y g(u) du \right| \leq \frac{1}{8} \quad \forall y > 0.$$

Итак,

$$\Delta(n) \leq \frac{1}{8} \sum_{k \leq n} k^{-1} \left| M\left(\frac{n}{k}\right) \right| + O(1).$$

Лемма доказана.

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 5, выводим

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= O(nR_1(n)), & \Delta(n) &= \Omega(\sqrt{n}), \\ \text{RH} &\implies \Delta(n) = O(\sqrt{n}R_2(n)), \end{aligned}$$

и если $1/2 < \Theta < 1$, то

$$\Delta(n) = O_\varepsilon(n^{\Theta+\varepsilon}), \quad \Delta(n) = \Omega(n^{\Theta-\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0).$$

В отличие от $S_1(n)$, я не знаю, будет ли $\Delta(n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).

4. Тауберовы теоремы. Пусть $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \in L^2[1, x]$ ($\forall x \geq 1$). Рассмотрим интеграл

$$F(\delta) = \int_1^\infty f(x)x^{-1-\delta} dx \quad (\delta > 0). \quad (53)$$

При каких дополнительных ограничениях на F и f

$$\int_1^X f^2(x)x^{-1} dx \rightarrow \infty \quad (X \rightarrow \infty), \quad \text{т.е.} \quad \int_1^\infty f^2(x)x^{-1} dx = \infty ? \quad (54)$$

Это заведомо имеет место, если для некоторого $\delta_0 > 0$ $F(\delta_0) = \infty$, так как по неравенству Коши–Буняковского

$$\int_1^\infty f(x)x^{-1-\delta_0} dx \leq \left(\int_1^\infty x^{-1-2\delta_0} dx \int_1^\infty f^2(x)x^{-1} dx \right)^{1/2}$$

и

$$\int_1^\infty x^{-1-2\delta_0} dx < \infty. \quad (55)$$

С другой стороны, как показывает пример $f(x) = 1/\ln(x+1)$, одного условия $F(0) = \infty$ недостаточно для того, чтобы

$$\int_1^\infty f^2(x)x^{-1} dx = \infty.$$

В дальнейшем мы будем считать, что

$$F(\delta) < \infty \quad (\delta > 0) \quad \text{и} \quad F(\delta) \rightarrow \infty \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (56)$$

При этом нас будет интересовать тот случай, когда для $F(\delta)$ известны только *односторонние* оценки снизу.

ТЕОРЕМА А. Пусть

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \delta^{1/2} F(\delta) > 0. \quad (57)$$

Тогда интеграл

$$\int_1^{+\infty} f^2(x) x^{-1} dx$$

расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (57) существует постоянная $k > 0$ и стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел δ_n такие, что

$$\int_1^{+\infty} f(x) x^{-1-\delta_n} dx > k \delta_n^{-1/2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (58)$$

Правая часть (58) при $n \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности. Следовательно, для некоторых последовательностей $x_n, y_n \rightarrow +\infty$ будем иметь

$$I_n = \int_{x_n}^{y_n} f(x) x^{-1-\delta_n} dx > \frac{k}{2\sqrt{\delta_n}}. \quad (59)$$

С другой стороны, по неравенству Коши–Буняковского

$$I_n^2 \leq \int_{x_n}^{y_n} f^2(x) x^{-1} dx \cdot \int_{x_n}^{y_n} x^{-1-2\delta_n} dx < \int_1^{+\infty} x^{-1-2\delta_n} dx \cdot \int_{x_n}^{y_n} f^2(x) x^{-1} dx. \quad (60)$$

Из (59) и (60) находим

$$\int_{x_n}^{y_n} f^2(x) x^{-1} dx > \frac{k^2}{2} = k_1 > 0.$$

Тем самым, для несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty} f^2(x) x^{-1} dx$$

не выполняется критерий сходимости Коши. Теорема А доказана.

Если потребовать, чтобы “хорошая” оценка снизу на $F(\delta)$ выполнялась всюду, а не на подпоследовательности, то для справедливости соотношения (54) достаточно меньшего, чем в (57), роста $F(\delta)$.

ТЕОРЕМА Б. Если неубывающая и положительная на $[2, \infty)$ функция g удовлетворяет условию

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dy}{y(\ln y) g^2(\ln y)} < +\infty, \quad (61)$$

и при этом

$$\int_0^{1/2} \frac{F(\delta) d\delta}{\sqrt{\delta} g(1/\delta)} = +\infty, \quad (62)$$

то интеграл

$$\int_1^{+\infty} f^2(x) x^{-1} dx$$

расходится.

СЛЕДСТВИЕ. Если при некотором $\beta \in (0, 1/2)$ и $\delta_0 > 0$

$$F(\delta) > \delta^{-1/2} \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{-\beta}, \quad \delta \in (0, \delta_0),$$

то интеграл

$$\int_1^{+\infty} f^2(x) x^{-1} dx$$

расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Б. Из (62) находим

$$\int_1^{+\infty} f(x) A(x) x^{-1} dx = +\infty, \quad (63)$$

где

$$A(x) = \int_0^{1/2} x^{-\delta} \delta^{-1/2} \left(g\left(\frac{1}{\delta}\right) \right)^{-1} d\delta.$$

Обозначим $T = \ln x$. Можно считать, что $x \geq e^4$, так что $T \geq 4$. В последнем интеграле сделаем замену переменного $y = T\delta$. Получим

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{T/2} y^{-1/2} \left(g\left(\frac{T}{y}\right) \right)^{-1} e^{-y} dy. \quad (64)$$

Очевидны неравенства

$$\begin{aligned} \left(g\left(\frac{T}{y}\right) \right)^{-1} &\leq (g(\sqrt{T}))^{-1}, & 0 < y \leq \sqrt{T}, \\ \left(g\left(\frac{T}{y}\right) \right)^{-1} &\leq (g(2))^{-1}, & \sqrt{T} < y \leq \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (65)$$

Из (64) и (65) находим

$$\begin{aligned} A(x) &= O\left(\frac{T^{-1/2}}{g(\sqrt{T})} \int_0^{\sqrt{T}} y^{-1/2} e^{-y} dy + T^{-1/2} \int_{\sqrt{T}}^{T/2} y^{-1/2} e^{-y} dy\right) \\ &= O\left(\frac{T^{-1/2}}{g(\sqrt{T})} + T^{-1}\right). \end{aligned} \quad (66)$$

Из (63) и (66) следует, что

$$I = \int_{e^4}^{+\infty} \left(\frac{f(x) dx}{x \sqrt{\ln x} (g(\sqrt{\ln x}))} + \frac{f(x) dx}{x \ln x} \right) = +\infty. \quad (67)$$

Если бы сходиллся интеграл

$$J = \int_{e^2}^{+\infty} f^2(x) x^{-1} dx,$$

то по неравенству Коши–Буняковского мы получили бы

$$I^2 \leq 2J \left(\int_{e^4}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (g(\sqrt{\ln x}))^2} + \int_{e^4}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} \right). \quad (68)$$

Второй интеграл в (68), очевидно, конечен. Первый интеграл также конечен, ибо после замены $y = e^{\sqrt{\ln x}}$ он преобразуется к интегралу (61). Значит, правая часть (68) конечна, что противоречит (67). Теорема Б доказана.

ТЕОРЕМА В. Пусть $R: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $R(x) \geq e$,

$$\frac{\ln R(x)}{\ln x} \downarrow 0 \quad (x \geq x_0), \quad 0 \leq f(x) \leq R(x) \quad (x \geq 1)$$

и

$$F(\delta) \geq C\delta^{-1} \quad (0 < \delta \leq \delta_0). \quad (69)$$

Тогда

$$\int_1^X f^2(u)u^{-1} du \geq C_1 \frac{\ln X}{\ln R(X)} \quad (X \geq X_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\delta = \delta(x) = 2 \frac{\ln R(x)}{\ln x}. \quad (70)$$

Тогда

$$x^{\delta/2} = \frac{1}{R(x)} \quad (71)$$

и ввиду монотонности отношения $(\ln R(x)) / \ln x$ имеем

$$R(u)u^{-\delta/2} \leq 1 \quad \text{при } u > x. \quad (72)$$

Без ограничения общности, можно считать, что $R(x) > 4/c$. Оценим хвост интеграла

$$\int_1^{+\infty} f(u)u^{-1-\delta} du.$$

Выбирая δ в соответствии с (70), имеем в силу (71) и (72)

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} f(u)u^{-1-\delta} du &\leq \int_x^{+\infty} \frac{R(u)}{u^{\delta/2}} u^{-1-\delta/2} du \leq \int_x^{+\infty} f(u)u^{-1-\delta/2} du \\ &= \frac{2x^{-\delta/2}}{\delta} = \frac{2}{\delta R(x)} < \frac{c}{2\delta}. \end{aligned} \quad (73)$$

Ввиду (72) и (69) получаем

$$\int_1^x f(u)u^{-1-\delta} du > \frac{x}{2\delta}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{C}{2\delta} &< \int_1^x f(u)u^{-1-\delta} du \leq \left(\int_1^x \frac{f^2(u)}{u} du \right)^{1/2} \cdot \left(\int_1^x u^{-1-2\delta} du \right)^{1/2} \\ &< \left(\frac{1}{2\delta} \int_1^x \frac{f^2(u)}{u} du \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\int_1^x f^2(u)u^{-1} du \geq \frac{c^2}{2\delta} = c_1 \frac{\ln x}{\ln R(x)}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что если $R(x) = O(1)$, то

$$\int_1^X f^2(x)x^{-1} dx \geq c_2 \ln X.$$

Из этих результатов следует, что $S_2(n)\sqrt{n} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). В самом деле, из сходимости ряда

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s} \quad \text{для } \sigma > \Theta$$

следует, что этим свойством обладает и ряд

$$\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}.$$

Отсюда

$$\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} B(u)u^{-1-s} du \quad (\sigma > \Theta)$$

и интеграл равномерно сходится для $\sigma \geq \sigma_0 > \Theta$. С другой стороны, если $\Theta_1 < \Theta$, то интеграл

$$\int_1^{\infty} |B(u)|u^{-1-\Theta_1} du$$

расходится. В противном случае функция $\zeta(s+1)/\zeta(s)$ не имела бы особенностей при $\sigma > \Theta_1$. Отсюда в силу (53) ($f(x) = |B(x)|/\sqrt{x}$)

$$\int_1^X B^2(u)u^{-2} du \rightarrow \infty \quad (\Theta > 1/2).$$

Если же $\Theta = 1/2$, то, полагая $s = 1/2 + \delta + i\tau$, где $\zeta(1/2 + i\tau) = 0$, находим, что

$$\int_1^{\infty} |B(u)|u^{-3/2-\delta} du \geq \frac{c}{\delta},$$

а отсюда по теореме В и оценке (21)

$$\int_1^X B^2(u)u^{-2} du \geq C \ln \ln X.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dickson L. E. History of the theory of numbers. Divisibility and primality. V. 1. N.Y.: Chelsea Co., 1966.
- [2] Hardy G. H., Wright E. M. An introduction to the theory of numbers. Oxford: Clarendon Press, 1975.
- [3] Hardy G. H. Asymptotic formula in combinatory analysis // Proc. London Math. Soc. 1918. V. 17. № 25. P. 75–115; // Collected Papers of G. H. Hardy. V. 1. Oxford: Clarendon Press, 1966. P. 306–339; // Collected Papers of S. Ramanujan. N. Y.: Chelsea Co., 1962. P. 276–309.
- [4] Littlewood J. E. Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $\Re(s) > 1/2$ // C. R. Acad. Sci. Paris. 1912. V. 154. P. 263–266.
- [5] Titchmarsh E. C. The theory of the Riemann zeta-function. 2nd edition. Oxford: Clarendon Press, 1986.
- [6] Franel J. Les suites de Farey et la problème des nombres premiers, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen // Math.-Physik. Klasse. 1924. P. 198–201.
- [7] Landau E. Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel, premiers, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen // Math.-Physik. Klasse. 1924. P. 202–206.
- [8] Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie. V. 2. N. Y.: Chelsea Co., 1947.
- [9] Landau E. Über die Fareyreihe und die Riemannsche Vermutung, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen // Math.-Physik. Klasse. 1932. P. 347–352.
- [10] Huxley M. N. The distribution of prime numbers. Oxford: Clarendon Press, 1972.
- [11] Mikolás M. Un théorème d'équivalence et ses applications // Norske Vid. Selsk. Forh., Frondheim 22. 1950. № 28. P. 128–131.
- [12] Конягин С. В., Попов А. Ю. О скорости расходимости некоторых интегралов // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 243–255.
- [13] Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. V. 2. Leipzig: B. G. Teubner, 1909.
- [14] Ayoub R. An introduction to the analytic theory of numbers. Providence: AMS, 1963.
- [15] Ellison W. J., Mendès France M. Les nombres premiers. Paris: Hermann, 1975.
- [16] Walfisz A. Weyleshe exponentialsommen in der Neueren Zahlen-theorie. Berlin: Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.
- [17] Davenport H. On a generalization of Euler's function $\varphi(n)$ // J. London Math. Soc. 1932. V. 7. P. 290–296; // The collected works of Harold Davenport. V. IV. London: Acad. Press, 1977.
- [18] Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.
- [19] Sato K. The Farey sequence and estimation of Franel's sum // International Conference "Number Theory and Algebraic Methods in Computer Science" (29 June – 2 July, Moscow). M., 1993. P. 77–78.