Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Трубицын, О полугруппах, заданных одним определяющим соотношением со свойством Черча–Россера, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 114–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 10:14:26

УДК 512

О ПОЛУГРУППАХ, ЗАДАННЫХ ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ СО СВОЙСТВОМ ЧЕРЧА–РОССЕРА

Ю.Э. Трубицын

Статья посвящена исследованию полугрупп, заданных одним определяющим соотношением $A = B$ и удовлетворяющих свойству Черча–Россера.

Библиография: 12 названий.

Заметка посвящена исследованию полугрупп, заданных одним определяющим соотношением $A = B$ и удовлетворяющих свойству Черча–Россера. Наша цель – дать описание слов A и B в этом случае. Такое описание было начато в статьях [1], [2]. Завершить его удастся с использованием методов работы [3]. Тем самым получен ответ на вопрос, поставленный в [2, с. 142].

Дадим необходимые определения. Пусть S – полугруппа, заданная множеством порождающих элементов

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \dots \quad (1)$$

и одним определяющим соотношением $A = B$ (основные понятия комбинаторной теории полугрупп можно найти в [4]). Будем записывать это соотношение в виде упорядоченной пары (A, B) и называть определяющее слово A старшим, а B – младшим. Элементарные преобразования, заменяющие старшее слово на младшее, назовем *сокращениями*, обратные преобразования – *вставками*. Будем использовать символы $=$, $\approx$, 1 , $|X|$ для обозначения соответственно равенства в полугруппе S , графического равенства, пустого слова, длины слова X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Задание полугруппы S удовлетворяет свойству Черча–Россера, если для произвольной пары слов X, Y выполнено условие: $X = Y$ в полугруппе S тогда и только тогда, когда существует слово Z , которое можно получить из X и из Y при помощи сокращений.

Таким образом, если задание полугруппы S удовлетворяет свойству Черча–Россера, то произвольную последовательность элементарных преобразований в S можно заменить такой последовательностью длины k , в которой первые l ($k \geq l \geq 0$) преобразований являются сокращениями, а последние $k - l$ – вставками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Задание полугруппы S называется *нётеровым*, если для произвольного слова V любая последовательность сокращений, начинающаяся с V , обрывается через конечное число шагов.

Подчеркнем, что в определениях 1, 2 подразумевается неравноправие слов A, B – среди них должно быть выделено старшее.

С многочисленными интересными свойствами нётеровых полугрупп Черча–Россера (заданных произвольным количеством соотношений) можно познакомиться по обзорным статьям [5], [6]. Важнейшее из этих свойств – существование простого алгоритма для нахождения канонической формы элементов, откуда, в частности, следует разрешимость проблемы равенства слов. Поэтому естественно, что в исследованиях по проблеме равенства для полугрупп с одним соотношением уже неоднократно встречались полугруппы, имеющие задание (A, B) со свойствами Черча–Россера и нётеровости (см., например, первый абзац с. 220 работы [3], [7, теорема 1], [8, теорема 1]). В связи с этим возникают следующие задачи.

1. Описать все задания вида (A, B) , обладающие свойством Черча–Россера [1], [2].

2. Найти алгоритм, который для любого задания (A, B) выяснял бы, будет ли это задание нётеровым (известный вопрос).

Займемся первой задачей. Для случая, когда B – пустое слово, описание дано в статье [1]. Если A пусто, то задание (A, B) всегда удовлетворяет свойству Черча–Россера (см. лемму 1.6 из [9]). Итак, будет считать, что A, B непусты, $A \neq B$. Для формулировки результата из [2] выведем некоторые понятия. Если X – непустое слово, положим

$$\text{OVL}(X) = \{U \mid X = UR = SU, R \neq 1\}.$$

Заметим, что $\text{OVL}(X)$ содержит пустое слово. Через $\text{ov}(X)$ обозначим самое длинное слово в $\text{OVL}(X)$. Число $\pi(X) = |X| - |\text{ov}(X)|$ называется периодом слова X . Слово $\text{res}(X)$ есть префикс слова X длины, равной остатку от деления $|X|$ на $\pi(X)$.

ТЕОРЕМА 1 [2, с. 140]. Пусть A, B – такие слова, что $0 \leq |B| \leq |\text{ov}(A)|$. Задание (A, B) удовлетворяет свойству Черча–Россера тогда и только тогда, когда либо

1) $|B| \geq \pi(A)$ и $B \in \text{OVL}(A)$;

либо

2) $B = \text{res}(A)$ и $\text{OVL}(A) \cap \{U \mid |\text{res}(A)| < |U| < \pi(A)\} = \emptyset$.

ЛЕММА 1 [2, с. 142]. Пусть A, B – такие слова, что $|\text{ov}(A)| < |B| < |A|$. Если $\text{ov}(A) \in \text{OVL}(B)$, то для задания (A, B) выполнено свойство Черча–Россера.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A, B – такие слова, что $|\text{ov}(A)| < |B|$. Задание (A, B) удовлетворяет свойству Черча–Россера тогда и только тогда, когда $\text{ov}(A) \in \text{OVL}(B)$.

Прежде, чем начать доказывать эту теорему, напомним определения кодировок φ и ψ из [3]. Непустое слово T называется *гиперпростым*, если $\text{OVL}(T) = \{1\}$. Перенумеруем все слова в алфавите (1), не содержащие вхождений гиперпростого слова T :

$$R_1, R_2, \dots, R_i, \dots$$

Слово X называется *правильным*, если оно начинается и кончается словом T . Множество всех правильных слов в алфавите (1) взаимно однозначно отображается на множество всех слов в новом алфавите

$$b_1, b_2, \dots, b_i, \dots \quad (2)$$

с помощью функции $\varphi(X)$, определяемой индуктивно:

1) $\varphi(T) = 1$;

2) если $X = X_1 R_i T$, где X_1 есть правильное слово, то положим $\varphi(X) = \varphi(X_1) b_i$.

Пусть буква b не входит в алфавит (1). Тогда множество всех слов в алфавите (1) взаимно однозначно отображается на множество слов в алфавите

$$b, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, \quad (3)$$

не содержащих вхождений слова T , при помощи функции $\psi_T(X)$:

- 1) если $X = X_1 T X_2 T \cdots T X_k$, где $k \geq 2$, и слова $X_1, X_2, \dots, X_k$ не содержат вхождений слова T , то положим $\psi_T(X) = X_1 b X_2 b \cdots b X_k$;
- 2) если T не входит в X , то положим $\psi_T(X) = X$.

С помощью кодировок φ и ψ в статье [3] было доказано, что проблема равенства в произвольной полугруппе с одним соотношением сводится к проблеме равенства в полугруппе, заданной одним несократимым слева или справа соотношением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Часть “тогда” утверждения теоремы совпадает с леммой 1 (условие $|B| < |A|$ в лемме может быть опущено; в самом деле, из доказательства этой леммы в [2] сразу вытекает, что задание (A, B) независимо от длин слов A и B является строго конфлюэнтным [10, § 7, с. 194], а отсюда, как отмечается в [12], следует выполнимость свойства Черча–Россера).

Доказательство обратной импликации проведем методом от противного. Итак, пусть

$$|\text{ov}(A)| < |B|, \quad (4)$$

задание (A, B) удовлетворяет свойству Черча–Россера, но $\text{ov}(A) \notin \text{OVL}(B)$. Из (4) следует, что $B \notin \text{OVL}(A)$. Таким образом, для (A, B) справедливы следующие четыре условия:

- (а) свойство Черча–Россера;
- (б) $\text{ov}(A) \notin \text{OVL}(B)$;
- (в) $B \notin \text{OVL}(A)$;
- (г) A и B непусты.

Наша ближайшая цель – доказать, что в этом случае существует (в некотором алфавите) несократимое слева или справа соотношение (A_1, B_1) , для которого тоже выполнены условия (а)–(г). Для этого, учитывая работу [3], достаточно проверить, что кодировки φ и ψ сохраняют (а)–(г).

Напомним, что соотношение (A, B) называется *приводимым*, если его можно записать в одном из следующих видов:

$$(TET, TDT), \quad (5)$$

$$(TET, T), \quad (6)$$

$$(T, TET), \quad (7)$$

где T – непустое гиперпростое слово.

ЛЕММА 2. Если для задания (A, B) в алфавите (1) выполнены условия (а)–(г) и (A, B) приводимо, то для задания $(\varphi(A), \varphi(B))$ в алфавите (2) тоже выполнены условия (а)–(г) (с заменой A на $\varphi(A)$, B на $\varphi(B)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (A, B) имеет вид (5), так как условие (в) противоречит (6), условие (б) противоречит (7). Отсюда и из определения функции φ сразу следует, что $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ непусты, поэтому для нового задания выполняется условие (г). Условия (б), (в) для соотношения $(\varphi(A), \varphi(B))$ легко вытекают из определения φ и того, что слова $\text{ov}(A), B$ правильные и не совпадают с T . Свойство Черча–Россера при преобразовании φ сохраняется, так как для любых правильных слов P и Q переход $P \rightarrow Q$ есть элементарное преобразование полугруппы S в том и только том случае, когда $\varphi(P) \rightarrow \varphi(Q)$ есть элементарное преобразование полугруппы

$$S_0 = \langle b_1, b_2, \dots, b_i, \dots; \varphi(A) = \varphi(B) \rangle$$

(см. [3]). Лемма 2 доказана.

Если теперь соотношение (A, B) неприводимо, то согласно теореме 4 [3] существует непустое гиперпростое подслово T слова A или B такое, что никакой собственный конец слова T не является началом A или B , и никакое собственное начало слова T не является концом A или B .

ЛЕММА 3. Если для задания (A, B) в алфавите (1) выполнены условия (а)–(г) и (A, B) неприводимо, то для задания $(\psi_T(A), \psi_T(B))$ в алфавите (3) тоже выполнены условия (а)–(г) (с заменой A на $\psi_T(A)$, B на $\psi_T(B)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Из лемм 2, 3 следует, что можно, как и в [3], с помощью конечного числа преобразований φ и преобразования ψ_T перейти от (A, B) к несократимому слева или справа соотношению (A_1, B_1) , удовлетворяющему свойствам (а)–(г). Без ограничения общности будем считать, что соотношение несократимо слева. Докажем, что A_1 – гиперпростое.

ЛЕММА 4. Пусть для задания (A_1, B_1) полугруппы S_1 в некотором алфавите справедливо свойство Черча–Россера, слова A_1, B_1 непусты и соотношение (A_1, B_1) несократимо слева. Тогда $\text{ov}(A_1) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{ov}(A_1) = P$, тогда $A_1 = PR = SP$ для непустых слов R, S . Рассмотрим слово SPR . В полугруппе S_1 выполнены равенства $SPR = B_1R = SB_1$. Из свойства Черча–Россера следует существование слова Z и двух последовательностей сокращений:

$$B_1R = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_l = Z,$$

$$SB_1 = Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_m = Z.$$

Таким образом, мы имеем следующую последовательность элементарных преобразований длины $l + m + 2$:

$$Z = X_l \rightarrow \dots \rightarrow X_0 = B_1R \rightarrow A_1R = SA_1 \rightarrow SB_1 = Y_0 \rightarrow \dots \rightarrow Y_m = Z.$$

По теореме 1 [11] в этой последовательности имеется поворот (см. определение в [4] или [11]). Поскольку первые $l + 1$ преобразований являются вставками, а последние $m + 1$ – сокращениями, то, очевидно, слово A_1 должно быть подсловом слова R или S . Поэтому $P = 1$. Лемма 4 доказана.

Поскольку для (A_1, B_1) выполняется условие (б), то мы получили противоречие с леммой 4 – пустое слово принадлежит множеству $\text{OVL}(B_1)$. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 4 является частным случаем аналогичного утверждения о полугруппах со свойством Черча–Россера и произвольным числом соотношений без левых циклов. Можно дать наглядное доказательство этого утверждения, используя результаты статьи [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Метод сводимости проблемы равенства из [3] и лемму 4 нетрудно применить к решению некоторых задач для полугрупп с одним соотношением, обладающих свойствами Черча–Россера и нётеровости. В частности, для этих полугрупп можно доказать разрешимость проблемы вхождения в циклическую подполугруппу.

Московский педагогический государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
07.02.95

Исправленный вариант
24.08.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Book R. V. A note on special Thue systems with a single defining relation // Math. Systems Theory. 1983. V. 16. P. 57–60.
- [2] Otto F., Wrathall C. A note on Thue systems with a single defining relation // Math. Systems Theory. 1985. V. 18. P. 135–143.
- [3] Адян С. И., Оганесян Г. У. К проблемам равенства и делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 219–225.
- [4] Адян С. И. Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Тр. МИАН. 1966. Т. 85. С. 1–124.
- [5] Madlener K., Otto F. About the descriptive power of certain classes of finite string-rewriting systems // Theoret. Comput. Sci. 1989. V. 67. P. 143–172.
- [6] Book R. V. Thue systems as rewriting systems // J. Symbolic Comput. 1987. V. 3. P. 39–68.
- [7] Howie J., Pride S. J. The word problem for one-relator semigroups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1986. V. 99. P. 33–44.
- [8] Адян С. И. К проблеме делимости для моноидов, заданных одним соотношением // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 3–9.
- [9] Otto F. Conjugacy in monoids with a special Church–Rosser presentation is decidable // Semigroup Forum. 1984. V. 29. P. 223–240.
- [10] Юэ Ж., Оппен Д. Равенства и правила переписывания // Математическая логика в программировании. М.: Мир, 1991. С. 176–232.
- [11] Адян С. И. О преобразованиях слов в полугруппе, заданной системой определяющих соотношений // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. С. 611–621.
- [12] Remmers J. H. On the geometry of semigroup presentations // Adv. Math. 1980. V. 36. P. 283–296.