Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Фролов, Разложение целых функций в ряд Лагранжа, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 119–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:29:37

УДК 517

РАЗЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ЛАГРАНЖА

Ю. Н. Фролов

В работе исследуется задача о представимости целых функций пространств, описываемых порядком и типом, рядами Лагранжа, сходящимися в естественной для этих пространств топологии, которая сильнее топологии компактной сходимости.

Библиография: 3 названия.

1. Постановка задачи. Пусть $L(\lambda)$ – целая функция, имеющая простые нули $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Произвольной целой функции $M(\lambda)$ формально можно сопоставить ряд

$$M(\lambda) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_{\nu}} \frac{M(\lambda_{\nu})}{L'(\lambda_{\nu})}, \quad (1)$$

который называется интерполяционным рядом Лагранжа функции $M(\lambda)$ с узлами интерполяции $\{\lambda_{\nu}\}$.

Вопросам разложимости целых функций из того или иного класса в ряд Лагранжа в топологии равномерной сходимости на любом компакте посвящено немалое количество работ. Наиболее важные результаты в этой области приведены, например, в монографии И. И. Ибрагимова [1].

В настоящей работе исследуется вопрос о представимости целых функций пространств, описываемых порядком и типом, рядами Лагранжа, сходящимися в естественной для этих пространств топологии, которая сильнее, нежели топология компактной сходимости.

Дадим краткое описание этих пространств.

Пусть $0 < \alpha < \infty$ и $0 < \beta < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ через G_{ε} обозначим банахово пространство целых функций $F(z)$, для которых конечны нормы

$$\|F\|_{\varepsilon} = \sup_r \{M_F(r) \exp[-(\beta + \varepsilon)r^{\alpha}]\},$$
$$M_F(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|.$$

Проективный предел семейства $\{G_{\varepsilon}\}$ обозначим через $[\alpha, \beta]$. Это пространство состоит из целых функций порядка меньшего α , либо порядка α , но типа не выше β . Последовательность $\{F_n(z)\}$ сходится к $F(z)$ в $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда

- 1) $F_n(z) \rightarrow F(z)$ равномерно на любом компакте;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists r_0(\varepsilon)$, не зависящее от n , такое, что

$$|F_n(z)| < \exp[(\beta + \varepsilon)|z|^{\alpha}], \quad |z| > r_0(\varepsilon).$$

Далее, для любого $0 < h < \beta$ через N_h обозначим банахово пространство целых функций $F(z)$, для которых конечны нормы

$$\|F\|_h = \sup_r [M_F(r) \exp(-hr^\alpha)].$$

Индуктивный предел семейства $\{N_h\}$ обозначим через $[\alpha, \beta)$. Пространство $[\alpha, \beta)$ состоит из целых функций порядка либо меньшего α , либо равного α , но тогда типа меньшего β . Последовательность $\{F_n(z)\}$ сходится к $F(z)$ в $[\alpha, \beta)$ тогда и только тогда, когда

- 1) $F_n(z) \rightarrow F(z)$ равномерно на любом компакте;
- 2) существуют $h < \beta$ и $r_0(h)$, не зависящие от n , такие, что

$$|F_n(z)| < \exp[h|z|^\alpha], \quad |z| > r_0(h).$$

Теперь обратимся к задаче.

Будем считать $L(\lambda)$ целой функцией порядка $\rho_1 > 0$, типа $\sigma_1 \neq 0, \infty$, $L(0) \neq 0$ и $\{\lambda_\nu\}$ – ее простые нули.

Зададимся вопросом: какими свойствами должна обладать функция $L(\lambda)$, чтобы $\forall M(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$ разлагалась в топологии $[\rho_1, \sigma_1]$ в свой ряд Лагранжа (1)?

Заметим, во-первых, что брать $M(\lambda)$ из более широкого класса, вообще говоря, нельзя. В самом деле, если считать классом разлагаемых функций хотя бы $[\rho_1, \sigma_1]$, то $M(\lambda) = \lambda L'(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$ и ее ряд (1)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{\lambda_\nu L'(\lambda_\nu)}{L'(\lambda_\nu)}$$

при $\lambda = 0$ расходится. Таким образом, не любая функций из $[\rho_1, \sigma_1]$ разлагается в ряд (1).

Заметим, во-вторых, что усилить топологию, в которой $M(\lambda)$ разлагается в ряд (1), также нельзя. Действительно, пусть $M(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$ разлагается в топологии $[\rho_1, \sigma_1]$ в ряд (1). Тогда имеются $\sigma' < \sigma_1$ и $C > 0$ такие, что при любом ν и $|\lambda| > r_0$, где r_0 не зависит от ν , справедливо неравенство

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{M(\lambda_\nu)}{L'(\lambda_\nu)} \right| < C \exp(\sigma' |\lambda|^{\rho_1}). \quad (2)$$

Поскольку $L(\lambda)$ – целая функция типа σ_1 при порядке ρ_1 , для любого $\sigma'' < \sigma_1$ можно указать последовательность уходящих на бесконечность чисел $\{\alpha_k\}$ таких, что

$$|L(\alpha_k)| > \exp(\sigma'' |\alpha_k|^{\rho_1}).$$

Теперь, используя произвол λ в формуле (2), имеем

$$|M(\lambda_\nu)| < C |L'(\lambda_\nu)| |\alpha_k - \lambda_\nu| \exp[(\sigma' - \sigma'') |\alpha_k|^{\rho_1}],$$

откуда, считая $0 < \sigma' < \sigma'' < \sigma_1$, при $k \rightarrow \infty$ получим $M(\lambda_\nu) = 0$, $\nu \geq 1$, т.е. $M(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, не любую функцию из $[\rho_1, \sigma_1]$ можно разложить в топологии $[\rho_1, \sigma_1]$ в ряд (1).

Таким образом, ограничения на рост разлагаемой функции и на топологию, в которой идет разложение, вызваны существом дела.

2. Решение задачи. Сформулированную выше задачу решает следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы $\forall M(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$ разлагалась в топологии $[\rho_1, \sigma_1]$ в ряд Лагранжа

$$M(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_{\nu}} \frac{M(\lambda_{\nu})}{L'(\lambda_{\nu})}, \quad (3)$$

необходимым и достаточным является удовлетворение функции $L(\lambda)$ следующим двум условиям:

- 1) $|L'(\lambda_{\nu})| > \exp[(\sigma_1 - \varepsilon_1)|\lambda_{\nu}|^{\rho_1}] \quad \forall \varepsilon_1 > 0, \quad \nu > \nu_0(\varepsilon_1);$ (4)
- 2) существуют $0 < \rho < \rho_1$ (хотя бы и сколь угодно малое) и последовательность $r_k \uparrow \infty$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k^{-\rho} \min_{|\lambda|=r_k} \ln |L(\lambda)| > 0. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Так как $\forall M(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$ ряд (3) сходится, из (3) при $\lambda = 0$ следует

$$\left| \frac{M(\lambda_{\nu})}{\lambda_{\nu} L'(\lambda_{\nu})} \right| < C, \quad C = \text{const},$$

и

$$|L'(\lambda_{\nu})| > \frac{|M(\lambda_{\nu})|}{C|\lambda_{\nu}|}.$$

Зададим $\varepsilon_1 > 0$ и используем произвол в выборе $M(\lambda)$, положив $M(\lambda)$ функцией Миттаг–Левфлера

$$M(\lambda) = E_{\rho_1}(\sigma_1'^{1/\rho_1} \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1'^{1/\rho_1} \lambda)^n}{\Gamma(n/\rho_1 + 1)}, \quad \sigma_1' = \sigma_1 - \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

Учитывая асимптотику этой функции, можно утверждать, что в некотором угле $\Delta_1 = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \alpha\}$, достаточно малого раствора,

$$|M(\lambda)| > \exp \left[\left(\sigma_1' - \frac{\varepsilon_1}{3} \right) |\lambda|^{\rho_1} \right], \quad |\lambda| > r_1(\varepsilon_1).$$

В точках λ_{ν} , попавших в Δ_1 , при больших ν

$$|L'(\lambda_{\nu})| > \frac{1}{C(\lambda_{\nu})} \exp \left[\left(\sigma_1' - \frac{\varepsilon_1}{3} \right) |\lambda_{\nu}|^{\rho_1} \right]. \quad (6)$$

Поворачивая Δ_1 на α и выбирая в качестве $M(\lambda)$ функцию $E_{\rho_1}(\sigma_1'^{1/\rho_1} \lambda e^{-i\alpha})$, получим угол Δ_2 такой, что при λ_{ν} , попавших в Δ_2 , продолжает действовать оценка (6). И так далее. Через конечное число шагов исчерпаем всю плоскость и получим при больших ν неравенство

$$|L'(\lambda_{\nu})| > \exp[(\sigma_1 - \varepsilon_1)|\lambda_{\nu}|^{\rho_1}],$$

т.е. оценку (4).

Далее, исходя из равенства (3) и используя только что полученную оценку, вне кружков

$$A_\nu : |\lambda - \lambda_\nu| < |\lambda_\nu|^{-h}, \quad h > \rho_1,$$

имеем

$$\left| \frac{M(\lambda)}{L(\lambda)} \right| < \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^h \frac{|M(\lambda_\nu)|}{|L'(\lambda_\nu)|} < C \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\exp[(\sigma_1 - \varepsilon)|\lambda_\nu|^{\rho_1}]}{\exp[(\sigma_1 - \varepsilon_1)|\lambda_\nu|^{\rho_1}]}.$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon_1 < \varepsilon$, получим

$$|L(\lambda)| > C_1 |M(\lambda)|, \quad \lambda \notin A_\nu.$$

Заметим, что сумма радиусов A_ν – конечная, ибо $h > \rho_1$ и $\sum |\lambda_\nu|^{-h} < \infty$.

Как и прежде, располагаясь выбором $M(\lambda)$, используя функцию Миттаг–Леффлера и углы $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, в итоге $\forall \varepsilon_0 > 0$ получим оценку

$$|L(\lambda)| > \exp[(\sigma_1 - \varepsilon_0)|\lambda|^{\rho_1}], \quad |\lambda| > r_0(\varepsilon_0), \quad \lambda \notin A_\nu. \quad (7)$$

Пусть сумма диаметров A_ν равна H . Повернем центры A_ν по соответствующим окружностям до попадания на положительную полуось. Повернутые кружки пересекутся с полуосью по некоторому множеству K . Ясно, что на $[0, 2H]$ найдется $r_1 \notin K$, на $[2H, 4H]$ найдется $r_2 \notin K$ и т.д. Таким образом, имеются $r_k \uparrow \infty$ такие, что окружности $|\lambda| = r_k$ проходят вне кружков A_ν и на них справедлива оценка (7).

Полагая $\rho = \rho_1/2$, из (7) имеем

$$r_k^{-\rho} \min_{|\lambda|=r_k} \ln |L(\lambda)| > (\sigma_1 - \varepsilon_0) r_k^{\rho_1 - \rho} \rightarrow +\infty,$$

т.е. справедливо соотношение (5).

Достаточность. Заметим, что условие (4) влечет сходимость ряда (3) в топологии $[\rho_1, \sigma_1] \forall M(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$. Действительно, в книге [2] приведена равномерная по ν оценка

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \right| < \exp[(\sigma_1 + \varepsilon)|\lambda|^{\rho_1}], \quad |\lambda| > r_0(\varepsilon).$$

Тогда при больших ν

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{M(\lambda_\nu)}{L'(\lambda_\nu)} \right| < e^{(\sigma_1 + \varepsilon)|\lambda|^{\rho_1}} \frac{\exp[(\sigma_1 - 2\varepsilon_1)|\lambda_\nu|^{\rho_1}]}{\exp[(\sigma_1 - \varepsilon_1)|\lambda_\nu|^{\rho_1}]},$$

и члены ряда (3) допускают оценку

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{M(\lambda_\nu)}{L'(\lambda_\nu)} \right| < C e^{-\varepsilon_1|\lambda_\nu|^{\rho_1}} \exp[(\sigma_1 + \varepsilon)|\lambda_\nu|^{\rho_1}],$$

откуда и следует сходимость ряда (3) в $[\rho_1, \sigma_1]$.

Заметим, что, по сути дела, доказано такое утверждение: для того, чтобы $\forall M(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$ ее ряд (3) сходилась в $[\rho_1, \sigma_1]$ (вопрос о сумме ряда открыт), необходимо и достаточно условие (4).

Далее, отправляясь от ρ , фигурировавшего в (5), и выбирая $\sigma \neq 0, \infty$, введем в рассмотрение целую функцию порядка ρ и типа σ

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma e \rho)^{n/\rho} \frac{z^n}{n^{n/\rho}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Вычислим ρ_2 и σ_2 из равенств

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}, \quad (\sigma_1, \rho_1)^{1/\rho_1} (\sigma_2 \rho_2)^{1/\rho_2} = (\sigma \rho)^{1/\rho}. \quad (8)$$

Если

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n \in [\rho_1, \sigma_1) \quad \text{и} \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n a_n z^n \in [\rho_2, \sigma_2],$$

то, как показано в [3], выражение

$$\sum_0^{\infty} b_n d_n$$

имеет смысл (ряд абсолютно сходится) и, более того, представляет собой линейный непрерывный функционал $S_M(F)$, действующий в $[\rho_2, \sigma_2]$. Ясно, что $\rho_2 > \rho$ и $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ функция $f(\lambda z)$ содержится в $[\rho_2, \sigma_2]$, причем

$$S_M[f(\lambda z)] = \sum_0^{\infty} b_n \lambda^n = M(\lambda). \quad (9)$$

Когда $|\lambda| < r_k$

$$\Phi_{r_k}(z, \lambda) = f(\lambda z) - \sum_{|\lambda_\nu| < r_k} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{f(\lambda_\nu z)}{L'(\lambda_\nu)} = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_k} \frac{f(\mu z) d\mu}{(\mu - \lambda)L(\mu)}.$$

При любом фиксированном λ и больших k $|\mu - \lambda| > 1$ и

$$|\Phi_{r_k}(z, \lambda)| \leq C r_k \max_{|\mu|=r_k} \left| \frac{f(\mu z)}{L(\mu)} \right| < \frac{\exp[(\sigma + \varepsilon)|z|^\rho r_k^\rho]}{\exp(A r_k^\rho)},$$

где $A > 0$, $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что равномерно в окрестности $z = 0$

$$f(\lambda z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < r_k} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{f(\lambda_\nu z)}{L'(\lambda_\nu)}. \quad (10)$$

Докажем, что на самом деле $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ по z в топологии $[\rho_2, \sigma_2]$ справедлива формула

$$f(\lambda z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{f(\lambda_\nu z)}{L'(\lambda_\nu)}. \quad (11)$$

При любом фиксированном λ и больших ν

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{f(\lambda_\nu z)}{L'(\lambda_\nu)} \right| < C e^{-\varepsilon_0 |\lambda_\nu|^{\rho_1}} \exp[(\sigma + \varepsilon) |\lambda_\nu|^\rho |z|^\rho - (\sigma_1 - 2\varepsilon_0) |\lambda_\nu|^{\rho_1}]. \quad (12)$$

Положим $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ и найдем

$$A = \max_x \exp[(\sigma + \varepsilon) x^\rho |z|^\rho - (\sigma_1 - \varepsilon_1) x^{\rho_1}].$$

Максимум достигается при

$$x = \left[\frac{(\sigma + \varepsilon) \rho |z|^\rho}{(\sigma_1 - \varepsilon_1) \rho_1} \right]^{1/(\rho_1 - \rho)},$$

откуда, используя формулы (8),

$$\begin{aligned} A &= \exp \left\{ |z|^{\rho_2} \frac{(\sigma + \varepsilon)^{\rho_2/\rho}}{(\sigma_1 - \varepsilon_1)^{\rho_2/\rho_1}} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\rho_2/\rho_1} - \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\rho_2/\rho} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ |z|^{\rho_2} \frac{1}{\rho_2} \frac{[(\sigma + \varepsilon) \rho]^{\rho_2/\rho}}{[(\sigma_1 - \varepsilon_1) \rho_1]^{\rho_2/\rho_1}} \right\} = \exp[(\sigma_2 + \varepsilon_2) |z|^{\rho_2}], \end{aligned}$$

где $\varepsilon_2 > 0$ – мало, вместе с $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$.

Но тогда из оценки (12) следует, что ряд (11) сходится в $[\rho_2, \sigma_2]$. Объединяя этот факт с (10), получим, что в $[\rho_2, \sigma_2]$ справедлива формула (11).

Возьмем $\forall M(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$ и подействуем по z функционалом S_M на обе части (11). Почленное применение функционала законно, и в соответствии с (9) получим $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$M(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{M(\lambda_\nu)}{L'(\lambda_\nu)}.$$

Сходимость последнего ряда в $[\rho_1, \sigma_1]$ уже была установлена.

Московский энергетический институт

Поступило
29.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
- [2] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
- [3] Фролов Ю. Н. Об аппроксимации решений уравнения бесконечного порядка в обобщенных производных посредством элементарных решений // Исследования по теории аппроксимации функций. Уфа, 1979. С. 268–281.