Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, Х. К. Гарсиа, Р. Б. Гезада, Об уравнении Линдблада с неограниченными переменными коэффициентами, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 125–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:03:16

УДК 517.98

ОБ УРАВНЕНИИ ЛИНДБЛАДА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. М. Чеботарев, Х. К. Гарсия, Р. Б. Гезада

Получены новые априорные оценки для резольвент минимальных квантовых динамических полугрупп, которые позволяют упростить известные достаточные условия консервативности и ввести условия непрерывности операторных коэффициентов, зависящих от времени, гарантирующие существование консервативных решений уравнений марковской эволюции.

Библиография: 11 названий.

В статье вводится операторозначное условие непрерывности для инфинитезимальных операторов уравнения марковской эволюции, описывающих динамику открытых квантовых систем в алгебре ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и в алгебре операторов с конечным следом $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ над гильбертовым пространством $\mathcal{H}$ (см. [1]–[3]). Сжимающая полугруппа $P_t(\cdot)$, действующая в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и обладающая свойствами вполне положительности, нормальности, консервативности и ультраслабой непрерывности, называется *квантовой динамической полугруппой* [3]. Свойства нормальности и ультраслабой непрерывности означают соответственно, что $\text{l.u.b. } P_t(X_n) = P_t(\text{l.u.b. } X_n)$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Tr} \{ \rho(P_t(B) - B) \} = 0$$

для любых операторов $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Свойство консервативности в гейзенберговском представлении означает сохранение единицы I алгебры наблюдаемых $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е. $P_t(I) \equiv I \quad \forall t \geq 0$, а в шрёдингеровском представлении – сохранение следа начального состояния $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ в процессе эволюции: $\text{Tr } T_t(\rho) \equiv \text{Tr } \rho \quad \forall t \geq 0$, где $T_t: \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ и $P_t: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – двойственные полугруппы: $\text{Tr} \{ T_t(\rho) B \} = \text{Tr} \{ \rho P_t(B) \}$. Полугруппа T_t называется *преддвойственной* полугруппе P_t .

В работах [4]–[6] было показано, что при естественных предположениях об операторных коэффициентах формального генератора $\mathcal{L}(\cdot)$ существует *минимальная* квантовая динамическая полугруппа $P_t^{\min}(\cdot) = \exp \{ t \mathcal{L}(\cdot) \}$, консервативность которой является необходимым и достаточным условием отсутствия других консервативных квантовых динамических полугрупп с тем же формальным генератором. Поэтому генераторы консервативных минимальных полугрупп называются *регулярными*.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95–01–00784. Работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке фонда CONACYT Мехико, грант № 0233Р–Е9506.

Условие непрерывности выделяет класс регулярных инфинитезимальных операторов с коэффициентами, зависящими от времени. В настоящей работе показано, что при подходящем выборе операторозначных условий непрерывности можно гарантировать существование и консервативность решения задачи Коши для уравнения марковской эволюции (уравнения Линдблада) с переменными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}P_t(\mathcal{B}) = \mathcal{L}_t(P_t(\mathcal{B})), \quad P_t(\mathcal{B})|_{t=0} = B,$$

определяемого формальным инфинитезимальным оператором $\mathcal{L}_t(\cdot)$ с переменными коэффициентами

$$\mathcal{L}_t(B) = \Phi_t(B) - \Phi_t(I) \circ B + i[H_t, B], \quad H_t = H_t^*, \quad \Phi_t(\cdot) \in \text{CPn}(\mathcal{H}),$$

где $\text{CPn}(\mathcal{H})$ – конус вполне положительных нормальных отображений алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (см. [3]). Теория уравнений с переменными коэффициентами играет важную роль при решении задач в представлении взаимодействия.

Статья состоит из пяти разделов. В первом разделе излагается алгебраическая сторона теории, связанная с общими свойствами минимальных решений резольвентного уравнения [4], [5]. Во втором разделе мы обсуждаем априорные оценки минимальных решений однородного и неоднородного уравнения Линдблада, вытекающие из условия $\mathcal{L}(\Lambda) \leq c\Lambda$ для какого-нибудь положительного самосопряженного оператора $\Lambda \geq \Phi(I)$, которое обеспечивает единственность решения задачи Коши в классе динамических полугрупп при дополнительных предположениях об областях определения оператора Λ и коэффициентов инфинитезимального оператора $\mathcal{L}(\cdot)$. В третьем разделе получены оценки решения двойственного уравнения в алгебре операторов с конечным следом. В четвертом разделе вводится условие непрерывности, позволяющее описать класс инфинитезимальных операторов с переменными коэффициентами как пополнение множества инфинитезимальных операторов $\mathcal{L}_t(\cdot)$ с кусочно постоянными коэффициентами $\Phi_t(\cdot)$, H_t , удовлетворяющими достаточным условиям консервативности в каждой точке $t \in \mathbb{R}_+$. Основной результат статьи – вывод глобального условия консервативности из локальных достаточных условий консервативности. В пятом разделе рассмотрен пример, иллюстрирующий наши основные результаты.

1. Априорные оценки и достаточные условия консервативности. Алгебраическая часть теории. В работе [4] была предложена удобная форма резольвентного уравнения для квантовой динамической полугруппы $P_t(\cdot) = \exp\{t\mathcal{L}\}(\cdot)$ на алгебре фон Неймана $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ с генератором $\mathcal{L}(B) = \Phi(B) - \Phi(I) \circ B + i[H, B]$, $H = H^*$, $\Phi(\cdot) \in \text{CP}(\mathcal{H})$, не зависящим от времени. Резольвентное уравнение имеет вид

$$R_\lambda(B) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} P_t(B) = A_\lambda(B) + Q_\lambda(R_\lambda(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (1.1)$$

где $A_\lambda(\cdot)$ и $Q_\lambda(\cdot)$ – вполне положительные сжимающие отображения,

$$A_\lambda(B) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} W_t^* B W_t, \quad Q_\lambda(B) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} W_t^* \Phi(B) W_t, \quad (1.2)$$

а $W_t = \exp\{-Gt\}$ – сильно непрерывная сжимающая полугруппа в $\mathcal{H}$ с генератором $-G$: $G\psi = iH\psi + \frac{1}{2}\Phi(I)\psi$ $\forall \psi \in \text{dom } H \cap \text{dom } \Phi(I)$. В [4] (см. также [5], [6]) показано, что ряд $\sum Q_\lambda^k(A_\lambda(\cdot))$ сильно сходится на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ к резольвенте минимальной динамической полугруппы

$$R_\lambda^{\min}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_\lambda^k(A_\lambda(B)). \quad (1.3)$$

Ее минимальность означает, что разность $R_\lambda(\cdot) - R_\lambda^{\min}(\cdot) \in \text{CP}(\mathcal{H})$ является вполне положительным отображением для резольвенты $R_\lambda(\cdot)$ любой другой динамической полугруппы с тем же формальным генератором $\mathcal{L}(\cdot)$.

Интегрируя по частям интегральное представление (1.2) отображения A_λ , получаем цепочку тождеств

$$A_\lambda(I) + \lambda^{-1}Q_\lambda(I) \equiv \lambda^{-1}I, \quad \sum_{k=0}^n Q_\lambda^k(A_\lambda(I)) + \lambda^{-1}Q_\lambda^{n+1}(I) \equiv \lambda^{-1}I \quad \forall n > 1,$$

из которых следует

- (1) монотонное убывание последовательности ограниченных положительных операторов $Q_\lambda^n(I)$;
- (2) априорная оценка для суммы:

$$\sum_{k=0}^n Q_\lambda^k(A_\lambda(I)) \leq \lambda^{-1}I;$$

- (3) представление резольвенты квантовой динамической полугруппы в виде ряда

$$R_\lambda(I) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_\lambda^k(A_\lambda(I)) + \lambda^{-1} \inf_n Q_\lambda^n(I) = R_\lambda^{\min}(I) + \lambda^{-1} \inf_n Q_\lambda^n(I).$$

Последнее тождество показывает, что $R_\lambda^{\min}(I) = \lambda^{-1}I$ и $P_t^{\min}(I) \equiv I$, если и только если $\inf_n Q_\lambda^n(I) = 0$ для какого-либо $\lambda > 0$ (см. [4]). В противном случае существует стационарная точка $X_\lambda = \inf_n Q_\lambda^n(I) \geq 0$, являющаяся наибольшим собственным оператором отображения $Q_\lambda(\cdot)$ в классе положительных операторов с нормой, равной 1. Если $R_\lambda^{\min}(I) \leq \lambda^{-1}I$, то квантовая динамическая полугруппа $P_t(\cdot)$ с тем же формальным генератором $\mathcal{L}(\cdot)$ консервативна тогда и только тогда, когда $R_\lambda(I) - R_\lambda^{\min}(I) = X_\lambda$.

В случае непрерывной по норме полугруппы с генератором $\mathcal{L}(\cdot)$: $\mathcal{L}(B) = \Phi(B) - \Phi(I) \circ B + i[H, B]$, неравенство

$$\mathcal{L}(\Lambda) \leq c\Lambda, \quad c \in \mathbb{R}_+, \quad (1.4)$$

для некоторого положительного самосопряженного оператора $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ дает априорные оценки для полугруппы и резольвенты

$$\begin{aligned} P_t(\Lambda) &= \Lambda + t\mathcal{L}(\Lambda) + \dots + \frac{t^n}{n!}\mathcal{L}^n(\Lambda) + \dots \leq \Lambda e^{ct}, \\ R_\lambda(\Lambda) &= \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} P_t(\Lambda) \leq (\lambda - c)^{-1}\Lambda \quad \forall \lambda > c. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Рассмотрим банахову подалгебру $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$ алгебры $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, порождаемую линейной оболочкой множества положительных операторов ρ с конечным следом таких, что плотно определенный оператор $\rho\Lambda$ допускает ограниченное продолжение на $\mathcal{H}$ и имеет конечный след. Оценка (1.5) означает, что полугруппа T_t оставляет инвариантной подалгебру $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$. Действительно,

$$\mathrm{Tr}\{T_t(\rho)\Lambda\} = \mathrm{Tr}\{\rho P_t(\Lambda)\} \leq e^{ct} \mathrm{Tr} \rho\Lambda, \quad \|\rho\|_{\mathcal{T}_\Lambda} = \mathrm{Tr} \rho\Lambda \quad \forall \rho \in \mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H}).$$

Заметим, что $A_\lambda(\Phi(I)) \equiv Q_\lambda(I)$. Поэтому если $\Phi(I) \leq \Lambda$, то из (1.5) и разложения (1.3) для резольвенты следует оценка для суммы ряда

$$\sum_1^\infty Q_\lambda^k(I) = R_\lambda(\Phi(I)) \leq R_\lambda(\Lambda) \leq (\lambda - c)^{-1}\Lambda \quad \forall \lambda > c.$$

Как мы увидим ниже, эта оценка распространяется на резольвенты минимальных квантовых динамических полугрупп с неограниченными коэффициентами:

$$\sum_1^\infty Q_\lambda^k(I) = R_\lambda^{\min}(\Phi(I)) \leq (\lambda - c)^{-1}\Lambda \quad \forall \lambda > c.$$

Следовательно, $Q_\lambda^n(I) \xrightarrow{w} 0$ при $n \rightarrow \infty$ на плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathrm{dom} \Lambda$. Отсюда следует сильная сходимость $Q_\lambda^n(I) \xrightarrow{s} 0$, и поэтому условие (1.4) является достаточным для консервативности минимальной динамической полугруппы [6]. Априорные оценки (1.5) для минимальной резольвенты и условие (1.4) в случае $\Lambda = \Phi(I)$ были рассмотрены в [7]. Важное наблюдение о том, что в качестве оператора Λ можно использовать операторы, мажорирующие $\Phi(I)$, впервые было сделано в работе [8].

Этот результат очевидным образом распространяется на полугруппы с кусочно постоянными производящими операторами, удовлетворяющими в каждой точке условию (1.4). Оказывается, что оно остается справедливым и для производящих операторов, зависящих от времени и непрерывных в следующем смысле:

$$\delta_{s,t}(B, \rho) = |\mathrm{Tr}\{\rho(\mathcal{L}_t(B) - \mathcal{L}_s(B))\}| \rightarrow 0 \quad \text{при } |s - t| \rightarrow 0, \\ \varlimsup_{s \rightarrow t} \sup_{\|B\| \leq 1} \delta_{s,t}(B, \rho) \leq K_t \mathrm{Tr}(\rho\Lambda), \quad K_t \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \quad \forall \rho \in \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}).$$

Строгое доказательство этих утверждений распадается на ряд вспомогательных лемм.

2. Априорные оценки и достаточные условия консервативности. Функциональная часть теории. В дальнейшем изложении нижний индекс ‘*’ используется для обозначения квадратичных и билинейных форм, аргументы которых указываются в квадратных скобках. Например, $\Lambda_*[\varphi, \psi] = (\Lambda^{1/2}\varphi, \Lambda^{1/2}\psi)$ – билинейная форма, порождаемая положительным самосопряженным оператором Λ , $\mathrm{dom} \Lambda_* = \mathrm{dom} \Lambda^{1/2}$ (см. [9]), и $\Lambda_*[\varphi]$ – соответствующая квадратичная форма. Неравенство $\Phi(I) \leq \Lambda$ означает, что $\mathrm{dom} \Lambda \subseteq \mathrm{dom} \Phi(I)$ и $(\psi, \Phi(I)\psi) \leq (\psi, \Lambda\psi) \quad \forall \psi \in \mathrm{dom} \Lambda$. По непрерывности это неравенство распространяется на $\psi \in \mathrm{dom} \Lambda^{1/2} \subseteq \mathrm{dom} \Phi(I)^{1/2}$.

В дальнейшем изложении предполагается, что для некоторого $N \geq 2$

$$\mathcal{D} = \mathrm{dom} G^N \subseteq \mathrm{dom} H, \quad H\psi = H^*\psi \quad \forall \psi \in \mathrm{dom} G^N. \quad (2.1)$$

Очевидно, что $\mathrm{dom} G^N \subseteq \mathrm{dom} H \cap \mathrm{dom} \Phi(I) \subseteq \mathrm{dom} G$, и если H – самосопряженный оператор, то, как было показано в [5], $\mathrm{dom} G \subseteq \mathrm{dom} \Phi_*(I)$.

ЛЕММА 2.1. Если выполнены предположения (2.1) и

$$-2 \operatorname{Re} \Lambda_*[G\varphi, \varphi] \leq c \Lambda_*[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

то

$$A_\lambda(\Lambda) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} W_t^* \Lambda W_t \leq (\lambda - c)^{-1} \Lambda$$

для любого $\lambda > c$ и $A_\lambda(\Lambda_\varepsilon) \leq (\lambda - c)^{-1} \Lambda_\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, где $\Lambda_\varepsilon = \Lambda(I + \varepsilon \Lambda)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{H}_\Lambda$ – гильбертово подпространство в H со скалярным произведением $(\psi, \varphi) = (\Lambda^{1/2}\psi, \Lambda^{1/2}\varphi)$. Если выполнены условия леммы 2.1, то полугруппа $W_t = \exp\{-Gt\}$ непрерывна и ограничена в $\mathcal{H}_\Lambda$.

Действительно, для любого $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем $\varphi_t = W_t \varphi \in \mathcal{D}$ и

$$\frac{d}{dt} \|\varphi_t\|_\Lambda^2 = -2 \operatorname{Re} \Lambda_*[G\varphi_t, \varphi_t] \leq c \|\varphi_t\|_\Lambda^2,$$

т.е. $\|W_t \varphi\|_\Lambda^2 \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и $\|W_t \varphi\|_\Lambda^2 \leq e^{ct} \|\varphi\|_\Lambda^2$. Оба утверждения распространяются по непрерывности на $\operatorname{dom} \Lambda_*$. Это свойство полугруппы W_t используется в [4] для корректного определения интегральной формы уравнения Линдблада. Здесь мы воспользуемся тем, что $\|\varphi_t\|_\Lambda^2 = \Lambda_*[\varphi_t]$ – непрерывная функция параметра $t \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим плотно определенную квадратичную форму $A_\lambda(\Lambda)_*$, соответствующую оператору $A_\lambda(\Lambda)$:

$$\begin{aligned} \lambda A_\lambda(\Lambda)_*[\varphi] &= - \int_0^\infty \Lambda_*[\varphi_t] de^{-\lambda t} = \Lambda_*[\varphi] - 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \Lambda_*[G\varphi_t, \varphi_t] \\ &\leq \Lambda_*[\varphi] + c \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \Lambda_*[\varphi_t] = \Lambda_*[\varphi] + c A_\lambda(\Lambda)_*[\varphi]. \end{aligned}$$

Таким образом, $A_\lambda(\Lambda)_*[\varphi] \leq (\lambda - c)^{-1} \Lambda_*[\varphi]$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$, т.е. $A_\lambda(\Lambda) \leq (\lambda - c)^{-1} \Lambda$ на $\operatorname{dom} \Lambda$.

В работе [6] было показано, что для любого сжимающего вполне положительного отображения $\pi(\cdot)$, любого положительного самосопряженного оператора B и любого $\varepsilon \in (0, \mu)$ имеют место оценки

$$\pi(B_\varepsilon) \leq \pi(B_{\varepsilon-\mu})_\mu \leq \pi(B)_\varepsilon \quad \forall B \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}), \quad B_\varepsilon = B(I + \varepsilon B)^{-1}, \quad (2.2)$$

$$0 \leq X_\varepsilon \leq Y_\varepsilon, \quad (2.3)$$

если $0 \leq X \leq Y$ – самосопряженные операторы. Полагая в (2.2) $\pi(\cdot) = A_\lambda(\cdot)$, $B = \Lambda$, получаем последнее утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть для некоторого $c \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{L}(\Lambda)_*[\varphi] \leq c \Lambda_*[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (2.4)$$

где $\mathcal{L}(B)_*[\varphi] = \Phi(B)_*[\varphi] - (G\varphi, B\varphi) - (B\varphi, G\varphi)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Если выполнены условия (2.1), (2.4), то

$$R_{\lambda}^{\min}(\Lambda_{\varepsilon}) \leq (\lambda - c)^{-1} \Lambda_{\mu}, \quad P_t^{\min}(\Lambda_{\varepsilon}) \leq e^{ct} \Lambda_{\mu}$$

для любого $\lambda > c$, $\mu \in (0, \varepsilon)$, где $\Lambda_{\varepsilon} = \Lambda(I + \varepsilon \Lambda)^{-1} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что

$$R_{\lambda}^{\min}(\Lambda_{\varepsilon}) = \sup_n R_{\lambda}^{(n)}(\Lambda_{\varepsilon}) \leq (\lambda - c)^{-1} \Lambda_{\mu} \quad \forall \mu \in (0, \varepsilon),$$

где уравнение для минимальной резольвенты следует из рекуррентных уравнений для минимальной динамической полугруппы (см. [4], [5])

$$R_{\lambda}^{(n)}(\Lambda_{\varepsilon}) = A_{\lambda}(\Lambda_{\varepsilon}) + Q_{\lambda}(R_{\lambda}^{(n-1)}(\Lambda_{\varepsilon})), \quad R_{\lambda}^{(0)} = 0. \quad (2.5)$$

Поскольку условие леммы 2.1 следует из (2.4), то неравенство

$$R_{\lambda}^{(k)}(\Lambda_{\varepsilon}) = A_{\lambda}(\Lambda_{\varepsilon}) \leq (\lambda - c)^{-1} \Lambda_{\mu} \quad \forall \mu \in (0, \varepsilon)$$

при $k = 1$ является следствием леммы 2.1 и оценки (2.2) для $\pi(\cdot) = A_{\lambda}(\cdot)$, $B = \Lambda$. Предположим, что это неравенство выполнено для $k = 2, 3, \dots, n-1$, и докажем его для $k = n$.

Из свойств (2.2), (2.3) регуляризующего отображения $A \rightarrow A_{\varepsilon}$ относительно сжимающего вполне положительного отображения $R_{\lambda}^{(n)}(\cdot)$ мы получаем

$$R_{\lambda}^{(n)}(\Lambda_{\varepsilon}) \leq (R_{\lambda}^{(n)}(\Lambda_{\varepsilon-\mu}))_{\mu} \quad \forall \mu \in (0, \varepsilon),$$

а из предположения индукции $R_{\lambda}^{(n-1)}(\Lambda_{\varepsilon}) \leq (\lambda - c)^{-1} \Lambda_{\varepsilon-\mu}$ следует, что

$$R_{\lambda}^{(n)}(\Lambda_{\varepsilon}) \leq \left\{ A_{\lambda}(\Lambda_{\varepsilon-\mu}) + \frac{1}{\lambda - c} \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} W_t^* \Phi(\Lambda_{\varepsilon-\mu}) W_t \right\}_{\mu}.$$

Оценка (2.4) обеспечивает неравенство для квадратичных форм на $\mathcal{D}$:

$$\Phi(\Lambda_{\varepsilon-\mu})_* \leq \sup_{\varepsilon > 0} \Phi(\Lambda_{\varepsilon})_* \leq (c\Lambda + G^* \Lambda + \Lambda G)_*.$$

Поэтому для любого $\varphi \in \mathcal{D}$ выполнено

$$\begin{aligned} R_{\lambda}^{(n)}(\Lambda_{\varepsilon})_*[\varphi] &\leq \left(\left\{ A_{\lambda}(\Lambda_{\varepsilon-\mu}) + \frac{1}{\lambda - c} \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} W_t^* \Phi(\Lambda_{\varepsilon-\mu}) W_t \right\}_{\mu} \right)_*[\varphi] \\ &\leq \left(\left\{ A_{\lambda}(\Lambda_{\varepsilon-\mu}) + \frac{c}{\lambda - c} A_{\lambda}(\Lambda) - \frac{1}{\lambda - c} \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} (W_t^* \Lambda_* W_t) \right\}_{\mu} \right)_*[\varphi] \\ &\leq \left(\left\{ A_{\lambda}(\Lambda) \left(1 + \frac{c}{\lambda - c} \right) + \frac{1}{\lambda - c} \Lambda - \frac{\lambda}{\lambda - c} A_{\lambda}(\Lambda) \right\}_{\mu} \right)_*[\varphi] \\ &= (\lambda - c)^{-1} (\Lambda_{\mu})_*[\varphi]. \end{aligned}$$

Таким образом, $R_\lambda^{(n)}(\Lambda_\varepsilon)*[\varphi] \leq (\lambda - c)^{-1}(\Lambda_\mu)*[\varphi]$ для всех $\mu \in (0, \varepsilon)$, $n = 1, 2, \dots$ и всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Поскольку $\Lambda_\varepsilon, \Lambda_\mu$ – ограниченные операторы, то отсюда мы заключаем, что $R_\lambda^{\min}(\Lambda_\varepsilon) \leq (\lambda - c)^{-1}\Lambda_\mu$ для любых $1 \geq \varepsilon > \mu > 0$. В частности, при $\lambda = (t/n)^{-1}$ имеем $\lambda R_\lambda^{\min}(\Lambda_\varepsilon) \leq (1 - ct/n)^{-1}\Lambda_\mu$. Для завершения доказательства воспользуемся стандартным представлением сжимающей полугруппы через ее резольвенту (см. [9]):

$$P_t^{\min}(\Lambda_\varepsilon) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda R_\lambda^{\min} \dots (\lambda R_\lambda^{\min}(\Lambda_\mu)) \right) \leq \Lambda_\mu \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{ct}{n} \right)^{-n} = e^{ct} \Lambda_\mu.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает оценка резольвенты минимальной динамической полугруппы и самой полугруппы, если отображение $\Phi(\cdot)$ обладает свойством обобщенной нормальности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Вполне положительное отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет *обобщенному условию нормальности* относительно оператора Λ , если

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1]} \Phi(T_\varepsilon)*[\varphi] = \Phi(T)*[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad T_\varepsilon = T(I + \varepsilon T)^{-1} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \quad (2.6)$$

для любого положительного самосопряженного оператора T такого, что $T \leq c_T \Lambda$ с некоторой постоянной $c_T \in \mathbb{R}_+$.

Как мы увидим ниже, предположение (2.6) означает, что преддвойственное отображение $\Phi^\dagger(\cdot)$ сопоставляет оператору $\rho_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ ранга 1 оператор $\Phi^\dagger(\rho_\varphi)$ с конечным следом такой, что для любого положительного оператора $T \leq c_T \Lambda$ плотно определенных оператор $\Phi^\dagger(\rho_\varphi)T$ допускает ограниченное продолжение на $\mathcal{H}$ и имеет конечный след

$$\text{Tr}\{\Phi^\dagger(\rho_\varphi)T\} = \sup_{\varepsilon \in (0,1]} \text{Tr}\{\Phi^\dagger(\rho_\varphi)T_\varepsilon\} = \Phi(T)*[\varphi].$$

В этих обозначениях условие обобщенной нормальности означает, что $\Phi^\dagger(\cdot): L_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{I}_\Lambda$, где $L_{\mathcal{D}}$ – линейная оболочка, порождаемая проекторами ρ_φ , $\varphi \in \mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть T – положительный замкнутый оператор такой, что $T \leq c_T \Lambda$. Тогда при условиях (2.1), (2.4), (2.6) существует наименьшая вертняя грань

$$P_t^{\min}(T) = \text{l.u.b.}_\varepsilon P_t^{\min}(T_\varepsilon) = P_t^{\min}(\text{l.u.b.}_\varepsilon T_\varepsilon) \leq c_T e^{ct} \Lambda, \quad \varepsilon \in (0, 1].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $P_t^{(n)}(T_\varepsilon)$, сильно сходящуюся при $n \rightarrow \infty$ к $P_t^{\min}(T_\varepsilon)$. Из теоремы 2.1 имеем

$$P_t^{(n)}(T_\varepsilon) \leq P_t^{\min}(T_\varepsilon) \leq c_T P_t^{\min}(\Lambda_\varepsilon) \leq c_T e^{ct} \Lambda_\mu$$

для любого $\mu \leq \varepsilon$. Покажем по индукции, что

$$\text{l.u.b.}_\varepsilon P_t^{(n)}(T_\varepsilon) = P_t^{(n)}(\text{l.u.b.}_\varepsilon T_\varepsilon),$$

где $T_\varepsilon = T(I + T_\varepsilon)^{-1} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$. Рассмотрим три объекта:

- (1) вполне положительное отображение $P_t^{(1)}(T_\varepsilon) = W_t^* T_\varepsilon W_t$;
- (2) последовательность векторов из $\mathcal{H}$

$$\varphi_\varepsilon = (I + \varepsilon T)^{-1} W_t \varphi \in \text{dom } \Lambda \subseteq \text{dom } T \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

сильно сходящуюся к $W_t \varphi$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;

- (3) возрастающую последовательность квадратичных форм

$$(T_\varepsilon)_* [W_t \varphi] = (T)_* [W_t \varphi_\varepsilon] \leq (T)_* [W_t \varphi_\mu] \leq c_T \Lambda_* [W_t \varphi], \quad 0 < \mu < \varepsilon.$$

Поскольку T – замкнутый оператор, то

$$\sup_\varepsilon (T_\varepsilon)_* [\varphi_t] = \sup_\varepsilon P_t^{(1)}(T_\varepsilon)_* [\varphi] = T_* [\varphi_t] = P_t^{(1)}(T)_* [\varphi], \quad \varepsilon \in (0, 1].$$

То есть $\text{l.u.b.}_\varepsilon P_t^{(1)}(T_\varepsilon) = P_t^{(1)}(T)$ на $\mathcal{D}$. Предположим, что равенство

$$\sup_\varepsilon (P_t^{(k)}(T_\varepsilon))_* = (P_t^{(k)}(T))_*$$

для соответствующих квадратичных форм на $\mathcal{D}$ верно при $k = 2, 3, \dots, n-1$, и докажем его при $k = n$.

Рассмотрим рекуррентные уравнения для $P_t^{(n)}$:

$$P_t^{(n)}(T_\varepsilon)_* [\varphi] = P_t^{(1)}(T_\varepsilon)_* [\varphi] + \int_0^t ds \Phi_*(P_s^{(n-1)}(T_\varepsilon)) [W_{t-s} \varphi], \quad (2.7)$$

где $P_s^{(n)}(T_\varepsilon) \leq c_T P_s^{(n)}(\Lambda_\varepsilon) \leq c_T e^{ct} \Lambda_\mu$ для любого $\mu \in (0, \varepsilon)$. Тогда из условия обобщенной нормальности (2.6) и предположения индукции вытекает абсолютная интегрируемость верхней границы относительно $s \in [0, t]$:

$$\sup_\varepsilon \Phi_*(P_s^{(n)}(T_\varepsilon)) [W_{t-s} \varphi] = \Phi_*(P_s^{(n)}(\sup_\varepsilon T_\varepsilon)) [W_{t-s} \varphi] \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+).$$

Следовательно, теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла может быть применена к рекуррентной последовательности (2.7). Отсюда вытекает перестановочность $\text{l.u.b.}_\varepsilon$ и отображения $P_t^{(n)}: \text{l.u.b.}_\varepsilon P_t^{(n)}(T_\varepsilon) = P_t^{(n)}(\text{l.u.b.}_\varepsilon T_\varepsilon)$, и поэтому

$$P_t^{\min}(T) = \text{l.u.b.}_n \text{l.u.b.}_\varepsilon P_t^{(n)}(T_\varepsilon) \geq \text{l.u.b.}_\varepsilon \text{l.u.b.}_n P_t^{(n)}(T_\varepsilon) = \tilde{P}_t(T). \quad (2.8)$$

С другой стороны, из интегрального уравнения для $\tilde{P}_t(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}_t(T)_* [\varphi] &= \sup_\varepsilon P_t(T_\varepsilon)_* [\varphi] = \sup_\varepsilon \left\{ P_t^{(1)}(T_\varepsilon)_* [\varphi] + \int_0^t ds \Phi_*(\tilde{P}_s(T_\varepsilon)) [W_{t-s} \varphi] \right\} \\ &\leq P_t^{(1)}(T)_* [\varphi] + \int_0^t ds \Phi_*(\tilde{P}_s(T)) [W_{t-s} \varphi]. \end{aligned}$$

Отсюда мы заключаем, что $\tilde{P}_t(T) \leq P_t^{\min}(T)$. Вместе с (2.8) это дает утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если выполнены условия (2.1), (2.6), то неравенство (2.4) является достаточным для консервативности минимальной динамической подгруппы.

Это утверждение вытекает из равномерной ограниченности убывающей последовательности ограниченных операторов $Q_\lambda^{(n)}(I)$ и слабой сходимости ряда

$$\sum_1^\infty Q_\lambda^k(I) \leq R_\lambda^{\min}(\Lambda) \leq (\lambda - c)^{-1}\Lambda$$

на плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 2.3. Если выполнены условия (2.1), (2.4), (2.6), то для любого замыкаемого положительного оператора $T \leq c_T \Lambda$ функция $P_t^{\min}(T)_*[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{D}$, непрерывна по параметру $t \in \mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся интегральным уравнением для квадратичной формы $P_t^{\min}(T)_*[\varphi]$ (см. [4]–[6]):

$$P_t^{\min}(T)_*[\varphi] = T_*[\varphi_t] + \int_0^t \Phi_*(P_s^{\min}(T))[\varphi_{t-s}] ds. \quad (2.9)$$

Поскольку $T \leq c_T \Lambda$, то $\text{dom } T^{1/2} \supseteq \text{dom } \Lambda^{1/2}$. Следовательно, функция

$$v_t = \Lambda^{-1/2} T^{1/2} W_t \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

принадлежит $\text{dom } \Lambda_*$ и сходится к φ при $t \rightarrow 0$. Теперь из замыкаемости квадратичной формы $T_*[\varphi_t] = \|T^{1/2} W_t \varphi\|^2 = \|\Lambda^{1/2} v_t\|^2$ следует непрерывность первого слагаемого в (2.9).

Нетрудно видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ функция параметра $s \in (0, t)$

$$\Phi_s^{(\varepsilon)} = \Phi_*(P_s^{\min}(T_\varepsilon))[\varphi_{t-s}]$$

непрерывна для любого $\varphi \in \mathcal{D}$. Поэтому ее верхняя грань

$$\Phi_s = \sup_{\varepsilon > 0} \Phi_*(P_s^{\min}(T_\varepsilon))[\varphi_{t-s}] \geq 0$$

является измеримой функцией. Покажем, что $\Phi_s \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Из условия (2.4) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \Phi_s &= \Phi_*(P_s^{\min}(T))[\varphi_{t-s}] = \mathcal{L}_*(\Lambda)[\varphi_{t-s}] + 2 \text{Re } \Lambda_*[\varphi_{t-s}, G\varphi_{t-s}] \\ &\leq c\Lambda_*[\varphi_{t-s}] + 2 \text{Re } \Lambda_*[\varphi_{t-s}, G\varphi_{t-s}] < \infty, \end{aligned}$$

так как $G\varphi_{t-s} = W_{t-s}G\varphi \in \text{dom } \Lambda_*$ и оба слагаемых непрерывны по t . Следовательно, они локально ограничены, и это дает абсолютную непрерывность второго слагаемого в (2.9). Теорема доказана.

3. Априорные оценки для преддвойственной полугруппы. В этом разделе используется двойственность между алгебрами $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, устанавливаемая отдельной билинейной формой $\text{Tr } \rho B$, $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Обозначим через $T_t(\cdot): \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ динамическую полугруппу в шрёдингеровском представлении преддвойственной полугруппе $P_t(\cdot): \text{Tr}\{T_t(\rho)B\} = \text{Tr}\{\rho P_t(B)\}$. Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство и $\Lambda \geq \Phi(I) \geq I$. В теории динамических полугрупп эти предположения не являются ограничительными (см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть Λ – положительный самосопряженный оператор. Обозначим через $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{H})$ множество операторов из линейной оболочки конуса $\mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H})$ положительных операторов ρ таких, что

- (1) плотно определенный оператор $\rho\Lambda$ может быть продолжен до ограниченного оператора на $\mathcal{H}$;
- (2) для любой полной ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ ряд

$$\sum |(\psi_k, \rho\Lambda\psi_k)|$$

абсолютно сходится.

В этом случае *следом оператора $\rho\Lambda$* называется

$$\text{Tr}(\rho\Lambda) = \sum_k (\psi_k, \rho\Lambda\psi_k).$$

Нетрудно видеть, что с одной стороны

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\psi, \rho\Lambda_\varepsilon\psi) = (\psi, \rho\Lambda\psi)$$

для любого $\psi \in \text{dom } \Lambda$, причем обе части этого равенства однозначно продолжают-ся на все пространство $\mathcal{H}$. С другой стороны, $(\psi, \rho\Lambda_\varepsilon\psi) = \|\rho^{1/2}\Lambda_\varepsilon^{1/2}\psi\|^2 \geq 0$, где $\Lambda_\varepsilon = \Lambda(I + \varepsilon\Lambda)^{-1}$. Поэтому имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H})$, то

- (1) для любой полной ортонормированной системы $\{\psi_k\}$

$$\text{Tr } \rho\Lambda = \sup_n \sum_{k=1}^n (\psi_k, \rho\Lambda\psi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\varepsilon > 0} (\psi_k, \rho\Lambda_\varepsilon\psi_k) = \sup_{\varepsilon > 0} \text{Tr}(\rho\Lambda_\varepsilon) \geq 0;$$

- (2) если выполнены условия теоремы 2.2, то преддвойственная полугруппа T_t действует в $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$:

$$0 \leq \text{Tr}\{T_t(\rho)\Lambda\} \leq e^{ct} \text{Tr } \rho\Lambda;$$

- (3) если A – положительный самосопряженный оператор такой, что $0 \leq A_*[\varphi] \leq \Lambda_*[\varphi]$, то $\text{Tr}(\rho A) \leq \text{Tr}(\rho\Lambda)$ для любого $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Первая часть леммы вытекает из свойств следа и возможности почленного предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow +0$ в сумме $\sum (\psi_k, \rho \Lambda_\varepsilon \psi_k)$, поскольку ряд равномерно ограничен и абсолютно сходится. Более точно, для каждого n остаток

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (\psi_k, \rho \Lambda_\varepsilon \psi_k) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |(\psi_k, \rho \Lambda \psi_k)|$$

имеет равномерную по ε оценку и сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а $\varepsilon(n)$ можно выбрать так, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon(n))$

$$\sum_{k=1}^n |(\psi_k, \rho(\Lambda - \Lambda_\varepsilon) \psi_k)| \leq n^{-1}.$$

Заметим, что если A, B – положительные самосопряженные операторы, $A \leq B$, и оператор B обратим на образе A , то существование ограниченного продолжения $\rho A = \rho B B^{-1} A$ следует из ограниченности оператора $B^{-1} A$ и существования ограниченного продолжения оператора ρB . Поэтому утверждение (2) вытекает из теоремы 2.2 и определения полугруппы $T_t(\cdot)$:

$$\mathrm{Tr}\{T_t(\rho)\Lambda\} = \mathrm{Tr}\{\rho P_t(\Lambda)\} \leq e^{ct} \mathrm{Tr}(\rho\Lambda) \quad \forall \rho \in \mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H}).$$

(3) Последняя часть теоремы доказывается от противного. Предположим, что $\mathrm{Tr}(\rho A) \geq \mathrm{Tr}(\rho \Lambda) + \delta$. Тогда из доказанной выше первой части теоремы следует, что существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ такое, что $\mathrm{Tr}(\rho A_\varepsilon) \geq \mathrm{Tr}(\rho \Lambda_\varepsilon) + \delta/2$, т.е.

$$\sum_k (\psi_{\rho,k}, A_\varepsilon \psi_{\rho,k}) \geq \sum_k (\psi_{\rho,k}, \Lambda_\varepsilon \psi_{\rho,k}) + \frac{\delta}{2}, \quad (3.1)$$

где $\psi_{\rho,k} = \rho^{1/2} \psi_k \in \mathrm{dom} \Lambda^{1/2} \subseteq \mathrm{dom} A^{1/2}$, а $\{\psi_k\}$ – полная ортонормированная система.

Теперь неравенство (3.1) противоречит наложенному выше условию (3):

$$\sup_\varepsilon (\psi_{\rho,k}, A_\varepsilon \psi_{\rho,k}) = A_*[\psi_{\rho,k}] \leq \Lambda_*[\psi_{\rho,k}] = \sup_\varepsilon (\psi_{\rho,k}, \Lambda_\varepsilon \psi_{\rho,k}).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. При условиях теоремы 2.3 функция $R_t = \mathrm{Tr}\{\rho P_t^{\min}(T)\}$ непрерывна по параметру $t \in \mathbb{R}_+$ для любого $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$.

Действительно, множество чистых состояний ρ_φ , $\varphi \in \mathrm{dom} \Lambda^{1/2}$, является множеством крайних точек алгебры $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}) = \mathcal{T}(\mathcal{H}_\Lambda)$ (см. [9, теорема 2.3.15]). Поэтому непрерывность R_t вытекает из непрерывности $P_t^{\min}(T)_*[\varphi] = \mathrm{Tr}\{\rho_\varphi P_t^{\min}(T)\}$, доказанной выше в теореме 2.3 для чистых состояний $\rho_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$.

В работе [4] был введен конус вполне положительных нормальных отображений $\mathrm{CPn}(\mathcal{H}_\Lambda)$, определяемый как пополнение множества вполне положительных отображений $\mathrm{CPn}(\mathcal{H})$, относительно локально выпуклой топологии, задаваемой системой полунорм

$$\sigma_{A,B}(\Phi) = \sup_{X \in B, \psi \in A} |\Phi_*(B)[\psi]|,$$

где A и B – абсолютно выпуклые компактные подмножества из $\mathcal{H}_\Lambda$ и $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ соответственно. Теперь мы можем дать еще одно эквивалентное описание конуса $\mathrm{CPn}(\mathcal{H}_\Lambda)$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Конус $\mathcal{CPn}(\mathcal{H}_\Lambda)$ состоит из вполне положительных отображений $\Phi(\cdot)$, двойственных отображениям $\Phi^\dagger(\cdot): \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$:*

$$\Phi_*(B)[\psi] = \text{Tr}\{\Phi^\dagger(\rho_\psi)\}, \quad \rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Phi_*(\cdot)[\psi]: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ – нормальное состояние, задаваемое квадратичной формой $\Phi_*(B)[\psi] = \text{Tr}(B\Phi^\dagger(\rho_\psi))$, то из (3.2) и [9, теорема 2.4.21] следует, что $\Phi^\dagger(\rho_\psi) \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ для любого $\psi \in \mathcal{D}$. Теперь из части (3) теоремы 3.1 следует, что $\Phi^\dagger(\rho) \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ для любого $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$, поскольку утверждения теоремы 3.1 сохраняют силу на пополнении линейной оболочки множества чистых состояний в $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}) = \mathcal{T}(\mathcal{H}_\Lambda)$.

Обратно, пусть $\Phi^\dagger(\cdot): \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ и пусть $\Phi_*^{(\varepsilon)}(B)[\psi] = \text{Tr}\{B\sigma_\varepsilon\}$, где $\sigma_\varepsilon = \Phi^\dagger(\rho_\psi^{(\varepsilon)})$, $\rho_\psi^{(\varepsilon)} = |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|$, $\psi_\varepsilon = (I + \varepsilon\Lambda)^{-1}\psi$. Нетрудно видеть, что каждая квадратичная форма $\Phi_*^{(\varepsilon)}(B)[\psi]$ является нормальной и допускает ограниченное продолжение на $\mathcal{H}$, так как может быть записана в виде конечного следа ограниченного оператора: $\Phi_*^{(\varepsilon)}(B)[\psi] = \text{Tr}(B\sigma_\varepsilon)$, где σ_ε – положительный оператор с конечным следом

$$\text{Tr}\sigma_\varepsilon = \Phi_*^{(\varepsilon)}(I)[\psi] \leq \Lambda[\psi_\varepsilon] \leq \varepsilon^{-2}\|\psi\|^2.$$

Нетрудно видеть, что $\Phi_*^{(\varepsilon)}(B)[\psi] \rightarrow \Phi_*(B)[\psi]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого $\psi \in \mathcal{H}_\Lambda$ и эта сходимость равномерна на компактных множествах в $\mathcal{H}_\Lambda$ и $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

4. Пополнение множества регулярных инфинитезимальных отображений с кусочно постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение марковской эволюции

$$\frac{d}{dt}P_{s,t}(B) = \mathcal{L}_t(P_{s,t}(B)), \quad P|_{t=s}(B) = B, \quad 0 \leq s \leq t, \quad (4.1)$$

с инфинитезимальным отображением $\mathcal{L}_t(\cdot)$, являющимся *простой* функцией времени, т.е. принимающей постоянные значения на интервалах, число которых конечно на любом конечном подмножестве $\mathbb{R}_+$:

$$\mathcal{L}_t(\cdot) = \mathcal{L}_i(\cdot), \quad \Phi_t(\cdot) = \Phi_i(\cdot), \quad H_t = H_i \quad \forall t \in (t_{i-1}, t_i], \quad t_0 = 0, \quad i > 0.$$

Решение $P_{t,s}(\cdot)$ уравнения (4.1), построенное как композиция решений уравнений с постоянными коэффициентами, обладает характеристическим свойством (левого) коцикла: $P_{t,\tau}P_{\tau,s} = P_{t,s}$, $s < \tau < t$, и называется *марковским коциклом*:

$$P_{t,s}(\cdot) = P_{t-t_n}^{(n)}(\cdots P_{t_{k(s)}-s}^{(k(s))}(\cdot)),$$

где $P_t^{(k)}(\cdot) = e^{t\mathcal{L}_k}(\cdot)$ – минимальная динамическая полугруппа с генератором $\mathcal{L}_k(\cdot)$, постоянным на полуинтервале $(t_{k-1}, t_k]$, $k(s) = \{\min k : t_k > s\}$, $t_n = \{\max t_j : t_j < t\}$.

Ясно, что если существует последовательность вполне положительных консервативных марковских коциклов, сходящаяся ультраслабо или слабо при каждом $t \in \mathbb{R}_+$, то предел является вполне положительным консервативным марковским коциклом. Рассмотрим сначала априорные оценки для решений неоднородных уравнений Линдблада с простыми коэффициентами.

Пусть D_t – семейство замкнутых операторов таких, что

$$(D_t)_*[\varphi] \leq c_D(t)\Lambda_*[\varphi], \quad \mathcal{L}_t(\Lambda)_*[\varphi] \leq c_\Lambda(t)\Lambda_*[\varphi], \quad (4.2)$$

$c_D(t), c_\Lambda(t) \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, и форма $(D_t)_*[\varphi]$ кусочно непрерывна как функция параметра t для любых $\varphi \in \text{dom } \Lambda_*$.

ЛЕММА 4.1. Если предположения (2.1), (2.4), (4.2) выполнены на каждом интервале $(t_{k-1}, t_k]$, то минимальное решение неоднородного уравнения Линдблада

$$\frac{d}{dt} P_t = \mathcal{L}_t(P_t) + D_t, \quad P|_{t=0} = 0,$$

допускает оценку

$$(P_t^{\min})_*[\varphi] \leq \Lambda_*[\varphi] \int_0^t ds \exp \left\{ \int_s^t c_\Lambda(r) dr \right\} c_D(s) \quad \forall \varphi \in \text{dom } \Lambda_*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае формула Дюамеля имеет вид

$$\begin{aligned} (P_t^{\min})_*[\varphi] &= \int_0^t ds P_{t-t_n}^{(n)}(\dots P_{t_{k(s)}-s}^{(k(s))}(D_s))_*[\varphi] = \int_0^t ds \text{Tr} \{ T_{t_{k(s)}-s}^{(k(s))} \dots T_{t-t_n}^{(n)}(\rho_\varphi) D_s \} \\ &\leq \int_0^t ds \text{Tr} \{ T_{t_{k(s)}-s}^{(k(s))} \dots T_{t-t_n}^{(n)}(\rho_\varphi) \Lambda \} c_D(s), \end{aligned}$$

где $T_t^{(k)}(\cdot)$ – полугруппа, преддвойственная $P_t^{(k)}(\cdot)$, действующая в $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, $\rho_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi| \in T_\Lambda(\mathcal{H})$. Поэтому из теоремы 3.1 следует оценка

$$\begin{aligned} (P_t^{\min})_*[\varphi] &\leq \text{Tr}(\rho_\varphi \Lambda) \int_0^t ds e^{(t-t_n)c_\Lambda(t_n)+\dots+(t_{k(s)}-s)c_\Lambda(t_{k-1})} c_D(s) \\ &= \Lambda_*[\varphi] \int_0^t ds \exp \left\{ \int_s^t c_\Lambda(r) dr \right\} c_D(s) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $\mathcal{L}_t(\cdot)$ – функция параметра t , непрерывная в том смысле, что для любого $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H})$ функция

$$\delta_{s,t}(B, \rho) = |\text{Tr} \{ \rho(\mathcal{L}_t(B) - \mathcal{L}_s(B)) \}| = |\text{Tr} \{ B(\mathcal{L}_t^\dagger(\rho) - \mathcal{L}_s^\dagger(\rho)) \}| \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

почти всюду при $|t - s| \rightarrow 0$ и

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow t} \sup_{\|B\| \leq 1} |\delta_{s,t}(B, \rho)| \leq K_t \text{Tr}(\rho \Lambda), \quad (4.4)$$

где $K_t \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим последовательность разбиений $\{t_i(N)\}$ полупрямой $\mathbb{R}_+$ такую, что $0 \leq t_{k(s)}(N) - s \leq 2^{-N}$ для любого $s \in \mathbb{R}_+$. Сопоставим инфинитезимальному оператору $\mathcal{L}_t(\cdot)$ последовательность простых инфинитезимальных операторов $\mathcal{L}_\tau^{(N)}(\cdot) = \mathcal{L}_{t_{k(\tau)}}^{(N)}(\cdot)$. Пусть $P_{t,s}^{(N)}$ – композиция минимальных решений уравнений с кусочно постоянными генераторами $\mathcal{L}_t^{(N)}(\cdot)$. Рассмотрим разность $\delta_t^{(M,N)} = P_{t,0}^{(N)}(B) - P_{t,0}^{(M)}(B)$, которая равномерно ограничена и удовлетворяет неоднородному уравнению с тривиальным начальным условием

$$\frac{d}{dt} \delta_t^{(M,N)} = \mathcal{L}_t^{(N)}(\delta_t^{(M,N)}) + D_t^{(M,N)}, \quad \delta_t^{(M,N)}|_{t=0} = 0,$$

где $D_t^{(M,N)} = \mathcal{L}_t^{(N)}(P_{t,0}^{(M)}(B)) - \mathcal{L}_t^{(M)}(P_{t,0}^{(N)}(B))$, т.е. $-2K_t \operatorname{Tr}(\rho\Lambda) \leq \operatorname{Tr}\{\rho D_t^{(M,N)}\} \leq 2K_t \operatorname{Tr}(\rho\Lambda)$. Поскольку разность $\delta_t^{(M,N)}$ ограничена по норме, достаточно доказать ультраслабую сходимость $\delta_t^{(M,N)} \rightarrow 0$ при $M, N \rightarrow \infty$ на произвольном плотном подмножестве в $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$. В качестве такого подмножества мы используем линейную оболочку множества чистых состояний $\rho_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, $\varphi \in \operatorname{dom} \Lambda_*$.

Лемма 4.1 гарантирует равномерную по M, N оценку для $\operatorname{Tr}\{\rho_\varphi \delta_t^{(M,N)}\}$:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Tr}\{\rho_\varphi \delta_t^{(M,N)}\}| &= \left| \int_0^t ds \operatorname{Tr}\{T_{t_{k(s)}-s}^{(k(s))} \cdots T_{t-t_n}^{(n)}(\rho_\varphi) D_s^{(M,N)}\} \right| \\ &\leq \operatorname{Tr}\{\rho\Lambda\} \int_0^t ds \exp\left\{ \int_s^t c_\Lambda(\tau) d\tau \right\} K_s. \end{aligned}$$

В силу существования равномерно ограниченной мажоранты из $\mathcal{L}_1^{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}_+)$ для подынтегрального выражения, можно использовать теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и предположение (4.3):

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} |\operatorname{Tr}\{\rho \delta_t^{(M,N)}\}| \leq \int_0^t ds \exp\left\{ \int_s^t c_\Lambda(\tau) d\tau \right\} \delta_{s, t_{k(s)}}(B, \rho) \rightarrow 0$$

при $M, N \rightarrow \infty$, поскольку $s - t_{k(s)} \rightarrow 0$.

Окончательно получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположения (2.1), (2.4), (4.3), (4.4) достаточны для того, чтобы последовательность $\{P_{t,s}^{(N)}(B)\}$ была ультраслабо фундаментальной $\mathcal{H}$ и сходилась к консервативному вполне положительному коциклу $P_{t,s}(B)$.*

Рассмотрим класс $\mathcal{S}_\Lambda$ простых инфинитезимальных отображений $\mathcal{L}_t(\cdot)$, удовлетворяющих предположениям теоремы 4.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Последовательность $\{\mathcal{L}_t^{(N)}(\cdot)\}$ из $\mathcal{S}_\Lambda$ называется $\operatorname{Tr}_\Lambda$ -фундаментальной, если она сходится в локально выпуклой топологии, порождаемой системой полуноrm

$$\sigma_{\rho,T}(\mathcal{L}_t^{(N)}) = \int_0^T dt \sup_{\|B\| \leq 1} |\operatorname{Tr}\{\rho \mathcal{L}_t^{(N)}(B)\}| \exp\left\{ \int_s^t c_\Lambda(\tau) d\tau \right\}, \quad (4.5)$$

где $T > 0$, $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H})$. Инфинитезимальное отображение с переменными коэффициентами $\mathcal{L}_t(\cdot)$ называется S_Λ -измеримым, если последовательность

$$\mathcal{L}_t^{(N)}(\cdot) = \mathcal{L}_{t_k}(\cdot), \quad t \in (t_k, t_{k+1}], \quad t_k - t_{k-1} = 2^{-N},$$

сходится к $\mathcal{L}_t(\cdot)$ относительно полуноrm (4.5).

Теорема 4.1 показывает, что S_Λ -измеримые инфинитезимальные отображения образуют естественный класс генераторов консервативных марковских коциклов.

5. ПРИМЕР. Пусть $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ и коэффициенты отображения $\mathcal{L}_t(\cdot)$ равны

$$H_t = \Omega(x, t)x^2, \quad \Phi_t(B) = -\partial_x a(x, t)Ba(x, t)\partial_x,$$

где a и Ω – гладкие ограниченные функции такие, что

$$\sup_x a(x, t) < \infty, \quad \sup_x |\Omega(x, t)| < \infty, \quad \inf_x a(x, t) > 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Обозначим $A(x, t) = a^2(x, t)$. Оператор $L_t = \Phi_t(I)$, $L_t = \frac{1}{2}A(x, t)\partial_x^2 + aa'_x\partial_x$, является производящим оператором диффузионного процесса ξ_τ (см. [11]), удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi_\tau = a(\xi_\tau, \tau)dw_\tau + a(\xi_\tau, \tau)a'_x(\xi_\tau, \tau)d\tau, \quad \xi_t = x,$$

где w_τ – стандартный винеровский процесс, а двухпараметрическое семейство сжимающих операторов $W_{s,t}$ с генератором $-G_t$, $G_t = \frac{1}{2}\Phi_t(I) + iH_t$, может быть представлено в виде условного математического ожидания

$$W_{s,t}\psi(x) = \mathbb{M}_{x,t}\psi(\xi_s) \exp\left\{-i \int_s^t d\tau \Omega(\xi_\tau, \tau)\xi_\tau^2\right\}.$$

Проверим достаточные условия консервативности (2.4) и критерий непрерывности (4.3), (4.4) относительно оператора

$$\Lambda = \lambda(-\partial_x^2 + x^2 + I), \quad \lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)} \{|\Omega(x, t)| + A(x, t)\}.$$

Прежде всего, имеем тождество для коммутатора: $i[H_t, \Lambda] = i[\Omega x^2, \partial_x^2] = -i\{b\partial_x + \partial_x b\}$, где $b = \partial_x(\Omega(x, t)x^2)$. Из известного неравенства

$$\pm(A^*B + B^*A) \leq A^*\varepsilon A + B^*\varepsilon^{-1}B, \quad (5.1)$$

справедливого для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, в частном случае $A = i\partial_x$, $B = b = \partial_x(\Omega x^2)$, $\varepsilon = 1$ имеем

$$i[H_t, \Lambda] \leq (b^2 - \partial_x^2) \leq \lambda\Lambda, \quad \text{если} \quad \sup_{t \in (0, T)} (1 + |x|)^{-1} |\partial_x \Omega x^2| \leq \lambda.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \Phi_t(x^2) - \Phi_t(I) \circ x^2 &= 2a(x, t)a'_x(x, t)x + a^2(x, t), \\ \Phi_t(\partial_x^2) - \Phi_t(I) \circ \partial_x^2 &= -(a'_x(x, t))^2. \end{aligned}$$

Поэтому условие (2.4) выполнено, если

$$\sup_{x,t} (1 + |x|)|\Omega'_x(x, t)| < \infty, \quad \sup_{x,t} (1 + |x|)^{-1}|a'_x(x, t)| < \infty. \quad (5.2)$$

Проверим условие непрерывности. Пусть $\rho_\varphi \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_\Lambda)$. Учитывая, что $|\text{Tr } A_n \rho| \rightarrow 0$, если $\sup_n \|A_n\| < \infty$, и $A_n \rightarrow 0$ в сильном смысле, имеем

$$\text{Tr}\{B[H_t - H_s, \rho]\} = \text{Tr}\{(\Omega(x, t) - \Omega(x, s))x^2\rho\} \rightarrow 0,$$

если почти всюду в $\mathbb{R}$

$$|\Omega(x, t) - \Omega(x, s)| \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

сходится к нулю при $t-s \rightarrow 0$. Далее, из неравенства (5.1) вытекает оценка для разности вполне положительных отображений

$$\Phi_t^\dagger(\rho) - \Phi_s^\dagger(\rho) \leq \frac{\varepsilon}{2} (\Phi_t^\dagger(\rho) + \Phi_s^\dagger(\rho)) + \varepsilon^{-1} (a(x, t) - a(x, s)) \partial_x \rho \partial_x (a(x, t) - a(x, s)).$$

Поэтому

$$|\mathrm{Tr}(B(\Phi_t^\dagger(\rho) - \Phi_s^\dagger(\rho)))| \leq \lambda \varepsilon \|B\| \mathrm{Tr}(\rho \Lambda) + \varepsilon^{-1} \mathrm{Tr}\{(a(\cdot, t) - a(\cdot, s))^2 \rho \Lambda\} \rightarrow 0,$$

если $|a(x, t) - a(x, s)| \rightarrow 0$ при $t-s \rightarrow 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Аналогично доказывается неравенство

$$\mathrm{Tr}\{B\rho(\Phi_s^\dagger(I) - \Phi_t^\dagger(I)) \circ \rho\} \leq \|B\| \mathrm{Tr}\{\rho \Lambda \varphi(s, t)\},$$

где $\varphi(s, t) = (\Phi_s^\dagger(I) - \Phi_t^\dagger(I))\Lambda^{-1}$.

Нетрудно видеть, что семейство операторов $\varphi(s, t)$ равномерно ограничено. Заметим, далее, что $a\partial_x^2 = \partial_x^2 a - (\partial_x a'_x + a'_x \partial_x)$ и поэтому

$$\|\varphi(s, t)\psi\| \leq \|(|a^2(\cdot, t) - a^2(\cdot, s)| + \varepsilon^{-1}|a'_x(\cdot, t) - a'_x(\cdot, s)|^2)\partial_x^2 \Lambda^{-1}\psi\| + \varepsilon\|\partial_x^2 \Lambda^{-1}\psi\|$$

для сколь угодно малого ε . Таким образом, $\|\varphi(s, t)\psi\| \rightarrow 0$, если при $t-s \rightarrow 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость

$$|a(\cdot, t) - a(\cdot, s)| \rightarrow 0, \quad (1 + |x|)^{-1}|a'_x(\cdot, t) - a'_x(\cdot, s)| \rightarrow 0. \quad (5.4)$$

Следовательно, предельный марковский коцикл $P_t(\cdot) = w^* - \lim P_t^{(N)}(\cdot)$ существует и консервативен, если для равномерно ограниченных коэффициентов $a(x, t)$, $\Omega(x, t)$ выполнены условия непрерывности (5.2), (5.3), (5.4).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

Depto. de Matemáticas, UAM-I, Av. Michoacán y la Purísima (México)

27.11.95

E-mail: alex@cheb.phys.msu.su

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Davies E. B. Quantum theory of open systems. London: Acad. Press, 1976.
- [2] Gorini V., Kossakovsky A., Sudarshan E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of n -level systems // J. Math. Phys. 1976. V. 17. №3. P. 821–825.
- [3] Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // Commun. Math. Phys. 1976. V. 48. №2. P. 119–130.
- [4] Чеботарев А. М. Необходимое и достаточное условие консервативности динамической полугруппы // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Новейшие достижения. Т. 36. М.: ВИНТИ, 1990. С. 149–184.
- [5] Chebotarev A. M., Fagnola F. Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroup // J. Funct. Anal. 1993. V. 118. №1. P. 131–153.
- [6] Чеботарев А. М. Достаточное условие консервативности минимальной динамической полугруппы // Матем. заметки. 1992. Т. 52. №4. С. 112–122.
- [7] Chebotarev A. M. Applications of quantum probability to classical stochastics. Preprint. V. 246: Centro V. Volterra, Univ. degli studi di Roma "Tor Vergata", 1996.
- [8] Chebotarev A. M., Fagnola F. Sufficient conditions for conservativity of minimal quantum dynamical semigroups // J. Funct. Anal. (to appear).
- [9] Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
- [10] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Наука, 1972.
- [11] McKean G. Stochastic integrals. Princeton: Univ. Press, 1981.