Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ха Зуи Банг, О сепарабельности пространств Соболева–
Орлича бесконечного порядка, *Матем. заметки*, 1997,
том 61, выпуск 1, 141–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:22:17

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА–ОРЛИЧА БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Ха Зуї Банг

Пространства Соболева бесконечного порядка, возникающие при изучении линейных и нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с коэффициентами степенного роста, были введены Ю. А. Дубинским в 1975 г. [1]. Теория пространств Соболева бесконечного порядка, как естественное, но качественно иное, продолжение теории пространств Соболева конечного порядка, была построена и изучена Ю. А. Дубинским, Г. С. Балашовой, Чан Дык Ваном, Л. И. Клениной, Ю. А. Коняевым, А. Я. Кобиловым, С. Р. Умаровым, А. Н. Агаджановым, Л. Н. Грошевым, автором и др., где рассматриваются следующие вопросы: нетривиальность, теория следов, связь с краевыми задачами, теоремы вложения, геометрические свойства и др. (см. [2]–[4] и их библиографии).

При изучении нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с коэффициентами произвольного роста возникает необходимость рассмотрения пространств Соболева–Орлича бесконечного порядка.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная ограниченная область, $m \geq 0$ и $\Phi(t) : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – произвольная функция Юнга, т.е. $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(t) \neq 0$ и $\Phi(t)$ выпукла (см. [5]–[7]).

Рассмотрим пространство Соболева–Орлича порядка m :

$$W^m L\{\Phi, G\} = \left\{ f \in \mathcal{D}'(G) : \|f\|_{m, G} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{(\Phi, G)} < \infty \right\},$$

где

$$\|g\|_{(\Phi, G)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_G \Phi \left(\frac{|g(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

есть норма Люксембурга. Как известно, $W^m L\{\Phi, G\}$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\Phi(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию вблизи бесконечности, т.е. существуют постоянные $K, M < \infty$ такие, что $\Phi(2t) \leq K\Phi(t)$, $t \geq M$.

Пусть $\Phi_\alpha(t)$, $\alpha \geq 0$, – произвольные функции Юнга. Тогда

$$W^\infty L\{\Phi_\alpha, G\} = \left\{ f \in \mathcal{D}'(G) : \|f\|_G = \sum_{|\alpha| \geq 0} \|D^\alpha f\|_{(\Phi_\alpha, G)} < \infty \right\}$$

называется *пространством Соболева–Орлича бесконечного порядка в G* . Ясно, что $W^\infty L\{\Phi_\alpha, G\}$ является банаховым пространством и $W^\infty L\{\Phi_\alpha, G\} \subset C^\infty(G)$.

Пространство Соболева–Орлича бесконечного порядка финитных в G функций определяется как

$$\mathring{W}^\infty L\{\Phi_\alpha, G\} = \{f \in \mathcal{D}' : D^\alpha f|_{\partial G} = 0, \alpha \geq 0, \|f\|_G < \infty\}.$$

Оказывается, что любое пространство Соболева–Орлича бесконечного порядка в ограниченной области с локально липшицевой границей $W^\infty L\{\Phi_\alpha, G\}$ сепарабельно, что показывает существенное различие между пространствами конечного и бесконечного порядков.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G ограничена и $\Phi_\alpha(t)$, $\alpha \geq 0$, – произвольные функции Юнга. Тогда $\mathring{W}^\infty L\{\Phi_\alpha, G\}$ сепарабельно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала компактность следующего вложения:

$$\mathring{W}^{N+n+1} L\{\Phi_\alpha, G\} \subset C^N(\overline{G}) \quad (1)$$

для всех $N \geq 0$. Для краткости мы опустим знак $\{\Phi_\alpha, G\}$ в обозначении рассматриваемых пространств.

Действительно, пусть $|\alpha| \leq N + n + 1$ и $\lambda > \|D^\alpha f\|_{(\Phi_\alpha, G)}$. Тогда из

$$\int_G \Phi_\alpha \left(\frac{|D^\alpha f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1$$

и неравенства Иенсена (см., например, [5], [6]) следует, что

$$\Phi_\alpha \left(\frac{1}{\text{mes } G} \int_G \frac{|D^\alpha f(x)|}{\lambda} dx \right) \leq \frac{1}{\text{mes } G} \int_G \Phi_\alpha \left(\frac{|D^\alpha f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq \frac{1}{\text{mes } G}. \quad (2)$$

Далее, пусть $r_\alpha = \sup\{t : \Phi_\alpha(t) \leq 1/\text{mes } G\}$. Тогда из (2) имеем

$$\frac{1}{\lambda \text{mes } G} \|D^\alpha f\|_{L_1(G)} \leq r_\alpha.$$

Следовательно, устремляя $\lambda \rightarrow \|D^\alpha f\|_{(\Phi_\alpha, G)}$, получим

$$\|D^\alpha f\|_{L_1(G)} \leq r_\alpha(\text{mes } G) \|D^\alpha f\|_{(\Phi_\alpha, G)}.$$

Отсюда имеем (1) в силу теоремы Реллиха–Кондрашова (см. [5, с. 144]).

Докажем далее, что $\mathring{W}^{N+n+1} L$ сепарабельно с нормой $\|\cdot\|_{N, G}$. Действительно, достаточно показать, что всякий шар в $(\mathring{W}^{N+n+1} L, \|\cdot\|_{N+n+1, G})$ сепарабелен в $(\mathring{W}^{N+n+1} L, \|\cdot\|_{N, G})$, что ясно, так как каждый шар в $(\mathring{W}^{N+n+1} L, \|\cdot\|_{N+n+1, G})$ компактно вложен в $(\mathring{W}^{N+n+1} L, \|\cdot\|_{C^N(\overline{G})})$ и сходимост по $\|\cdot\|_{C^N(\overline{G})}$ влечет сходимост по $\|\cdot\|_{N, G}$.

Покажем теперь сепарабельность $\mathring{W}^\infty L$. Положим для $N, m \geq 1$

$$\|\cdot\|_{N, G} = \|\cdot\|_G - \|\cdot\|_{N, G}, \quad E_{N, m} = \left\{ f \in \mathring{W}^\infty L : \|f\|_{N, G} < \frac{1}{m} \right\}.$$

Известно, что если X является сепарабельным метрическим пространством и $X_0 \subset X$, то пространство X_0 также сепарабельно. Следовательно, в силу только что полученного результата $(E_{N,m}, \|\cdot\|_{N,G})$ сепарабельны для всех $N, m \geq 1$.

Пусть $\{x_{N,m}^j\} \subset E_{N,m}$ — последовательность функций плотна в $(E_{N,m}, \|\cdot\|_{N,G})$. Тогда $\bigcup_{N,m=1}^{\infty} \{x_{N,m}^j\}$ плотно в $\overset{\circ}{W}^{\infty} L$. Действительно, пусть $f \in \overset{\circ}{W}^{\infty} L$ — произвольная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ из

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f\|_{N,G} = 0$$

имеем числа $N, m \geq 1$ такие, что

$$f \in E_{N,m}, \quad \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3)$$

С другой стороны, как показано выше, $(E_{N,m}, \|\cdot\|_{N,G})$ сепарабельно. Следовательно, существует элемент $x_{N,m}^j \in E_{N,m}$ такой, что

$$\|f - x_{N,m}^j\|_{N,G} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4)$$

Комбинируя (3), (4) и определение $E_{N,m}$, получим

$$\begin{aligned} \|f - x_{N,m}^j\|_G &= \|f - x_{N,m}^j\|_{N,G} + \|f - x_{N,m}^j\|_{N,G} \\ &\leq \|f - x_{N,m}^j\|_{N,G} + \|f\|_{N,G} + \|x_{N,m}^j\|_{N,G} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Рассуждая как выше, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Phi_{\alpha}(t)$, $\alpha \geq 0$, — произвольные функции Юнга, и ограниченная область G обладает локально липшицевой границей. Тогда $W^{\infty} L\{\Phi_{\alpha}, G\}$ сепарабельно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Частный случай $\Phi_{\alpha}(t) = t^{p_{\alpha}}$, $\alpha \geq 0$, теоремы 1 доказан А.Н. Агаджановым в [8] другим методом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы получили некоторые результаты о рефлексивности пространств Соболева–Орлича бесконечного порядка, однако, они еще незакончены.

Институт математики
г. Ханой, СРВ

Поступило
15.08.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубинский Ю. А. // Матем. сб. 1975. Т. 98 (140). № 2. С. 163–184.
2. Дубинский Ю. А. // УМН. 1991. Т. 43. № 6. С. 97–131.
3. Dubinskij Ju. A. Sobolev spaces of infinite order and differential equations. Dordrecht–Boston–Lankaster–Tokyo: Reidel, 1986.
4. Tran Duc Van, Dinh Nho Hao. Differential operators of infinite order with real arguments and their applications. Singapore: World Scientific, 1994.
5. Adams R. Sobolev spaces. N. Y.: Academic Press, 1975.
6. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
7. O'Neil R. // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 115. P. 300–328.
8. Агаджанов А. Н. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 3. С. 521–524.