Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, К. Уильямсон, Об обратной задаче на собственные значения Хегланда–Марти, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 144–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1489>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 18:31:08

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ХЕГЛАНДА–МАРТИ

Х. Д. Икрамов, К. Уильямсон

1. Введение. Аддитивная обратная задача на собственные значения (АОЗ) формулируется следующим образом. Пусть A – фиксированная $n \times n$ матрица над подполем $\mathbf{F}$ поля $\mathbb{C}$; не ограничивая общности, диагональные элементы матрицы можно считать нулевыми. Требуется найти диагональную матрицу $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathbf{F}^{n,n}$ так, чтобы спектром матрицы

$$C = A + D \quad (1)$$

был заданный набор чисел $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$.

Аддитивные обратные задачи всегда разрешимы над $\mathbb{C}$ и имеют конечное число решений. Этот факт установлен Фридландом [1].

Интересный специальный случай АОЗ рассмотрен Хегландом и Марти [2]. Матрица задачи Хегланда–Марти (ЗХМ) имеет вид

$$A = T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Эту задачу Хегланд и Марти рассматривают над вещественным полем (предполагая, что заданные собственные значения также являются вещественными числами) и обсуждают некоторые итерационные методы для ее численного решения.

Нас занимает следующий вопрос: была ли у названных авторов альтернатива итерационному подходу к решению ЗХМ? Почему они не пытались построить прямой (т.е. конечный) алгоритм, использующий лишь арифметические операции и извлечения корней? Иными словами, разрешима ли в радикалах задача Хегланда–Марти?

Наш вопрос связан с тем хорошо известным обстоятельством, что существуют матричные обратные задачи на собственные значения, разрешимые в радикалах (и даже только в квадратичных радикалах). Упомянем одну из них, в некоторых отношениях весьма схожую с ЗХМ. Эта задача заключается в построении неразложимой трехдиагональной матрицы, притом одновременно симметричной и персимметричной, которая имела бы предписанный простой спектр. Обсуждение этой задачи для вещественного случая можно найти, например, в [3], [4]. В частности, в [4] в качестве метода численного решения предлагается алгоритм Ланцоша. В [5] показано, что для попарно различных комплексных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ все комплексные решения ЗХМ (их, в общем случае, может быть $2^{k-1} \binom{n}{k}$, где $k = \lceil n \rceil$) допускают вычисление за конечное время при использовании лишь рациональных операций и квадратичных радикалов.

В предлагаемой работе доказываемся, что хотя задача Хегланда–Марти разрешима в радикалах для $n = 2$ и $n = 3$, она неразрешима в радикалах над $\mathbb{Q}$ уже при $n = 4$. Случаи $n = 2$ и $n = 3$ разбираются в п. 2, а случай $n = 4$ – в п. 3.

В дальнейшем существенно используется следующее замечание. Общеизвестно, что алгебраические уравнения до четвертой степени включительно разрешимы в радикалах. Поэтому с точки зрения разрешимости в радикалах безразлично, что считать входной информацией малоразмерной ЗХМ ($n = 2, 3, 4$): собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ или коэффициенты $s_1, \dots, s_n$ характеристического многочлена

$$f_n(\lambda) = \lambda^n - s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n s_n \quad (3)$$

матрицы $C = T_n + D$. Нам удобнее иметь дело с последними.

2. Двух- и трехмерная задача Хегланда–Марти. При $n = 2$ разрешимость в радикалах задачи Хегланда–Марти почти очевидна. Действительно, пусть $f_2(\lambda) = \lambda^2 - s_1\lambda + s_2$ – заданный характеристический многочлен. Тогда искомые диагональные элементы d_1 и d_2 есть корни квадратного многочлена $\varphi(d) = d^2 - s_1d + (s_2 + 1)$.

Для $n = 3$ эквивалентным описанием ЗХМ является следующая система алгебраических уравнений относительно d_1, d_2, d_3 :

$$d_1 + d_2 + d_3 - s_1 = 0, \quad (4)$$

$$d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 - 2 - s_2 = 0, \quad (5)$$

$$d_1d_2d_3 - d_1 - d_3 - s_3 = 0. \quad (6)$$

Здесь также $f_3(\lambda) = \lambda^3 - s_1\lambda^2 + s_2\lambda - s_3$ – заданный характеристический многочлен. Уравнения (4)–(6) вытекают из известных выражений s_1, s_2, s_3 как сумм главных миноров соответствующего порядка в матрице $C = T + D$.

Полагая

$$u = d_1 + d_3, \quad (7)$$

можем переписать систему (4)–(6) в виде

$$u + d_2 = s_1, \quad (8)$$

$$ud_2 + d_1d_3 = s_2 + 2, \quad (9)$$

$$(d_1d_3)d_2 - u = s_3. \quad (10)$$

Вычитая из (10) умноженное на d_2 уравнение (9), имеем $ud_2^2 + u - (2 + s_2)d_2 + s_3 = 0$. Так как $u = s_1 - d_2$, то окончательно получаем

$$d_2^3 - s_1d_2^2 + (s_2 + 3)d_2 - (s_1 + s_3) = 0. \quad (11)$$

Неизвестное d_2 определяется из (11) посредством формулы Кардано, после чего равенства (8) и (9) дают значения величин u (т.е. суммы $d_1 + d_3$) и $v = d_1d_3$. Теперь d_1 и d_3 могут быть найдены как корни квадратного многочлена $\psi(z) = z^2 - uz + v$.

Отметим, что в [6] запись в радикалах для d_1, d_2 и d_3 получена иначе. Если обозначить через I идеал, порождаемый многочленами из левых частей уравнений (4)–(6), то в [6] указан вид приведенного базиса Грёбнера g_1, g_2, g_3 для идеала I относительно лексикографического упорядочения $d_1 > d_2 > d_3$. Там же доказано, что для многочлена $\varphi = g_3(d_3)$, его группа Галуа $\text{Gal}(\varphi)$ над $\mathbb{Q}(s_1, s_2, s_3)$ является разрешимой группой порядка 48; параметры s_1, s_2 и s_3 предполагаются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}$.

В заключение данного раздела отметим, что подстановка (7) подсказывается следующим свойством симметрии, легко распознаваемым в ЗХМ: если $(d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n)$ есть решение этой задачи, то решением является и $(d_n, d_{n-1}, \dots, d_2, d_1)$. Это замечание будет использовано в разделе 3.

3. Четырехмерная задача Хегланда–Марти. При $n = 4$ эквивалентное описание ЗХМ дает следующая система алгебраических уравнений относительно d_1, d_2, d_3, d_4 :

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - s_1 = 0, \quad (12)$$

$$d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_1 d_4 + d_2 d_3 + d_2 d_4 + d_3 d_4 - 3 - s_2 = 0, \quad (13)$$

$$d_1 d_2 d_3 + d_1 d_2 d_4 + d_1 d_3 d_4 + d_2 d_3 d_4 - (2d_1 + d_2 + d_3 + 2d_4) - s_3 = 0, \quad (14)$$

$$d_1 d_2 d_3 d_4 - d_1 d_2 - d_1 d_4 - d_3 d_4 + 1 - s_4 = 0. \quad (15)$$

Исключая неизвестные в обычной последовательности (т.е. сначала d_1 , затем d_2 и, наконец, d_3) посредством результатов, мы сведем систему (12)–(15) к алгебраическому уравнению 24-й степени относительно d_4 :

$$\psi(d_4) = 0. \quad (16)$$

Разрешимость в радикалах системы (12)–(15) определяется аналогичным свойством уравнения (16).

Степень многочлена ψ слишком велика для того, чтобы можно было непосредственно вычислить его группу Галуа, пользуясь существующими программами компьютерной алгебры. Однако, мы сумеем доказать неразрешимость в радикалах уравнения (16) с помощью косвенных соображений. Отсюда будет следовать, что задача Хегланда–Марти неразрешима в радикалах при $n = 4$.

Прежде всего, симметрия ЗХМ, отмеченная в конце раздела 2, позволяет вдвое понизить степень результирующего многочлена. В самом деле, пусть (d_1, d_2, d_3, d_4) есть решение ЗХМ. Тогда (d_4, d_3, d_2, d_1) также является решением. Это означает, что после исключения из (12)–(15) неизвестных d_1 и d_4 будет получена система вида

$$\xi(d_2, d_3) = 0, \quad \eta(d_2, d_3) = 0 \quad (17)$$

с тем свойством, что наряду с каждым решением (d_2, d_3) , имеется еще и решение (d_3, d_2) .

Подстановка $v = (d_2 + d_3)/2$, $w = (d_3 - d_2)/2$, превращает (17) в систему

$$\widehat{\xi}(v, w) = 0, \quad \widehat{\eta}(v, w) = 0, \quad (18)$$

которая вместе с каждым решением (v, w) обладает и решением $(v, -w)$. Отсюда заключаем, что в обоих многочленах $\widehat{\xi}$ и $\widehat{\eta}$ четность степеней всех одночленов по w должна быть одинаковой. Поэтому замена $u = w^2$ понижает полную степень каждого из уравнений системы (18). Теперь последний шаг исключения приводит к уравнению с одним неизвестным, степень которого равна 12.

Заметим, что уменьшить вдвое степень многочлена ψ в (16) можно и другими способами, один из них описан в [6].

К сожалению, и для многочлена степени 12 (особенно, если его коэффициенты содержат параметры) невозможно вычислить группу Галуа по имеющимся компьютерным программам. Тем не менее, мы покажем, что группа Галуа редуцированного многочлена (в дальнейшем обозначаемого как $\rho(x)$) совпадает с симметрической группой S_{12} . При этом мы будем опираться на следующий результат из [7], который удобно сформулировать в виде леммы.

ЛЕММА 1. Пусть R – целостное кольцо с единицей, в котором имеет место теорема об однозначном разложении на простые множители. Пусть P – простой идеал в R и $\bar{R} = R/P$ – кольцо классов вычетов. Пусть Δ и $\bar{\Delta}$ – поля частных колец R и $\bar{R}$. Наконец, пусть $f(x) = x^n + \dots$ – многочлен из $R[x]$, а $\bar{f}(x)$ получается из $f(x)$ при гомоморфизме $R \rightarrow \bar{R}$, причем оба многочлена не имеют кратных корней. Тогда группа Галуа многочлена $\bar{f}(x)$ над полем $\bar{\Delta}$ является подгруппой группы Галуа многочлена $f(x)$ над Δ .

Если в лемме 1 в качестве R взять кольцо многочленов $\mathbb{Q}[s_1, s_2, s_3, s_4]$, а в качестве P – идеал $(s_1 - a_1, s_2 - a_2, s_3 - a_3, s_4 - a_4)$, где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Q}$, то гомоморфизм $R \rightarrow \bar{R}$ сводится к подстановкам $s_i = a_i, i = 1, 2, 3, 4$. Положим, в частности, $s_1 = 3, s_2 = -1, s_3 = -3, s_4 = 0$, что равносильно заданию для ЗХМ характеристического многочлена $f_4(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda$. Тогда система (12)–(15) сведется к следующему неприводимому над $\mathbb{Q}$ многочлену от одного неизвестного (скажем, x):

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(x) = & x^{12} + 2x^{11} + 10x^{10} + 12x^9 + 58x^8 + 122x^7 + 429x^6 \\ & + 750x^5 + 848x^4 + 404x^3 + 125x^2 - 2x + 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Еще раз применим лемму 1, полагая на этот раз $R = \mathbb{Z}$, а $\bar{R} = \mathbb{Z}_p$ для различных простых чисел p . Факторизуя получаемые многочлены, мы найдем, в частности,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(x) \equiv & (x^2 + 4x + 29) \cdot (x + 4) \\ & \times (x^9 + 25x^8 + 13x^7 + 14x^5 + 21x^4 + 3x^3 + 17x^2 + x + 27) \pmod{31}, \\ \bar{\rho}(x) \equiv & (x + 22) \cdot (x^{11} + 107x^{10} + 69x^9 + 18x^8 + 43x^7 \\ & + 65x^6 + 15x^5 + 39x^4 + 117x^3 + 116x^2 + 113x + 52) \pmod{127}. \end{aligned}$$

Первое разложение показывает, что группа Галуа $\text{Gal}(\bar{\rho}, \mathbb{Q})$ содержит подстановку, представляемую произведением независимых циклов длины 2 и 9. Девятой степенью этой подстановки является двойной цикл. Согласно второму разложению в группу $\text{Gal}(\bar{\rho}, \mathbb{Q})$ входит цикл длины 11. Теперь мы напомним читателю еще один полезный факт из [7].

ЛЕММА 2. Транзитивная группа подстановок n -й степени, содержащая двойной цикл и цикл длины $n - 1$, является симметрической группой.

Из леммы 2 немедленно вытекает равенство $\text{Gal}(\bar{\rho}, \mathbb{Q}) = S_{12}$. Таким образом, группа Галуа многочлена (19) над $\mathbb{Q}$ неразрешима. Возвращаясь к многочлену ρ , зависящему от параметров s_1, s_2, s_3, s_4 , алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$, заключаем, что и его группа Галуа неразрешима.

Оформим конечный результат этих рассуждений как теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $s_1, \dots, s_4$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. Тогда не существует решения системы алгебраических уравнений (12)–(15), которое выразилось бы в радикалах над $\mathbb{Q}(s_1, \dots, s_4)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Friedland S. // Linear Algebra Appl. 1977. V. 17. P. 15–51. 2. Hegland M., Marti J. T. // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1989. V. 10. № 2. P. 219–228. 3. De Boor C., Golub G. H. // Linear Algebra Appl. 1978. V. 21. P. 245–260. 4. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир, 1983. 5. George A., Ikramov Kh. D., Tang W.-P., Tchugunov V. N. On doubly symmetric tridiagonal forms for complex matrices (to appear). 6. Williamson C. J. On the algebraic construction of tridiagonal matrices with given characteristic polynomial (to appear). 7. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.