Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 803–811

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:40:47

УДК 517.51.4

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ 2π -ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(2\pi)$

В. А. Абилов, Ф. В. Абилова

В работе с помощью функции Стеклова вводится модуль непрерывности и определяются классы функций $W_{2,\varphi}^{r,k}$ и $W_{\varphi}^{r,k}$ в пространствах L_2 и C . Для класса $W_{2,\varphi}^{r,k}$ вычислен порядок поперечника Колмогорова, а для класса $W_{\varphi}^{r,k}$ получена оценка погрешности квадратурной формулы.

Библиография: 6 названий.

1. Пусть $L_2 = L_2(2\pi)$ – пространство суммируемых с квадратом на $[0, 2\pi)$ 2π -периодических функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx}.$$

Обозначим через

$$E_n(f) = \inf_{T_n} \|f - T_n\|$$

наилучшее приближение функции $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка не выше $n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, в пространстве L_2 .

Напомним, что

$$d_n(M) = d_n(M; L_2) = \inf_{G_n \subset L_2} \left\{ \sup_{f \in M} \left\{ \inf_{g \in G_n} \|f - g\| \right\} \right\},$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам $G_n \subset L_2$ размерности $n \in \mathbb{N}$ – *n-поперечник Колмогорова* множества $M \subset L_2$.

Пусть, далее,

$$F_h f(x) = f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt, \quad h > 0,$$

функция Стеклова функции $f \in L_2$.

Определим разности первого и высших порядков следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_h(f; x) &= F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x), \\ \Delta_h^k(f; x) &= \Delta_h(\Delta_h^{k-1}(f; x); x) = (F_h - E)^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x), \end{aligned}$$

где $F_h^0 f(x) = f(x)$, $F_h^i f(x) = F_h(F_h^{i-1} f(x))$, $i = 1, 2, \dots, k$, $k = 1, 2, \dots$, и E – единичный оператор в пространстве L_2 .

Величину

$$\Omega_k(f; \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k(f; x)\|$$

будем называть *модулем непрерывности k -го порядка* функции $f \in L_2$.

Рассмотрим следующие классы функций:

- L_2^r – класс функций $f \in L_2$, имеющих обобщенные производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x)$ в смысле Леви [1, с. 172], принадлежащие пространству L_2 , $L_2^0 = L_2$;
- $W_{2,\varphi}^{r,k}$ – класс функций $f \in L_2^r$, для которых

$$\Omega_k(f^{(r)}; \delta) = O[\varphi(\delta^k)], \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная монотонно возрастающая функция, заданная на $[0; +\infty)$, и $\varphi(0) = 0$;

- $W_\varphi^{r,k}$ – класс непрерывно дифференцируемых 2π -периодических функций, для которых

$$\sup_{0 < h \leq \delta} \{\max_x |\Delta_h^k(f^{(r)}; x)|\} = O[\varphi(\delta^k)], \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $W_\varphi^{r,k} \subset W_{2,\varphi}^{r,k}$.

Пусть $f \in L_2$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos ix + b_i \sin ix, \quad a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos it \, dt, \quad b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin it \, dt, \quad (1)$$

– ее ряд Фурье,

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cos ix + b_i \sin ix$$

– частичные суммы ряда (1).

Известно, что

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2(f)}, \quad E_n(f) = \|f - S_n(f)\| = \sqrt{\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)}, \quad (2)$$

$$c_0^2(f) = \frac{a_0^2}{2}, \quad c_i^2(f) = a_i^2 + b_i^2, \quad i \geq 1.$$

Кроме того, нетрудно показать, что если $f \in L_2^r$, то

$$\|\Delta_h^k(f^{(r)}; x)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right)^{2k} i^{2r} c_i^2(f). \quad (3)$$

2. В этой заметке мы докажем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f \in L_2^r$ справедлива оценка

$$E_n(f) \leq \left(\frac{2n^2}{\pi^2 - 4} \right)^k n^{-r} \left(\int_0^{\pi/n} h \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}; h) dh \right)^k, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ константа в правой части уменьшена быть не может.

СЛЕДСТВИЕ 1. Справедлива оценка

$$\sup_{f \in W_{2,\varphi}^{r,k}} E_n(f) = O \left\{ \frac{1}{n^r} \varphi \left(\left(\frac{\pi}{n} \right)^k \right) \right\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. При всех $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0, 2)$

$$E_n(f) = O(n^{-r-k\alpha}) \iff f \in W_{2,t^\alpha}^{r,k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k = 1$ этот факт известен¹ (см. [2], [3], а также [4], [5]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in W_{\varphi}^{r,k}$ и

$$\int_0^1 \varphi^p \left[\left(\frac{\pi t}{m} \right)^k \right] t^{p/2+rp-2} dt < +\infty, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < p \leq 2.$$

Тогда

$$\sum_{i=n}^{\infty} (|a_{im}|^p + |b_{im}|^p) = O \left\{ \frac{1}{m^{rp}} \int_0^{1/n} \varphi^p \left[\left(\frac{\pi t}{m} \right)^k \right] t^{p/2+rp-2} dt \right\},$$

где константа, входящая в $O(1)$, зависит только от p , k и r .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in W_{t^\alpha}^{0,1}$, где $\alpha > 1/2$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} (|a_i| + |b_i|) < +\infty.$$

Нетрудно заметить, что это есть аналог одной хорошо известной теоремы Бернштейна об абсолютной сходимости ряда Фурье функции из класса Липшица.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $p = 1$, $n = 1$ и

$$\int_0^1 \varphi \left[\left(\frac{\pi t}{m} \right)^k \right] t^{r-3/2} dt < +\infty.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} (|a_{im}| + |b_{im}|) = O \left\{ \frac{1}{m^r} \int_0^1 \varphi \left[\left(\frac{\pi t}{m} \right)^k \right] t^{r-3/2} dt \right\}.$$

¹Этим замечанием мы обязаны проф. Б. И. Голубову.

ТЕОРЕМА 4. В условиях следствия 2

$$\sup_{f \in W_{\varphi}^{r,k}} \left| \int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \right| = O\left\{ \frac{1}{n^r} \int_0^1 \varphi\left[\left(\frac{\pi t}{n}\right)^k\right] t^{r-3/2} dt \right\}.$$

В частности, если $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, $k = 1$, $r + \alpha > 1/2$, то

$$\sup_{f \in W_{t^\alpha}^{r,1}} \left| \int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \right| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

ТЕОРЕМА 5. Справедлива оценка

$$d_n(W_{2,\varphi}^{r,k}; L_2) \asymp n^{-r} \varphi(n^{-k}).$$

Здесь функция $\varphi(t)$ удовлетворяет еще условию

$$\varphi(\lambda t) = O(\lambda + 1)\varphi(t), \quad \lambda > 0.$$

3. В этом пункте мы приведем доказательства теорем, сформулированных выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f \in L_2^r$. В силу неравенства Гёльдера при $k = 1, 2, \dots$, пользуясь (2) и (3), имеем, что

$$\begin{aligned} E_n^2(f) - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\sin ih}{ih} c_i^2(f) &= \sum_{i=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right) c_i^2(f) \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} |c_i(f)|^{2-1/k} |c_i(f)|^{1/k} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right) \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)\right)^{(2k-1)/(2k)} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right)^{2k} c_i^2(f)\right)^{1/(2k)} \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)\right)^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right)^{2k} i^{2r} c_i^2(f)\right)^{1/(2k)} \\ &= (E_n^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \|\Delta_h^k(f^{(r)}; x)\|^{1/k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$E_n^2(f) \leq (E_n^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \|\Delta_h^k(f^{(r)}; x)\|^{1/k} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\sin ih}{ih} c_i^2(f)$$

или

$$E_n^2(f) \leq (E_n^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}; h) + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\sin ih}{ih} c_i^2(f).$$

Умножая обе части последнего неравенства на $h > 0$ и интегрируя полученное неравенство в пределах $h \in [0, \pi/n]$, будем иметь, что

$$\frac{\pi^2}{2n^2} E_n^2(f) \leq (E_n^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \int_0^{\pi/n} h \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}; h) dh + \frac{2}{n^2} \sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f).$$

Отсюда нетрудно заметить, что

$$\frac{\pi^2 - 4}{2n^2} E_n^2(f) \leq (E_n^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \int_0^{\pi/n} h \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}; h) dh$$

или

$$E_n(f) \leq \left(\frac{2n^2}{\pi^2 - 4} \right)^k n^{-r} \left(\int_0^{\pi/n} h \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}; h) dh \right)^k.$$

С другой стороны нетрудно видеть, что для функции

$$f_*(x) = \cos nx$$

последнее неравенство обращается в равенство, и тем самым, теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Достаточность. Пусть $f \in W_{2,t\alpha}^{r,k}$. Тогда из следствия теоремы 1 следует, что

$$E_n(f) = O(n^{-r-k\alpha}).$$

Необходимость. Пусть

$$E_n(f) = O(n^{-r-k\alpha}),$$

т.е.

$$\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f) = O(n^{-2r-2k\alpha}).$$

Покажем, что $f \in W_{2,t\alpha}^{r,k}$. Нетрудно показать, что функция $f \in L_2$, имеет обобщенные производные Леви и

$$\|\Delta_h^k(f^{(r)}; x)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih} \right)^{2k} i^{2r} c_i^2(f).$$

Разобьем последнюю сумму на два слагаемых

$$\sum_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{n-1} + \sum_{i=n}^{\infty} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где $n = [h^{-1}]$, и оценим каждое слагаемое в отдельности.

Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{i=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih} \right)^{2k} i^{2r} c_i^2(f) \leq 2^{2k} \sum_{i=n}^{\infty} i^{2r} c_i^2(f) \\ &= O \left\{ n^{2r} \sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f) + \sum_{l=0}^{\infty} [(n+l+1)^{2r} - (n+l)^{2r}] \sum_{i=n+l+1}^{\infty} c_i^2(f) \right\} \\ &= O \left\{ n^{2r} n^{-2r-2k\alpha} + \sum_{l=0}^{\infty} (n+l+1)^{2r-1} (n+l+1)^{-2r-2k\alpha} \right\} \\ &= O(n^{-2k\alpha}) = O(h^{2k\alpha}), \end{aligned}$$

т.е.

$$\Sigma_2 = O(h^{2k\alpha}).$$

Оценим теперь

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right)^{2k} i^{2r} c_i^2(f).$$

Так как

$$0 \leq 1 - \frac{\sin x}{x} \leq \frac{x^2}{6}, \quad (5)$$

то

$$\Sigma_1 = O(h^{4k}) \sum_{i=1}^n i^{4k+2r} c_i^2(f).$$

Но

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^{4k+2r} c_i^2(f) &= O \left\{ \sum_{l=1}^n [l^{4k+2r} - (l-1)^{4k+2r}] \sum_{i=l}^{\infty} c_i^2(f) \right\} \\ &= O \left\{ \sum_{l=1}^n l^{4k+2r-1} l^{-2k\alpha-2r} \right\} = O(n^{4k-2k\alpha}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 = O(h^{4k} n^{4k-2k\alpha}) = O(h^{2k\alpha}).$$

Объединяя полученные оценки для Σ_1 и Σ_2 , имеем

$$\|\Delta_h^k(f^{(r)}; x)\| = O(h^{k\alpha}).$$

Остальное ясно. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $f \in W_{\varphi}^{r,k}$. Так как $W_{\varphi}^{r,k} \subset W_{2,\varphi}^{r,k}$, то из (4) следует, что

$$\sum_{i=n}^{\infty} (a_{im}^2 + b_{im}^2) \leq \sum_{i=n}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) = O \left\{ \frac{1}{(nm)^{2r}} \varphi^2 \left[\left(\frac{\pi}{nm} \right)^k \right] \right\}.$$

Отсюда при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{i=n}^{2n-1} (a_{im}^2 + b_{im}^2) = O \left\{ \frac{1}{(nm)^{2r}} \varphi^2 \left[\left(\frac{\pi}{nm} \right)^k \right] \right\}.$$

Применяя неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=n}^{2n-1} (|a_{im}|^p + |b_{im}|^p) \leq \left\{ \sum_{i=n}^{2n-1} (a_{im}^2 + b_{im}^2) \right\}^{p/2} (2n)^{1-p/2},$$

получим, что

$$\sum_{i=n}^{2n-1} (|a_{im}|^p + |b_{im}|^p) = O \left\{ \frac{1}{m^{rp}} \varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{nm} \right)^k \right] n^{1-rp-p/2} \right\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{\infty} (|a_{im}|^p + |b_{im}|^p) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=2^i n}^{2^{i+1}n-1} (|a_{im}|^p + |b_{im}|^p) \\ &= O\left\{ \frac{1}{m^{rp}} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{2^i n m} \right)^k \right] (2^i n)^{1-rp-p/2} \right\}. \end{aligned}$$

Оценим теперь сумму

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{2^i n m} \right)^k \right] (2^i n)^{1-rp-p/2}.$$

Заметим, что

$$\varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{2^i n m} \right)^k \right] (2^i n)^{1-rp-p/2} = \int_{2^i n}^{2^{i+1}n} \varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{2^i n m} \right)^k \right] (2^i n)^{-rp-p/2} dt.$$

Кроме того, при $2^i n \leq t \leq 2^{i+1}n$

$$\begin{aligned} \varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{2^{i+1}n m} \right)^k \right] (2^{i+1}n)^{-rp-p/2} &\leq \varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{m t} \right)^k \right] t^{-rp-p/2} \\ &\leq \varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{2^i n m} \right)^k \right] (2^i n)^{-rp-p/2}. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{2^i n m} \right)^k \right] (2^i n)^{1-rp-p/2} = O\left\{ \int_{2^i n}^{2^{i+1}n} \varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{m t} \right)^k \right] t^{-rp-p/2} dt \right\}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=n}^{\infty} (|a_{im}|^p + |b_{im}|^p) = O\left\{ \frac{1}{m^{rp}} \int_n^{+\infty} \varphi^p \left[\left(\frac{\pi}{m t} \right)^k \right] t^{-rp-p/2} dt \right\}.$$

Полагая в последнем интеграле $t = 1/x$, получим требуемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В условиях теоремы имеем, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jx + b_j \sin jx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \\ = \int_0^{2\pi} f(x) dx - \pi a_0 - \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\sum_{i=0}^{n-1} \cos j \frac{2\pi i}{n} \right) + b_j \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sin j \frac{2\pi i}{n} \right). \end{aligned}$$

Так как $\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(x) dx$, то очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi i}{n}\right) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\sum_{i=0}^{n-1} \cos i \frac{2\pi j}{n} \right) + b_j \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sin i \frac{2\pi j}{n} \right).$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sin i \frac{2\pi j}{n} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \cos i \frac{2\pi j}{n} = \begin{cases} (-1)^{m(n-1)} n, & j = mn, \\ 0, & j \neq mn. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi i}{n}\right) = -2\pi \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m(n-1)} a_{mn}.$$

Остается воспользоваться следствием 3 предыдущей теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Оценка сверху. Пусть $f \in W_{2,\varphi}^{r,k}$. Тогда из (4), очевидно, имеем, что

$$d_n(W_{2,\varphi}^{r,k}; L_2) \ll n^{-r} \varphi(n^{-k}).$$

Оценка снизу. Определим оператор $A: L_2 \rightarrow L_2$ следующим образом

$$g(x) = Af(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^r} \varphi\left(\frac{1}{i^k}\right) a_i \cos ix,$$

где, как обычно, $a_i, i = 1, 2, \dots$, – cos-коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$. Очевидно, что A – вполне непрерывный самосопряженный оператор в пространстве L_2 .

Рассмотрим теперь множество

$$G = \{g \in L_2: g = Af, f \in L_2, \|f\| \leq 1\}.$$

Известно, что [6, с. 551]

$$d_n(G; L_2) = \frac{1}{(n+1)^r} \varphi\left[\frac{1}{(n+1)^k}\right]. \quad (6)$$

Покажем, что $G \subset W_{2,\varphi}^{r,k}$. Пусть $g \in G$. Нетрудно показать, что

$$\|\Delta_h^k(g^{(r)}; x)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right)^{2k} \varphi^2\left(\frac{1}{i^k}\right) a_i^2.$$

Разобьем последнюю сумму на два слагаемых

$$\sum_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{n-1} + \sum_{i=n}^{\infty} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где $n = [h^{-1}]$, и оценим каждое слагаемое в отдельности.

Имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{i=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right)^{2k} \varphi^2\left(\frac{1}{i^k}\right) a_i^2 \\ &= O\left[\varphi^2\left(\frac{1}{n^k}\right)\right] \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = O\left[\varphi^2\left(\frac{1}{n^k}\right)\right] = O\left[\varphi^2(h^k)\right].\end{aligned}$$

Из неравенства (5) и из соотношения

$$\frac{\varphi(t_2)}{t_2} = O\left(\frac{\varphi(t_1)}{t_1}\right), \quad t_1 \leq t_2,$$

следует, что

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right)^{2k} \varphi^2\left(\frac{1}{i^k}\right) a_i^2 = O(h^{4k}) \sum_{i=1}^n i^{4k} \varphi^2\left(\frac{1}{i^k}\right) a_i^2 \\ &= O(h^{4k}) \sum_{i=1}^n \left[\frac{\varphi^2(1/i^k)}{1/i^k}\right]^2 i^{2k} a_i^2 \\ &= O(h^{4k}) \varphi^2\left(\frac{1}{n^k}\right) n^{4k} \sum_{i=1}^n a_i^2 = O[\varphi^2(h^k)].\end{aligned}$$

Из оценок для Σ_1 и Σ_2 следует, что

$$\|\Delta_h^k(g^{(r)}; x)\| = O[\varphi(h^k)],$$

т.е. $g \in W_{2,\varphi}^{r,k}$. Тем самым, мы показали, что $G \subset W_{2,\varphi}^{r,k}$. Отсюда и из (6) следует, что

$$d_n(W_{2,\varphi}^{r,k}; L_2) \gg n^{-r} \varphi(n^{-k}).$$

Следовательно,

$$d_n(W_{2,\varphi}^{r,k}; L_2) \asymp n^{-r} \varphi(n^{-k}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [2] Харшиладзе Ф. И. О функциях Стеклова // Сообщ. АН Грузинской ССР. 1953. Т. 14. № 3. С. 139–144.
- [3] Харшиладзе Ф. И. Приближение функций средними В. А. Стеклова // Тр. Тбилисского матем. ин-та. 1966. Т. 31. С. 55–70.
- [4] Ланина Е. Г. Наилучшие приближения функций и приближения функциями Стеклова // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2000. № 2. С. 49–52.
- [5] Жидков Г. В. Дифференциальные свойства одного класса функций // Исследования по алгебре и анализу / ред. В. М. Филипов, Ю. А. Селиванов. М., 1993. С. 42–46.
- [6] Гохберг И. И., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.