Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Серебряков, Условия квазирегулярности “чисто мнимого” сингулярного дифференциального оператора третьего порядка, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 1, 149–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:36:30

УСЛОВИЯ КВАЗИРЕГУЛЯРНОСТИ “ЧИСТО МНИМОГО” СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. П. Серебряков

Рассмотрим формально самосопряженное сингулярное дифференциальное выражение третьего порядка с чисто мнимыми коэффициентами

$$l[y] = -iy''' + \frac{i}{2} \{ (p(x)y)' + p(x)y' \}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

где $p(x)$ – действительная функция на полуоси $[0, \infty)$, абсолютно непрерывная на каждом сегменте $[0, b]$ ($0 < b < \infty$).

Обозначим через $\mathcal{L}$ минимальный замкнутый симметрический оператор, порожаемый выражением $l[y]$ в пространстве $L_2[0, \infty)$.

Рассуждая так же, как и в [1, § 17], нетрудно показать, что

I) область определения $\mathcal{D}^*$ оператора $\mathcal{L}^*$, сопряженного с $\mathcal{L}$, состоит из функций $y \in L_2[0, \infty)$, абсолютно непрерывных и имеющих абсолютно непрерывные производные первого и второго порядков на каждом сегменте $[0, b]$ ($0 < b < \infty$), для которых $l[y] \in L_2[0, \infty)$;

II) если $y, z \in \mathcal{D}^*$, то существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [y, z], \quad (1)$$

где

$$[y, z] = -i(y''\bar{z} - y'\bar{z}' + y\bar{z}'') + ipy\bar{z}; \quad (2)$$

III) область определения $\mathcal{D}$ оператора $\mathcal{L}$ состоит из тех функций $y \in \mathcal{D}^*$, для которых $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ и предел (1) равен нулю при каждом $z \in \mathcal{D}^*$.

Согласно [2], [3] индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ в зависимости от поведения его коэффициента $p(x)$ может принимать значения $\{1, 2\}$, $\{2, 2\}$ или $\{3, 3\}$.

Как известно, вопрос об индексе дефекта сингулярных дифференциальных операторов играет важную роль в спектральной теории дифференциальных операторов, в частности, в теории расширений симметрических операторов. Имеется немало работ, посвященных исследованию индекса дефекта операторов четного порядка (см., например, [1], [4]–[9]), а также библиографию, указанную в конце этих работ, для дифференциальных операторов нечетного порядка данный вопрос изучен меньше.

Оператор $\mathcal{L}$ будем называть *квазирегулярным*, если его дефектные числа, как и в регулярном случае, равны 3.

В настоящей заметке приведены условия на коэффициент p для того, чтобы оператор $\mathcal{L}$ был квазирегулярным или, наоборот, неквазирегулярным. Для получения этих условий мы, в отличие, например, от [2], [3], не изучаем асимптотическое поведение решений уравнения $l[y] = \lambda y$ с комплексным параметром λ , а используем свойства билинейной формы (2), ассоциированной с $\mathcal{L}$ (ср. с [4], [5], [7]–[9]).

Отметим, что если $p(x) \geq 0$ на $[0, \infty)$, то оператор $\mathcal{L}$ неквазирегулярный, поскольку в этом случае решение $y(x)$ уравнения $l[y] = 0$ ($0 \leq x < \infty$), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, не принадлежит $L_2[0, \infty)$.

ТЕОРЕМА. Пусть a – положительное действительное число, f и g – действительнозначные функции, определенные на $[a, \infty)$ и обладающие свойствами

- 1) f, f', f'' и g абсолютно непрерывны на каждом сегменте $[a, b]$, $a < b < \infty$;
- 2) f не обращается в нуль на $[a, \infty)$;
- 3) функции $g, g'f + 2gf'$ принадлежат $L_2[a, \infty)$.

Пусть $p = -f^{-2}(1 + f'^2 - 2ff'') + g$ при $a \leq x < \infty$. Тогда

- а) если $f \in L_2[a, \infty)$ и предел при $x \rightarrow \infty$ функции gf^2 равен нулю, то оператор $\mathcal{L}$ квазирегулярный;
- б) если $f \notin L_2[a, \infty)$, то оператор $\mathcal{L}$ неквазирегулярный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения а) достаточно показать (см. [1, § 14]), что коразмерность $\mathcal{D}$ в пространстве $\mathcal{D}^*$ не меньше 5.

Пусть

$$\varphi(x) = f(x) \exp \left\{ i \int_a^x (f(t))^{-1} dt \right\}. \quad (3)$$

Пусть $\mathcal{D}_a^*$ – множество сужений на $[0, a]$ функций из $\mathcal{D}^*$, а u_n – функции из $\mathcal{D}_a^*$, удовлетворяющие условиям (по поводу доказательства существования функций u_n см. [1, § 17, лемма 2 и ее доказательство])

$$\begin{aligned} u_n^{(k)}(0) &= \delta_{n,k+1} \quad (n = 1, \dots, 5, \quad k = 0, 1, 2), \\ u_n^{(k)}(a) &= 0, \quad u_4^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(a), \quad u_5^{(k)}(a) = \overline{\varphi}^{(k)}(a) \\ (n &= 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, 2, \quad \delta_{n,m} - \text{символ Кронекера}). \end{aligned} \quad (4)$$

Положим

$$y_n = \begin{cases} u_n & (0 \leq x < a, \quad n = 1, \dots, 5), \\ 0 & (a \leq x < \infty, \quad n = 1, 2, 3), \\ \varphi & (a \leq x < \infty, \quad n = 4), \\ \overline{\varphi} & (a \leq x < \infty, \quad n = 5). \end{cases} \quad (5)$$

Если $f \in L_2[a, \infty)$, то из построения функций y_n , условий 1), 3) доказываемой теоремы и утверждения I) следует, что все y_n принадлежат $\mathcal{D}^*$.

Покажем, что y_n ($n = 1, \dots, 5$) линейно независимы по модулю $\mathcal{D}$.

В самом деле, пусть

$$\sum_{n=1}^5 c_n y_n \in \mathcal{D},$$

где c_n – постоянные комплексные числа. Тогда согласно III) имеют место равенства

$$\sum_{n=1}^5 c_n y_n^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2), \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^5 c_n y_n, y_j \right] = 0. \quad (7)$$

Из (6), учитывая (3)–(5), находим $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Полагая в (7) последовательно $j = 4, 5$ и принимая во внимание (2)–(5), получаем, что если предел при $x \rightarrow \infty$ функции gf^2 равен нулю, то также $c_4 = c_5 = 0$. Таким образом, $c_n = 0$ ($n = 1, \dots, 5$) и утверждение а) теоремы доказано.

Утверждение б) теоремы можно получить, используя результаты работы [6].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $0 < a < \infty$ и

- 1) функции p, p', p'' абсолютно непрерывны на каждом сегменте $[a, b]$, $a < b < \infty$;
- 2) $p < 0$ на $[a, \infty)$;
- 3) функции $p^{-2}(5p'^2 - 4pp'')$, $(-p)^{-7/2}(15p'^3 - 18pp'p'' + 4p^2p''')$ принадлежат $L_2[a, \infty)$.

Тогда

- а) если $(-p)^{-1/2} \in L_2[a, \infty)$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p^{-3}(5p'^2 - 4pp'') = 0,$$

то оператор $\mathcal{L}$ квазирегулярный;

- б) если $(-p)^{-1/2} \notin L_2[a, \infty)$, то оператор $\mathcal{L}$ неквазирегулярный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно в установленной теореме взять

$$f = (-p)^{-1/2}, \quad g = p^{-1}p'' - \frac{5}{4}p^{-2}p'^2.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
02.08.94
Исправленный вариант
21.09.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С. // Математическая физика и функциональный анализ. II. Харьков, 1971. С. 45–60.
3. Unsworth K. // Quart. J. Math. Ser. 2. 1973. V. 24. № 94. P. 177–188.
4. Everitt W. N. // Quart. J. Math. Ser. 2. 1972. V. 23. № 89. P. 193–196.
5. Eastman M. S. P. // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1974. V. 8. P. 427–437.
6. Мирзоев К. А. // УМН. 1985. Т. 40. № 1 (241). С. 207–208.
7. Мирзоев К. А. // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 5. С. 712–716.
8. Серебряков В. П. // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 6. С. 833–842.
9. Серебряков В. П. // Изв. вузов. Матем. 1995. № 3 (394). С. 45–50.