Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, E_∞ -структуры на гомотопических группах,
Матем. заметки, 1997, том 61, выпуск 1, 152–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:52:15

E_∞ -СТРУКТУРЫ НА ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУППАХ

В. А. Смирнов

В настоящей статье мы рассмотрим проблему описания алгебраических структур на гомотопических группах $\pi_*(X)$ и стабильных гомотопических группах $\sigma_*(X)$ топологического пространства X .

На гомотопических группах топологического пространства имеется, например, структура алгебры Ли $[\cdot, \cdot]: \pi_p(X) \otimes \pi_q(X) \rightarrow \pi_{p+q-1}(X)$ и много других операций. Мы введем понятие E_∞ -алгебры Ли и покажем, что на гомотопических группах $\pi_*(X)$ топологического пространства X имеется структура E_∞ -алгебры Ли, которая определяет слабый гомотопический тип пространства X . Выясним также, какая структура имеется на стабильных гомотопических группах $\sigma_*(X)$ топологического пространства X .

Удобным языком для этого является язык операд Мэя [1]. При этом операд могут быть рассмотрены в категории топологических пространств [1] или в категории цепных комплексов [2].

Напомним, что семейство $E = \{E(j)\}_{j \geq 1}$ цепных комплексов $E(j)$, на которых действуют симметрические группы Σ_j , называется операдой, если заданы операции

$$\gamma: E(k) \otimes E(j_1) \otimes \cdots \otimes E(j_k) \rightarrow E(j), \quad j = j_1 + \cdots + j_k,$$

удовлетворяющие некоторым условиям ассоциативности и согласованности с действием симметрических групп [1], [2].

Ациклическая операда со свободным действием симметрических групп обозначается $E_\infty = \{E_\infty(j)\}$. Например, $E_\infty(2)$ является Σ_2 -свободным цепным комплексом, порожденным элементами e_i размерности i , и дифференциал на этих элементах определен формулой $d(e_i) = e_{i-1} + (-1)^i e_{i-1} T$, где $T \in \Sigma_2$.

Операда E в категории цепных комплексов определяет монаду E и комонаду $\overline{E}$ в этой категории следующим образом:

$$E(M) = \sum_{j \geq 1} E(j) \otimes_{\Sigma_j} M^{\otimes j}, \quad \overline{E}(M) = \prod_{j \geq 1} \text{Hom}_{\Sigma_j}(E(j); M^{\otimes j}).$$

Операдная структура γ в E индуцирует естественные преобразования функторов $\gamma: E \circ E \rightarrow E$, $\overline{\gamma}: \overline{E} \rightarrow \overline{E} \circ \overline{E}$.

Обычно для описания какой-либо структуры на цепном комплексе M используется структура $\mu: E(M) \rightarrow M$ алгебры над монадой E или структура $\tau: M \rightarrow \overline{E}(M)$ коалгебры над комонадой $\overline{E}$. Например, как было показано в работе [2], на сингулярном цепном комплексе $C_*(X)$ топологического пространства X имеется структура $\overline{E}_\infty$ -коалгебры (на коцепном комплексе $C^*(X)$ имеется структура E_∞ -алгебры), и эта структура определяет слабый гомотопический тип топологического пространства X (в случае односвязности X). Однако, для описания алгебр Ли такие структуры не подходят, поскольку, например, структура алгебры над монадой дает операции, сохраняющие или

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант MNJ000.

повышающие размерность, а для алгебры Ли нужны операции, понижающие размерность на единицу.

Здесь мы определим понятие алгебры над комонадой, но прежде рассмотрим более простую ситуацию модулей над коалгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'. Пусть K – дифференциальная коалгебра с коумножением $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$. Дифференциальный модуль M будем называть *модулем над коалгеброй K* или просто K -модулем, если задана операция $\varphi: K \otimes M \rightarrow M$, размерности -1 , удовлетворяющая соотношению $d(\varphi) + \varphi \cup \varphi = 0$, где $\varphi \cup \varphi = \varphi(1 \otimes \varphi)(\nabla \otimes 1): K \otimes M \rightarrow M$, т.е. φ – скрещивающая коцепь в смысле Брауна [3].

Пусть M – модуль над коалгеброй K , $\varphi: K \otimes M \rightarrow M$. Тогда $K \otimes_{\varphi} M$ обозначает скрещенное тензорное произведение с дифференциалом $d_{\varphi} = d \otimes 1 + 1 \otimes d + \varphi \cap$, где $\varphi \cap = (1 \otimes \varphi)(\nabla \otimes 1): K \otimes M \rightarrow K \otimes M$.

Ясно, что если L – комодуль над коалгеброй K , т.е. задано кодействие $\tau: L \rightarrow K \otimes L$, то ко- B -конструкция $F(K, L)$ будет модулем над коалгеброй K , и скрещенное тензорное произведение $K \otimes_{\varphi} F(K, L)$ будет цепно эквивалентно L . Переформулировка теоремы Брауна [3] дает, что если M является K -модулем над полем, то гомологии $M_* = H_*(M)$ также будут K -модулем, $\varphi_*: K \otimes M_* \rightarrow M_*$, причем будет иметь место цепная эквивалентность $K \otimes_{\varphi} M \simeq K \otimes_{\varphi_*} M_*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\overline{E}$ – комонада в категории дифференциальных модулей, $\overline{\gamma}: \overline{E} \rightarrow \overline{E} \circ \overline{E}$. Дифференциальный модуль M будем называть *алгеброй над комонадой $\overline{E}$* или просто $\overline{E}$ -алгеброй, если задана операция $\varphi: \overline{E}(M) \rightarrow M$ размерности -1 , удовлетворяющая следующему соотношению: $d(\varphi) + \varphi \cup \varphi = 0$, где $\varphi \cup \varphi = \varphi \circ \overline{E}(\varphi) \circ \overline{\gamma}(M): \overline{E}(M) \rightarrow M$.

Пусть M – алгебра над комонадой $\overline{E}$, $\varphi: \overline{E}(M) \rightarrow M$. Определим в $\overline{E}(M)$ новый дифференциал d_{φ} , положив $d_{\varphi}(x) = d(x) + \varphi \cap x$, $x \in \overline{E}(M)$, где $\varphi \cap = \overline{E}(\varphi) \circ \overline{\gamma}(M): \overline{E}(M) \rightarrow \overline{E}(M)$.

Цепной комплекс $E(M)$ с таким дифференциалом будем обозначать $\overline{E}_{\varphi}(M)$. Ясно, что если L – коалгебра над комонадой $\overline{E}$, то соответствующая ко- B -конструкция $M = F(\overline{E}, L)$ будет $\overline{E}$ -алгеброй и $\overline{E}_{\varphi}(M)$ будет цепно эквивалентен L .

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – односвязное топологическое пространство. Тогда на гомотопических группах $\pi_*(X)$ (точнее, на присоединенном R -модуле, $R = \mathbb{Z}/p, \mathbb{Q}$ имеется структура $\overline{E}_{\infty}$ -алгебры $\varphi_*: \overline{E}_{\infty}(\pi_*(X)) \rightarrow \pi_*(X)$, которая определяет слабый гомотопический тип пространства X .

Для доказательства этой теоремы напомним, что сингулярные гомологии $H_*(X)$ топологического пространства X с коэффициентами в R являются $\overline{E}_{\infty}$ -коалгеброй, и гомологии ко- B -конструкции $F(\overline{E}_{\infty}, H_*(X))$ изоморфны члену E^{∞} спектральной последовательности Боусфилда–Кана. Распространение метода Брауна на случай комонад дает, что ко- B -конструкция $F(\overline{E}_{\infty}, H_*(X))$ будет $\overline{E}_{\infty}$ -алгеброй и ее гомологии также будут $\overline{E}_{\infty}$ -алгеброй. Более того, так как $\overline{E}_{\infty \varphi_*} \pi_*(X)$ цепно эквивалентна $H_*(X)$ как $\overline{E}_{\infty}$ -коалгебра и структура $\overline{E}_{\infty}$ -коалгебры на $H_*(X)$ определяет слабый гомотопический тип X , то структура $\overline{E}_{\infty}$ -алгебры на $\pi_*(X)$ определяет слабый гомотопический тип X .

Таким образом, эта теорема дает еще один ответ на вопрос о том, какую структуру следует задавать на гомотопических группах топологического пространства, чтобы

определить его гомотопический тип. Известно, что одну из таких структур составляют инварианты Постникова [4]. Однако, инварианты Постникова не являются в полной мере алгебраическими операциями, поскольку, например, они не аддитивны. В отличие от них структура $\overline{E}_\infty$ -алгебры на гомотопических группах топологического пространства является чисто алгебраической.

Пусть $\overline{E}_0$ – комонада, соответствующая операде $E_0 = \{E_0(j)\}$, для которой $E_0(j)$ – свободный модуль с одной нульмерной образующей $e_0(j)$ и тривиальным действием симметрической группы Σ_j . Имеет место естественное вложение комонад $i: \overline{E}_0 \rightarrow \overline{E}_\infty$ и, следовательно, любая $\overline{E}_\infty$ -алгебра будет $\overline{E}_0$ -алгеброй. В частности, гомотопические группы $\pi_*(X)$ будут $\overline{E}_0$ -алгеброй.

Легко видеть, что задание на $\pi_*(X)$ структуры $\overline{E}_0$ -алгебры означает задание семейства операций $\nu(i): \pi_*(X)^{\otimes i} \rightarrow \pi_*(X)$, $i \geq 2$, размерности -1 таких, что выполняются следующие соотношения:

- 1) $\nu(i)\sigma = (-1)^\sigma \nu(i)$, $\sigma \in \Sigma_i$;
- 2) $\sum (-1)^\varepsilon \nu(n-i+1)(\nu(i)(x_{n_1} \otimes \cdots \otimes x_{n_i}) \otimes x_{m_1} \otimes \cdots \otimes x_{m_{n-i}}) = 0$, где сумма берется по всем перетасовкам чисел $1, 2, \dots, n$;
- 3) $\nu(2) = [\cdot, \cdot]: \pi_p(X) \otimes \pi_q(X) \rightarrow \pi_{p+q-1}(X)$ – структура алгебры Ли.

Следуя Сташеффу [5], структура $\overline{E}_0$ -алгебры на $\pi_*(X)$ может быть названа структурой A_∞ -алгебры Ли, а структура $\overline{E}_\infty$ -алгебры – структурой E_∞ -алгебры Ли.

В случае $R = \mathbb{Q}$ структура A_∞ -алгебры Ли на гомотопических группах топологического пространства достаточна для определения его рационального гомотопического типа. В случае $R = \mathbb{Z}/p$ необходимо использовать всю E_∞ -структуру. Например, в случае $R = \mathbb{Z}/2$ следствием структуры E_∞ -алгебры Ли, помимо рассмотренных выше операций $\nu(i): \pi_*(X)^{\otimes i} \rightarrow \pi_*(X)$, являются операции $\bar{e}_i: \pi_n(X) \rightarrow \pi_{2n-i-1}(X)$, $i \geq 0$, определенные формулой $\bar{e}_i(x_n) = \varphi_*(\bar{e}_i \otimes x_n \otimes x_n)$, $e_i \in E_\infty(2)$, и удовлетворяющие следующим соотношениям:

- 4) $\bar{e}_0(x) = [x, x]$;
- 5) $[\bar{e}_i(x), \bar{e}_j(y)] = \bar{e}_{i+j}[x, y]$;
- 6) $\sum \binom{j-i}{k} \bar{e}_{i+2k} \bar{e}_{j-k} = 0$, $i \leq j$.

В работе [6] для A_∞ -алгебр и E_∞ -алгебр были определены понятия разложимых и неразложимых элементов. Теперь мы определим эти понятия для алгебр над комонадой. А именно, пусть M – градуированная $\overline{E}$ -алгебра, $\varphi: \overline{E}(M) \rightarrow M$. Имеет место вложение $i: M \rightarrow \overline{E}(M)$, которое индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} \overline{E}_\varphi(M) \xrightarrow{p} \overline{E}_\varphi^1(M) \rightarrow 0$$

и длинную точную последовательность гомологий

$$\cdots \rightarrow M \xrightarrow{i_*} H_*(\overline{E}_\varphi(M)) \xrightarrow{p_*} H_*(\overline{E}_\varphi^1(M)) \xrightarrow{m_*} M \rightarrow \cdots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент x градуированной $\overline{E}$ -алгебры M будем называть *разложимым*, если он принадлежит образу гомоморфизма m_* или, что то же самое, ядру гомоморфизма $i_*: M \rightarrow H_*(\overline{E}_\varphi(M))$. Таким образом, модуль неразложимых элементов в M будет изоморфен образу гомоморфизма i_* .

В частности, рассматривая комонаду $\overline{E}_\infty$, мы получаем определение разложимых и неразложимых элементов для E_∞ -алгебры Ли.

ТЕОРЕМА 2. *Разложимыми элементами в гомотопических группах $\pi_*(X)$, рассматриваемых как E_∞ -алгебра Ли, являются элементы из ядра гомоморфизма Гуревича $H: \pi_*(X) \rightarrow H_*(X)$, и, следовательно, модуль неразложимых элементов в $\pi_*(X)$ изоморфен образу гомоморфизма Гуревича.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что $H_*(\overline{E}_{\infty\varphi_*}\pi_*(X)) \cong H_*(X)$ и того, что i_* является гомоморфизмом Гуревича.

Рассмотрим теперь вопрос об алгебраической структуре на стабильных гомотопических группах $\sigma_*(X)$ топологического пространства X . Как было показано в работе [1], бесконечнократное пространство петель $\Omega^\infty S^\infty X$ над пространством X является E_∞ -пространством. Поэтому вопрос о структуре на стабильных гомотопических группах топологического пространства можно переформулировать в виде: какая структура имеется на гомотопических группах $\pi_*(X)$ E_∞ -пространства X ?

Для ответа на этот вопрос заметим, что если X — E_∞ -пространство, то на его гомотологиях $X_* = H_*(X)$ (с коэффициентами в поле) также будет структура E_∞ -алгебры. В частности, имеют место $\cup_i$ -произведения $\cup_i: X_* \otimes X_* \rightarrow X_*$.

Как отмечалось Мэем [7], на гомотопических группах E_∞ -пространства X имеются $\cup_i$ -произведения $\cup_i: \pi_*(X) \otimes \pi_*(X) \rightarrow \pi_*(X)$, обобщающие операции Кана [8] и Мильграма [9]. Можно предположить, что на гомотопических группах $\pi_*(X)$ E_∞ -пространства X также будет структура E_∞ -алгебры. Еще один аргумент в пользу этого предположения состоит в том, что второй член спектральной последовательности Адамса в этом случае будет E_∞ -алгеброй. Однако, несмотря на все попытки ввести структуру E_∞ -алгебры на гомотопических группах E_∞ -пространства, этого сделать не удавалось. Напомним, что именно это обстоятельство явилось главным препятствием для описания стабильных гомотопических групп сфер, о котором рассказывалось на международной конференции по теории гомотопий в Обервольфахе (Германия) в 1994г. Как тогда было показано, на стабильных гомотопических группах $\sigma_*(X)$ не существует обычной структуры E_∞ -алгебры и необходима ее модификация.

Для описания такой модифицированной структуры мы будем использовать монаду E_∞ и комонаду $\overline{E}_\infty$, но прежде рассмотрим более простую ситуацию алгебры и коалгебры.

Пусть A — алгебра с умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$, K — коалгебра с коумножением $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$, $T: A \otimes K \rightarrow K \otimes A$ — перестановочное отображение, удовлетворяющее соотношениям: $T(\pi \otimes 1) = (1 \otimes \pi)(T \otimes 1)(1 \otimes T)$, $(\nabla \otimes 1)T = (T \otimes 1)(1 \otimes T)(1 \otimes \nabla)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3'. K -модуль M будем называть (A, K) -модулем, если задано отображение $c: A \otimes K \otimes M \rightarrow M$ размерности 0 такое, что $d(c) = c \cup \varphi - \varphi \cup c$, $c(\pi \otimes 1 \otimes 1) = c \cup c$, где $c \cup \varphi = c(1 \otimes 1 \otimes \varphi)(1 \otimes \nabla \otimes 1)$, $\varphi \cup c = \varphi(1 \otimes c)(T \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \nabla \otimes 1)$, $c \cup c = c(1 \otimes T \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \nabla \otimes 1)$.

Структура (A, K) -модуля на K -модуле M позволяет определить на скрещенном тензорном произведении $K \otimes_\varphi M$ структуру модуля над алгеброй A , $\eta: A \otimes K \otimes_\varphi M \rightarrow K \otimes_\varphi M$, положив $\eta = (1 \otimes c)(1 \otimes T \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \nabla \otimes 1)$.

Рассмотрим теперь монаду E_∞ и комонаду $\overline{E}_\infty$. Можно показать, что имеет место перестановочное отображение $T: E_\infty \overline{E}_\infty \rightarrow \overline{E}_\infty E_\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $\overline{E}_\infty$ -алгебру M будем называть $(E_\infty, \overline{E}_\infty)$ -алгеброй, если дополнительно задана операция $c: E_\infty \overline{E}_\infty(M) \rightarrow M$, удовлетворяющая соотношениям $d(c) = c \cup \varphi - \varphi \cup c$ и $c(\gamma(\overline{E}_\infty(M))) = c \cup c$. $(E_\infty, \overline{E}_\infty)$ -алгебру M будем также называть E_∞ -биалгеброй Ли.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X — E_∞ -пространство. Тогда на гомотопических группах $\pi_*(X)$ имеется структура E_∞ -биалгебры Ли. В частности, стабильные гомотопические группы топологического пространства являются E_∞ -биалгеброй Ли.

Доказательство этой теоремы следует из рассмотрения соответствующих ко- B -конструкций.

Таким образом, на гомотопических группах $\pi_*(X)$ E_∞ -пространства X имеется операция $c: E_\infty \overline{E}_\infty(\pi_*(X)) \rightarrow \pi_*(X)$. Вложение $i: \pi_*(X) \rightarrow \overline{E}_\infty(\pi_*(X))$ индуцирует действие $\mu_*: E_\infty(\pi_*(X)) \rightarrow \pi_*(X)$, $\mu_* = c_* E_\infty(i)$. Однако, это действие монады E_∞ на $\pi_*(X)$ не является цепным отображением, а имеет место формула $d(\mu_*) + \varphi_* \cup \mu_* = 0$, где $\varphi_* \cup \mu_* = \varphi_* \overline{E}_\infty(\mu_*) \tau(\pi_*(X))$, $\tau = T(\pi_*(X)) E_\infty(i)$.

Полученная структура на гомотопических группах может быть использована для вычисления высших дифференциалов в спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп сфер. Например, с помощью этой структуры получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} d(h_i) &= h_0 h_{i-1}^2 + [\xi_2] h_{i-2}^4 + \cdots + [\xi_{i-1}] h_1^{2^{i-1}}, \\ d(h_i^2) &= h_1 h_{i-1}^4 + [\xi_2^2] h_{i-2}^8 + \cdots + [\xi_{i-1}^2] h_1^{2^i}, \end{aligned}$$

где ξ_i — элементы в коалгебре Милнора (двойственной к алгебре Стиррода), $h_i = [\xi_1^{2^i}]$.

Московский педагогический государственный университет
E-mail: smirnov.matan@mpgu.msk.su

Поступило
26.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. May J. P. The Geometry of Iterated Loop Spaces. Lect. Notes in Math. V. 271. Berlin: Springer Verlag, 1972.
2. Смирнов В. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. С. 1302–1321.
3. Brown E. H. // Ann. of Math. 1959. V. 69. P. 223–246.
4. Постников М. М. // Матем. сб. 1956. Т. 40. С. 415–452.
5. Stasheff J. D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. P. 375–412.
6. Смирнов В. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1994. Т. 58. С. 80–96.
7. May J. P. // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 456–494.
8. Kan D. S. // Topology. 1970. V. 9. P. 1–9.
9. Milgram R. J. Unstable homotopy from the stable point of view. Lect. Notes in Math. V. 368. Berlin: Springer Verlag, 1974.